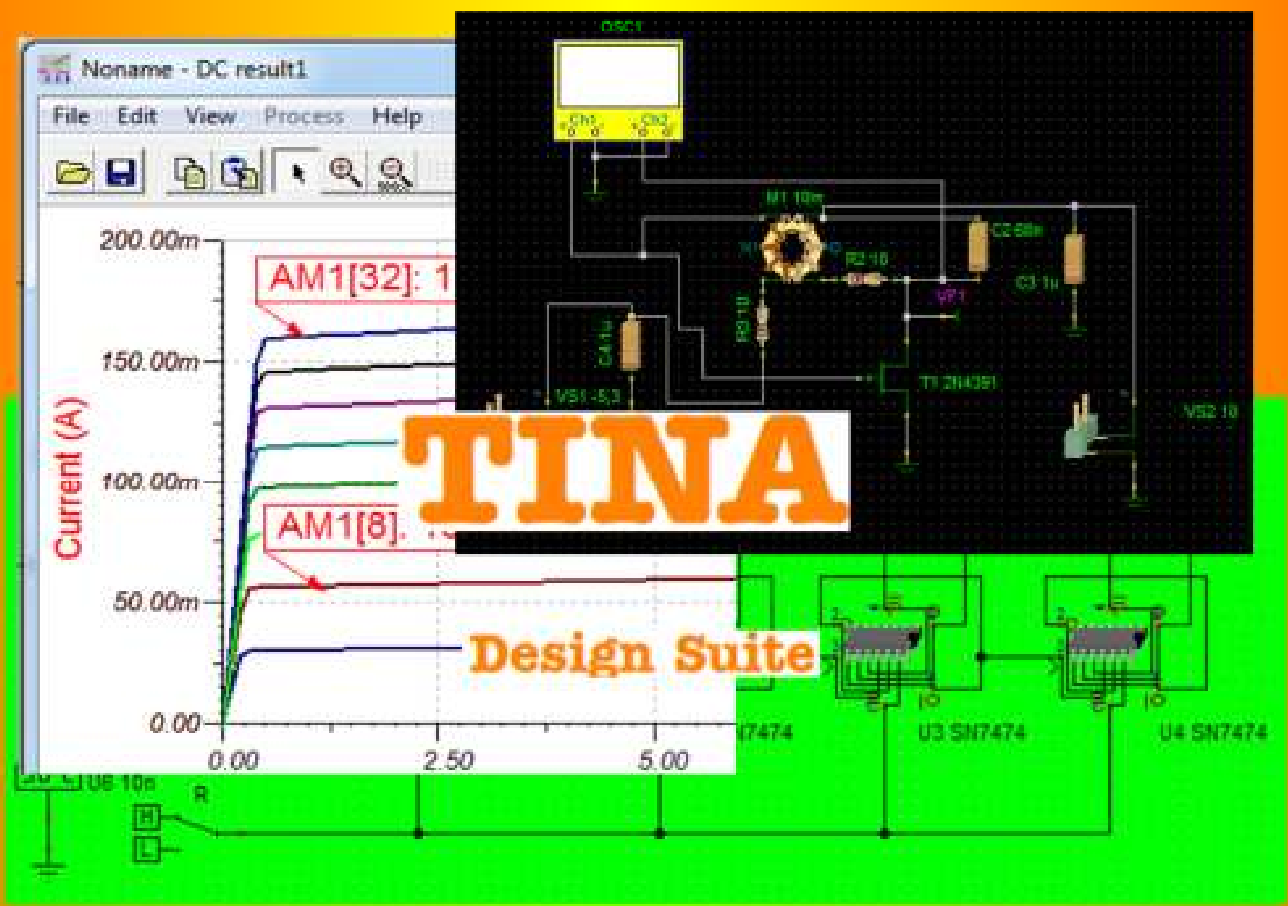
В.А. АЛЕХИН

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

КУРС ЛЕКЦИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В СРЕДЕ «TINA»



МОСКВА 2014

В.А. АЛЕХИН

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

КУРС ЛЕКЦИЙ
С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В СРЕДЕ «TINA»

Учебное пособие

МОСКВА 2014

ББК 31.21
А 49
УДК 621.3.01
Индекс 2202010000
Рецензенты: профессор В.Г. Лысенко, доцент Р.М. Закалюкин

А 49 Алехин В.А. Электротехника. Курс лекций с использованием компьютерного моделирования в среде «TINA». Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики - М., 2014.

ISBN 978-5-7339-0620-1

Курс лекций по электротехнике соответствует программам дисциплин «Электротехника», «Общая электротехника», «Электротехника и электроника» (часть 1) и предназначен для студентов, обучающихся по направлениям «Мехатроника и робототехника», «Приборостроение», «Управление в технических системах». Автор читал этот курс в течение ряда лет в Московском государственном техническом университете радиотехники, электроники и автоматики. Предлагаемый мультимедийный курс лекций содержит теоретические материалы, примеры решения задач, которые сочетаются с компьютерным моделированием электрических цепей в среде «TINA».

Учебное пособие состоит из 14 лекций, включает в себя комплект схем для моделирования и может быть использовано студентами и преподавателями.

Библиограф.: 14 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета университета.

ВВЕДЕНИЕ

Электротехнические дисциплины «Электротехника», «Общая электротехника», «Электротехника и электроника» (часть 1) в соответствии с Федеральными государственными образовательными стандартами подготовки бакалавров по направлениям «Мехатроника и робототехника», «Приборостроение», «Управление в технических системах» изучаются студентами в течение одного семестра. Содержание дисциплин и перечень изучаемых разделов мало изменился по сравнению с предыдущими государственными стандартами подготовки специалистов. В связи с этим образовательный процесс должен быть более интенсивным и использовать современные компьютерные технологии.

На кафедре теоретических основ электротехники МИРЭА в течение многих лет наряду с аналоговой лабораторией электротехники широко применялись компьютерные лабораторные практикумы с использованием программ *Electronics Workbench* и *TINA*, а также расчеты электрических цепей в *Mathcad*. Студенты осваивают эффективные компьютерные технологии расчета и моделирования электрических цепей.

Дальнейшим развитием современных информационных технологий является создание мультимедийных курсов лекций, сочетающих представление качественного текстового и графического материала с компьютерным моделированием электрических схем и процессов.

В последние годы появились новые эффективные программы компьютерного моделирования, в частности, программа *TINA-8-Industrial* компании *Texas Instruments*, которая является развитием программ *Micro-CAP* и *Design Lab* и содержит интегрированную часть для проектирования печатных плат. Эта программа наиболее информативная и удобна для применения в лекционном процессе. Доступную студенческую версию программы *TINA-TI-V9* можно найти на сайте http://www.ti.com/tool/tina-ti.

Схемы для моделирования, использованные в курсе лекций, могут быть собраны студентами или получены в электронных ресурсах кафедры. Изучение программы моделирования TINA проходит в лабораторном практикуме [7].

Автор надеется, что курс лекций по электротехнике будет полезен как студентам, так и преподавателям электротехнических дисциплин.

Глава 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

1.1. Задачи дисциплины «ЭЛЕКТРОТЕХНИКА»

Электротехнические дисциплины представляют собой фундаментальную базу для изучения всех последующих дисциплин профессионального цикла при подготовке бакалавров и специалистов по направлениям «Приборостроение», «Мехатроника и робототехника», «Управление в технических системах», «Информатика и вычислительная техника» и др.

Инженеры по приборостроению, робототехнике, устройствам управления, электронике, вычислительной технике разрабатывают, создают и эксплуатируют разнообразные электронные и электромеханические устройства, применяя для этого современные методы моделирования, расчета и автоматизированного проектирования. *Электронное устройство* состоит из многих электронных компонентов (резисторов, катушек индуктивности, конденсаторов, транзисторов, микросхем, микропроцессоров и т.п.), соединенных определенным образом между собой, с источниками электрической энергии и с источниками входных сигналов. Электронное устройство графически изображают *принципиальной электрической схемой,* в которой все элементы изображены с помощью принятых условных обозначений и показан способ соединения элементов.

На основе предварительного анализа технического задания инженеры выбирают реальные электронные компоненты и разрабатывают принципиальную электрическую схему электронного устройства. Для проверки работоспособности принципиальной схемы и выбора оптимальных параметров электронных компонентов инженеры создают *математическую модель* электронного устройства (рис.1.1). В математической модели реальные электронные компоненты заменяют их математическими моделями, в которых исключены второстепенные явления, и используется совокупность *идеальных элементов.* Принципиальную электрическую схему заменяют *электрической цепью*. *Электрическая цепь – это идеализированная модель реальной электрической схемы, позволяющая производить приближенный расчет электронного устройства*. Получают *математическую модель*. Вводят в нее модели сигналов и получают реакции. Проводят исследования расчетной модели, находят оптимальную структуру электрической цепи и оптимальные модели элементов. В результате таких исследований уточняют состав реальных электронных компонентов и принципиальную электрическую схему. Затем проектируют печатные платы и конструкцию устройства, изготавливают макет и проводят натурные испытания.

В современном мире электрическая энергия является основным средством обеспечения производственной деятельности человека, создания условий для комфортного существования в развитом информационном обществе. Повседневно мы используем разнообразные приборы и устройства с электрическим питанием. Поэтому знание основ электротехники, умение технически грамотно решать возникающие бытовые проблемы необходимо для каждого образованного человека.

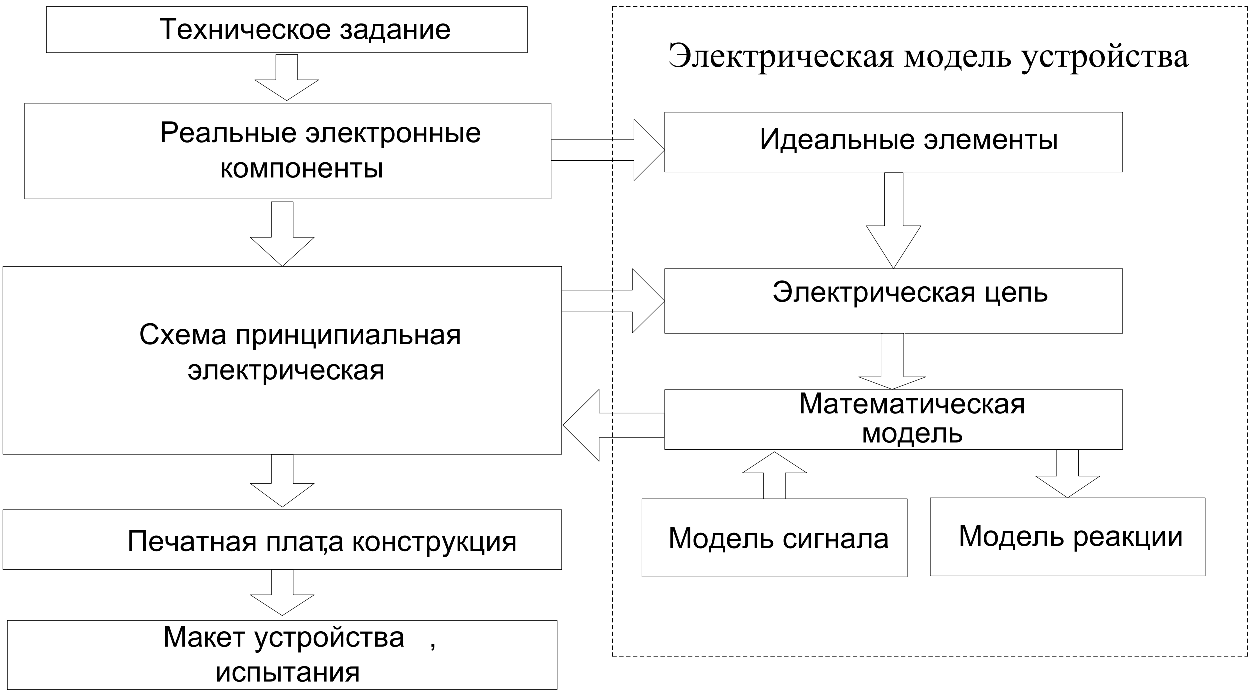


Рис.1.1. Этапы проектирования электронного устройства

Требованиям современного мира должен отвечать *современный курс «Электротехника»*. В результате изучения курса студенты должны знать:

1. Основные понятия и законы электротехники.

2. Методы расчета сложных электрических цепей с использованием компьютерных программ.

3. Методы экспериментального исследования электрических цепей в реальной лаборатории.

4. Компьютерное моделирование электрических цепей в виртуальной лаборатории с использованием современных программ.

5. Способы решения разнообразных простых задач по всем темам курса.

Изучение теоретических вопросов в нашем курсе иллюстрируется многочисленными примерами моделирования в программной среде «TINA-8» и примерами решения задач с простыми числами. В приложении даны программы расчета электрических цепей в Mathcad, которые рекомендуется использовать при выполнении домашних и курсовых работ.

Старательное и полное изучение нашего курса электротехники поможет студентам в освоении последующих дисциплин.

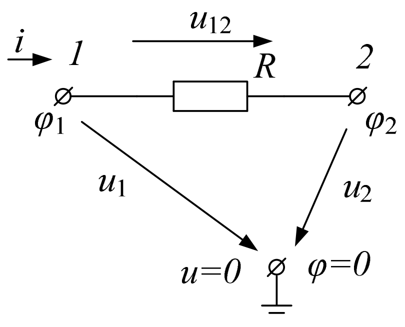
1.2. Основные понятия электротехники

Электрической цепью называют совокупность соединенных друг с другом источников электрической энергии и нагрузок, по которым может протекать электрический ток.

Особенностью электрических цепей как расчетных моделей является то, что сложные электромагнитные процессы, протекающие в реальных устройствах и их элементах, в электрической цепи можно описать с помощью понятий: *электрический ток, электрическое напряжение, сопротивление, индуктивность, емкость*.

Электрический ток определяется как упорядоченное перемещение электрического заряда q (Кл) через поперечное сечение проводника. Постоянный по величине и направлению ток обозначают прописной буквой $I = \frac{q}{t}$.Переменный ток обозначают строчной буквой $i = \frac{dq}{dt}$. Единицей измерения тока является ампер ($1\text{А} = \frac{1\text{Кл}}{1\text{с}}$).

Электрический потенциал φ некоторой точки электрической цепи равен отношению энергии, расходуемой зарядом при его перемещении из данной точки электрической цепи в другую точку, имеющую нулевой потенциал, к величине заряда. В электрической цепи точкой с нулевым потенциалом считается заземленная точка. Электрический потенциал измеряют в вольтах ($1\text{В}=\frac{1\text{Дж}}{1\text{Кл}}=\frac{1\text{Вт}}{1\text{А}}$).



Электрическое напряжение u между двумя точками цепи равно разности потенциалов этих точек $u_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$. На схемах электрических цепей потенциалы точек обычно обозначают как напряжения $(u_1 = \varphi_1, u_2 = \varphi_2)$ (рис.1.1).

Если напряжение создается током, проходящим между точками 1 и 2, его называют *падением напряжения* $u_{12} = iR$. Если движение от точки 2 и точке 1 происходит против направления тока, падение напряжения $u_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$ положительное и потенциал φ_1 в точке 1 возрастает. Постоянное по величине и направлению напряжение обозначают прописной буквой U. Переменное во времени напряжение обозначают строчной буквой u. Переменный ток и переменное напряжение характеризуются мгновенными значениями $i(t)$ и $u(t)$.

Элементарная работа по переносу заряда в электрическом поле $dW = udq$ измеряется в джоулях.

Мгновенная мощность

$$p = p(t) = \frac{dW(t)}{dt} = u(t) \cdot i(t) \quad (1.1)$$

измеряется в ваттах (1Вт=$\frac{1Дж}{1с}$).

Для постоянных токов и напряжений мощность

$$P = U \cdot I. \quad (1.2)$$

1.3. Алфавит электрических цепей

Алфавит - это набор идеальных элементов, из которых составляются расчетные модели реальных электронных устройств. Элементы алфавита характеризуются *функциональными характеристиками*: *вольт-амперными характеристиками* (ВАХ), *вебер-амперными* и *кулон-вольтными* характеристиками. ВАХ – это зависимость напряжения на элементе или участке цепи от тока в нем. Очень многие модели рассчитывают в линейном приближении, используя *теорию линейных электрических цепей* и идеальные линейные элементы.

Перечислим *свойства идеальных линейных элементов*:

1. Параметры идеальных линейных элементов не зависят от режима работы (от напряжения на элементе и тока в нем), времени и внешних воздействий.

2. Вольт-амперные, вебер-амперные и кулон-вольтные характеристики линейных элементов являются линейными.

3. Геометрические размеры идеальных элементов считаются бесконечно малыми.

4. Проводники, соединяющие идеальные элементы, не имеют сопротивления.

Идеальные пассивные линейные элементы

Пассивные элементы являются приемниками электрической энергии.

Сопротивление (резистор) (рис.1.2)

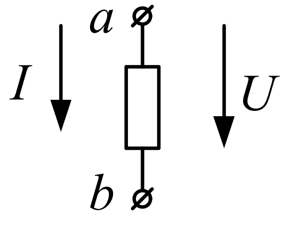


Рис.1.2

Напряжение на резисторе равно произведению тока в нем на величину сопротивления:

$u = iR$, R[Ом] – сопротивление. Величина, обратная сопротивлению, называется проводимостью и измеряется в сименсах:

1/R=G[См] – проводимость.

Ток в резисторе равен произведению напряжения на проводимость: $i = uG$.

Вольтамперная характеристика (ВАХ) резистора

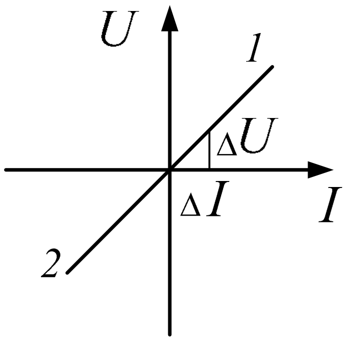


Рис.1.3

Вольтамперной характеристикой называют зависимость напряжения на элементе от тока в нем (рис.1.3). Наклон ВАХ линейного резистора зависит от величины сопротивления: $\dfrac{\Delta U}{\Delta I} = R$. У нелинейного резистора ВАХ нелинейная.

Резистор является диссипативным элементом, рассеивающим энергию в виде тепла. Мощность, выделяемая в резисторе, определяется по закону Ленца:

$$P = U \cdot I = IR \cdot I = I^2 R \text{[Вт]}. \tag{1.3}$$

Индуктивность

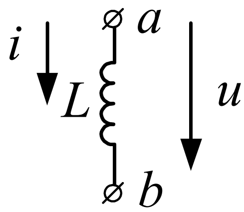


Рис.1.4

Электронный компонент «катушка индуктивности» (или кратко «индуктивность») содержит определенное количество витков проволоки, намотанных на сердечник из ферромагнитного или немагнитного материала.

По закону электромагнитной энергии напряжение на индуктивности (рис.1.4) равно:

$$\boldsymbol{u} = \frac{d\Psi}{dt} = L\frac{di}{dt}, \tag{1.4}$$

где: $\Psi(t) = \Phi(t)N = L \cdot i$ – потокосцепление, измеряется в веберах [Вб];

$\Phi(t)$ - магнитный поток;

N - число витков в катушке индуктивности;

L– индуктивность, измеряется в генри [Гн=Ом/с];

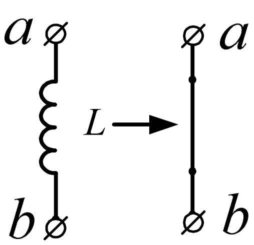


Рис.1.5

Если в индуктивности проходит постоянный ток $i = I = const$ (рис.1.5), то $u_L = 0$ и индуктивность эквивалентна короткому замыканию.

В е б е р - а м п е р н о й   х а р а к т е р и с т и к о й называют зависимость потокосцепления в индуктивности от тока в ней (рис.1.6). В линейной индуктивности эта характеристика линейная и ее наклон равен индуктивности катушки $L = \dfrac{\Delta\Psi}{\Delta i}$.

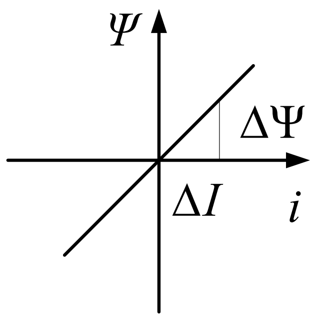


Рис.1.6

Индуктивность накапливает магнитную энергию.

Мгновенная мощность в катушке индуктивности равна: $p(t) = u \cdot i = iL\dfrac{di}{dt}$ [ВА].

Мгновенная магнитная энергия, запасенная в катушке индуктивности:

$$W_{\text{м}}(t) = \int_{-\infty}^{t} uidt = \int_{-\infty}^{t} Li\frac{di}{dt}dt = L\int_{-\infty}^{t} \frac{1}{2}di^2 = \frac{Li^2}{2} > 0 \text{ [Дж]} \quad (1.5)$$

Ёмкость

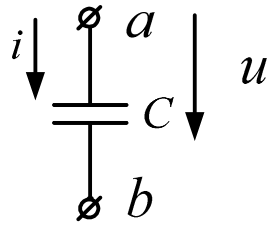


Рис.1.7

Электронный компонент «конденсатор» имеет проводящие обкладки, которые изолированы друг от друга диэлектриком. В линейной электрической цепи конденсатор заменяют идеальной емкостью, которая не имеет потерь и утечки изоляции. Емкость (рис.1.7) накапливает электрический заряд: $q = Cu$ и определяется так: $C = \dfrac{\Delta q}{\Delta u}$ [Ф=с/Ом] – фарад.

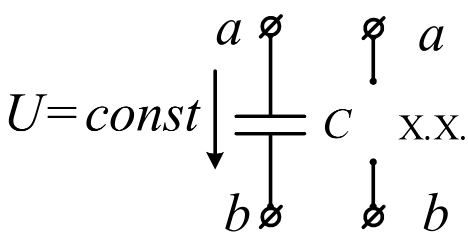


Рис.1.8

Ток в емкости: $i = \dfrac{dq}{dt} = C\dfrac{du}{dt}$. (1.6)

Если напряжение на емкости постоянно $u = const,\ \dfrac{du}{dt} = 0$, то $i_C = 0$ и емкость эквивалентна разрыву цепи («холостой ход»).

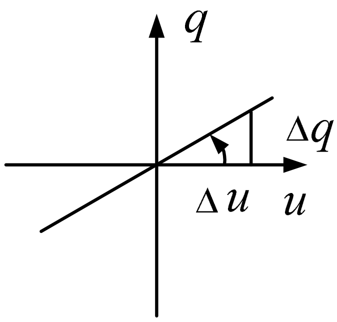


Рис.1.9

К у л о н - в о л ь т н а я   х а р а к т е р и с т и к а это зависимость заряда на емкости от напряжения на ней (рис.1.9). Наклон характеристики равен величине емкости C.

Емкость запасает электрическую энергию:

$$W_э(t) = \int_{-\infty}^{t} uidt = \int_{-\infty}^{t} uC\frac{du}{dt}dt = \frac{Cu^2}{2} > 0. \qquad (1.7)$$

Идеальные независимые активные элементы

Независимые (неуправляемые) активные элементы формируют неизменные по величине напряжения или токи, независящие от токов и напряжений в других участках электрической цепи.

Идеальный источник напряжения (ИН)

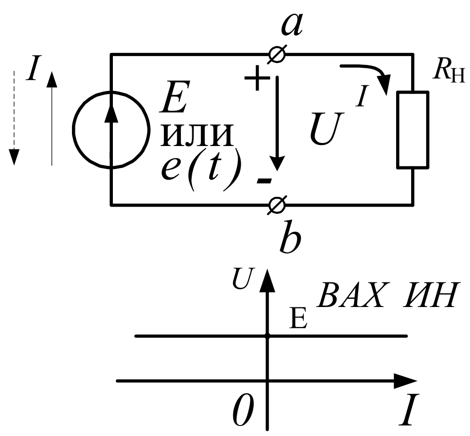


Рис.1.10

Идеальный источник напряжения (рис.1.10) вырабатывает *электродвижущую силу* (ЭДС) E и создает на зажимах ab напряжение U.

В идеальном источнике напряжения внутреннее сопротивление $R_{ин}=0$.

Напряжение U на зажимах идеального ИН постоянно и не зависит от тока во внешней цепи.

Вольт-амперная характеристика ИН изображается прямой линией, параллельной оси тока.

Идеальный источник напряжения называют **фиксатором напряжения**.

Если в источнике напряжения ток I совпадает по направлению с ЭДС E, источник напряжения является генератором энергии и его *мощность* $P_E = E \cdot I > 0$ положительна.

Если в источнике напряжения ток I не совпадает по направлению с ЭДС E, источник напряжения будет потребителем энергии и его *мощность* $P_E = E \cdot (-I) < 0$ отрицательна.

Рассчитаем мощность, которая выделяется в нагрузке схемы рис.1.10:

$$P_н = I^2 R_н = I^2 \frac{E}{I} = EI = P_E. \qquad (1.8)$$

Мы видим, что выполняется *баланс мощности: мощность, выделяемая в нагрузке равна мощности, отдаваемой генератором*.

Пример 1.1. В программе моделирования TINA соберите схему идеального источника напряжения (рис.1.11).

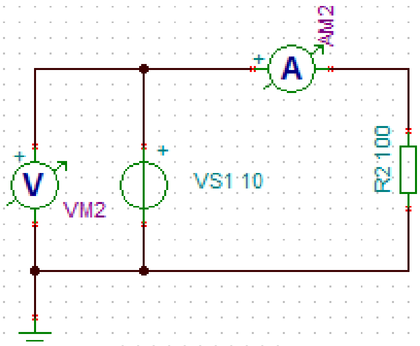


Рис.1.11

Выполнить действия: *Analysis – DC Analysis – Calculate Nodal Voltages* для значений нагрузки R2: 10 Ом, 100 Ом, 1 кОм. Записать показания вольтметра и амперметра.

Идеальный источник тока (ИТ)

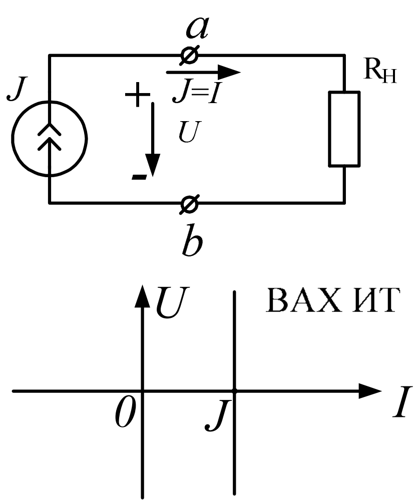


Рис.1.12

Идеальный источник тока (рис.1.12) вырабатывает и отдает во внешнюю цепь ток J.

Внутреннее сопротивление идеального источника тока $R_{ит}=\infty$.

Ток идеального ИТ постоянный и не зависит от величины нагрузки и напряжения на зажимах ИТ.

Вольтамперная характеристика ИТ изображается вертикальной линией, параллельной оси напряжения.

Идеальный источник тока является **фиксатором тока.**

Мощность источника тока $P_J = UJ > 0$, если напряжение на зажимах источника положительно ($U > 0$). При этом источник тока отдает энергию во внешнюю цепь. Если напряжение на зажимах источника отрицательно ($U < 0$), мощность $P_J = UJ < 0$ и источник тока будет приемником энергии.

В цепи с источником тока выполняется баланс мощности:

$$P_J = UJ = (JR_н)J = J^2 R_н = P_н. \tag{1.9}$$

Пример 1.2.Соберите схему (рис. 1.13). Определите показания амперметра и вольтметра для значений нагрузки R1: 1 кОм, 100 Ом, 10 Ом.

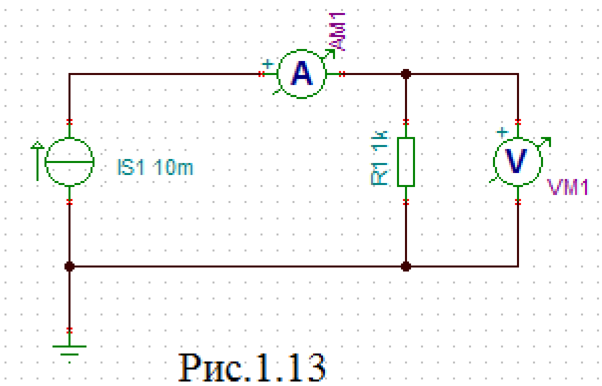


Рис.1.13

Пример 1.3.

Источник постоянного напряжения $E = 12\text{В}$ включен в цепи рис.1.14.

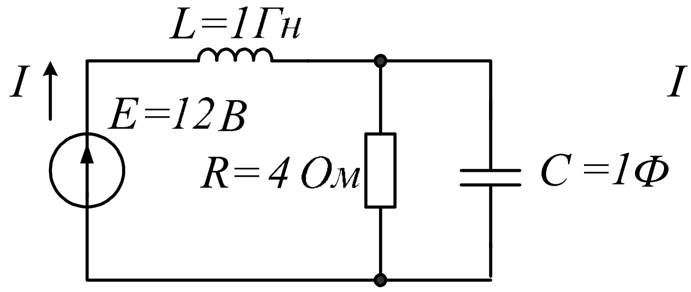


Рис.1.14

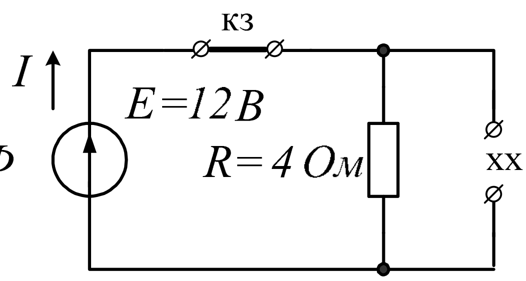


Рис.1.15

Требуется найти:

1. Ток в цепи.
2. Магнитную энергию в индуктивности.
3. Электрическую энергию в емкости.
4. Мощность, выделяемую в резисторе.

Решение

В цепи действует постоянный источник напряжения E. Он создает постоянный ток I. Для постоянного тока индуктивность эквивалентна короткому замыканию (кз). Для постоянного напряжения емкость эквивалентна разрыву (холостому ходу - хх). Переходим к схеме рис.1.15.

Рассчитываем:

ток в цепи: $I = \dfrac{12}{4} = 3A$;

магнитную энергию в индуктивности: $W_м = \dfrac{Li^2}{2} = \dfrac{1 \cdot 9}{2} = 4{,}5\ Дж$;

электрическую энергию в емкости: $W_э = \dfrac{Cu^2}{2} = \dfrac{1 \cdot 144}{2} = 72\ Дж$;

мощность, выделяемую в резисторе: $P = I^2 R = 36\,Вт$.

1.4. Зависимые (управляемые) активные элементы

В расчетных моделях электронных устройств широко применяются зависимые (управляемые) активные элементы, которые формируют напряжения или токи, зависящие от токов и напряжений в других участках электрической цепи. Управляемые активные элементы могут усиливать и преобразовывать слабые управляющие воздействия. В электрических цепях используют четыре типа управляемых активных элементов:

Источник напряжения, управляемый напряжением (ИНУН) (рис.1.16)

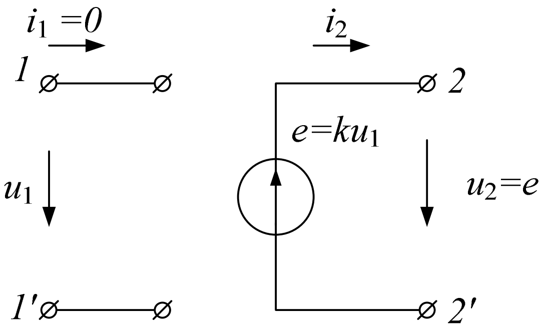


Рис.1.16

В разомкнутой ветви $11'$ действует напряжение u_1, которое управляет в выходной цепи $22'$ источником напряжения $e = ku_1$.

Источник напряжения, управляемый током (ИНУТ) (рис.1.17)

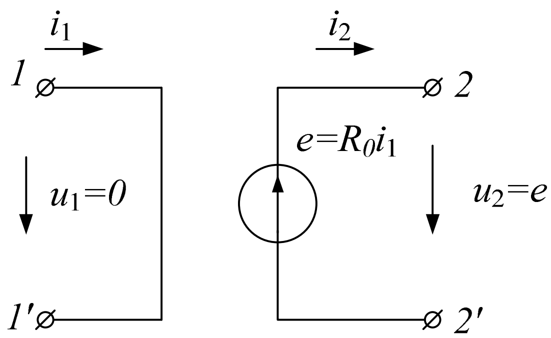


Рис.1.17

В замкнутой цепи $11'$ действует ток i_1, который управляет в выходной цепи $22'$ источником напряжения $e = R_0 i_1$.

Источник тока, управляемый напряжением (ИТУН) (рис.1.18)

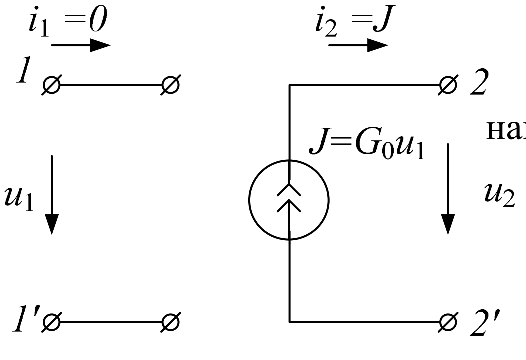


Рис.1.18

В разомкнутой ветви $11'$ действует напряжение u_1, которое управляет в выходной цепи $22'$ источником тока $J = G_0 u_1$.

Источник тока, управляемый током (ИТУТ) (рис.1.19)

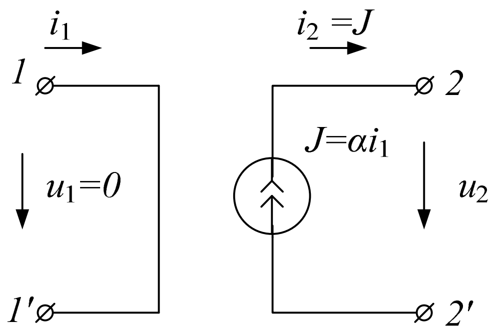


Рис.1.19

В замкнутой цепи $11'$ действует ток i_1, который управляет в выходной цепи $22'$ источником тока $J = \alpha i_1$.

1.5. Модели реальных электронных компонентов

Модели реальных пассивных элементов

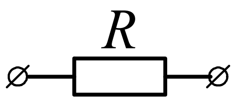


Рис.1.20

Модели реальных элементов зависят от условий работы и точности, с которой надо выполнять расчеты. Так на низкой частоте резистор (рис.1.20) можно достаточно точно описать одним лишь омическим сопротивлением R.

На высокой частоте при монтаже резистора на плате надо учитывать индуктивности проволочных выводов резистора $L_В$ и емкость монтажа резистора относительно платы $C_М$ (рис.1.21).

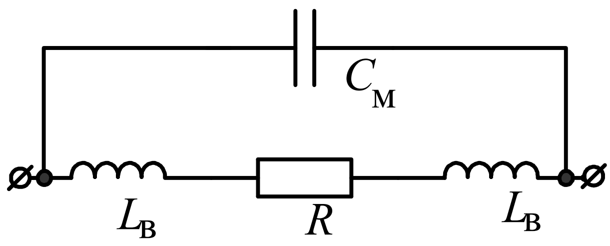


Рис.1.21

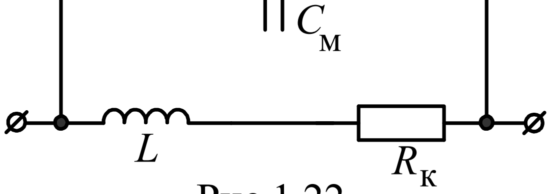


Рис.1.22

Для более точного описания катушки индуктивности учитывают сопротивление потерь $R_К$ и емкость монтажа $C_М$ (рис.1.22).

В

В модели реального конденсатора учитывают проводимость утечки изоляции G и индуктивности выводов $L_В$ (рис.1.23).

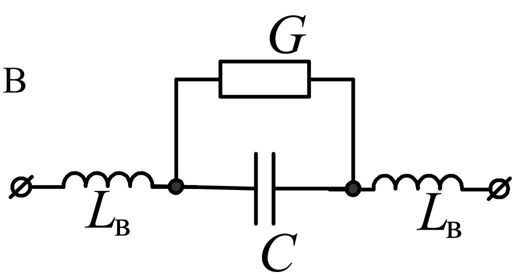


Рис.1.23

Модели реальных источников энергии
Источник напряжения

Реальный источник напряжения имеет внутреннее сопротивление и его приближенно описывают линейной моделью, в которой идеальный источник напряжения E включен последовательно с сопротивлением $R_{\text{ин}}$ (рис.1.24). Напряжение на зажимах источника напряжения $U = E - IR_{\text{ин}}$ В режиме холостого хода $(I = 0)$ напряжение на зажимах $U_{\text{XX}} = E$. В режиме короткого замыкания $(U = 0)$ ток $I_{\text{кз}} = E/R_{\text{ин}}$. По этим двум точкам строим вольт-амперную характеристику источника напряжения (рис.1.25).

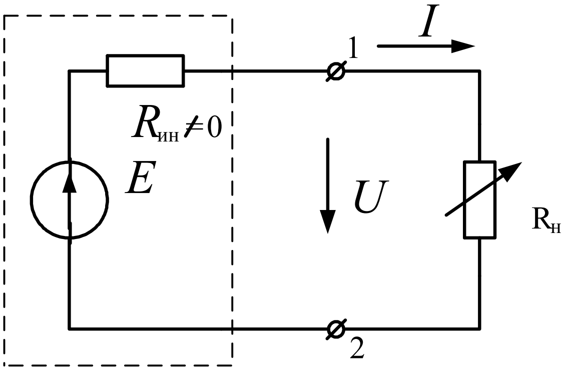


Рис.1.24

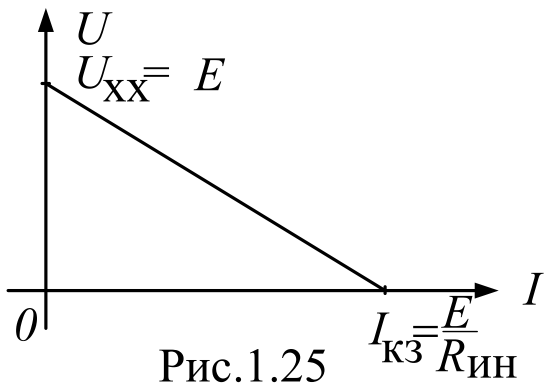


Рис.1.25

Источник тока

Реальный источник тока имеет внутреннее сопротивление $R_{\text{ит}}$ и приближенно описывается линейной моделью, в которой идеальный источник тока J включен параллельно с внутренним сопротивлением $R_{\text{ит}}$ (рис.1.26). Во внутреннем сопротивлении проходит ток $I' = U/R_{\text{ит}}$. Ток в нагрузке $I = J - U/R_{\text{ит}}$. Из последнего уравнения получим вольт-амперную характеристику (рис.1.27):

$$U = JR_{\text{ит}} - IR_{\text{ит}}. \tag{1.10}$$

Сравним графики ВАХ для источника напряжения (рис.1.25) и источника тока (рис.1.27). ВАХ будут эквивалентны, если совпадут отрезки на осях: $E = JR_{\text{ит}}$ и $J = E/R_{\text{ин}}$. Отсюда получаем условия эквивалентности ИН и ИТ:

$$1.\ R_{\text{ин}} = R_{\text{ит}} = R_{\text{вн}};\ 2.\ E = JR_{\text{вн}};\ 3.\ J = E/R_{\text{вн}}. \tag{1.11}$$

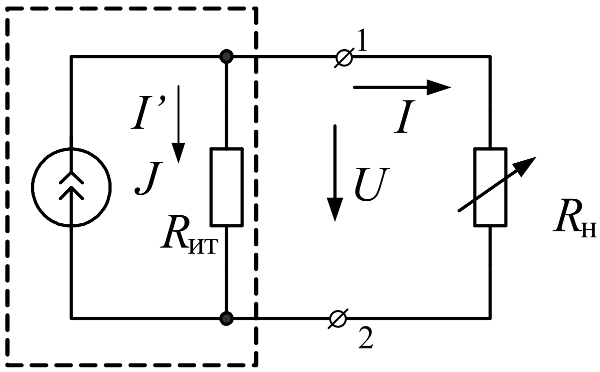


Рис.1.26

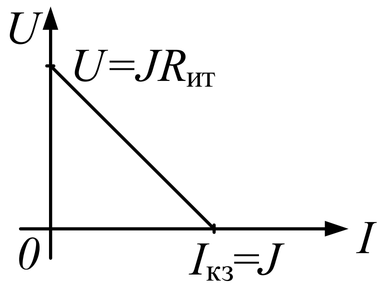


Рис.1.27

Правила эквивалентной замены источника напряжения и источника тока

Любой источник напряжения с последовательно включенным сопротивлением может быть заменен на эквивалентный источник тока с параллельно включенным сопротивлением (рис.1.28).

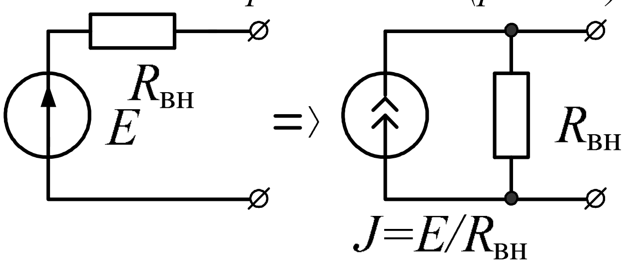


Рис.1.28

Любой источник тока с параллельно включенным сопротивлением может быть заменен на эквивалентный источник напряжения с последовательно включенным сопротивлением (рис.1.29).

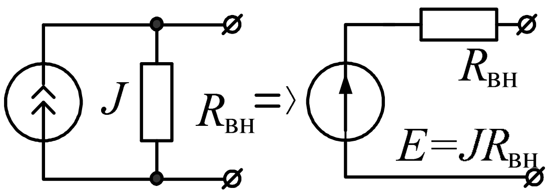


Рис.1.29

Пример 1.4. В схеме (рис.1.30) с источником тока $J = 3$А рассчитать токи I_1 и I_2, выполнив преобразование источника тока в источник напряжения.

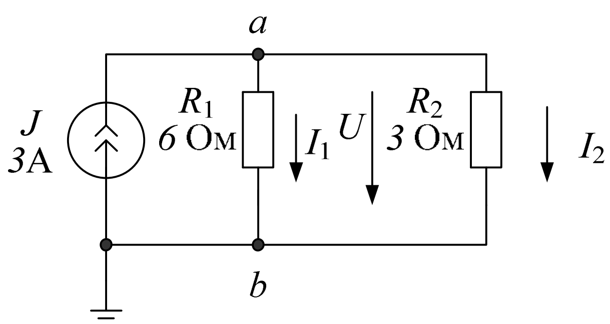


Рис. 1.30

Собрать модели схем с источником тока и источником напряжения (рис.1.31) и убедиться в равенстве тока I_2 в этих схемах

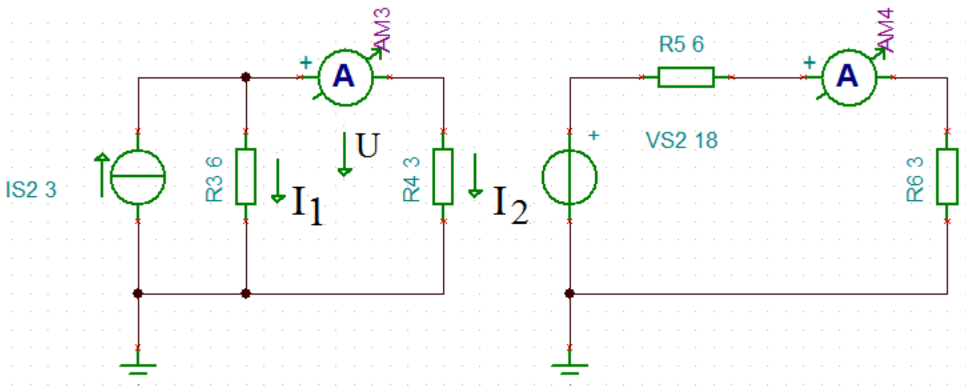


Рис. 1.31

1.6. Нелинейные элементы электрических цепей

В реальных устройствах электронные компоненты могут работать в широком диапазоне изменения токов и напряжений. По этой причине функциональные характеристики электронных компонентов могут становиться нелинейными. Так с увеличение тока резистор нагревается, его сопротивление изменяется и ВАХ становится нелинейной. В катушке индуктивности с магнитным сердечником может наступить насыщение магнитопровода и вебер-амперная характеристика станет нелинейной.

В источниках напряжения при увеличении тока нагрузки увеличивается внутреннее сопротивление и ВАХ становится нелинейной (кривая *абвг* на рис.1.32).

Нелинейную ВАХ можно представить несколькими линейными участками (*а-1* и *2– г* на рис.1.32). Линейные участки ВАХ в электрической цепи моделируются из линейных элементов (рис.1.32а и 1.32б).

Все полупроводниковые электронные компоненты (диоды, стабилитроны, транзисторы) также имеют нелинейные ВАХ. Методы расчета электрических цепей с линейными и нелинейными элементами отличаются. Нелинейные цепи рассчитывают, как правило, графическими и приближенными численными методами.

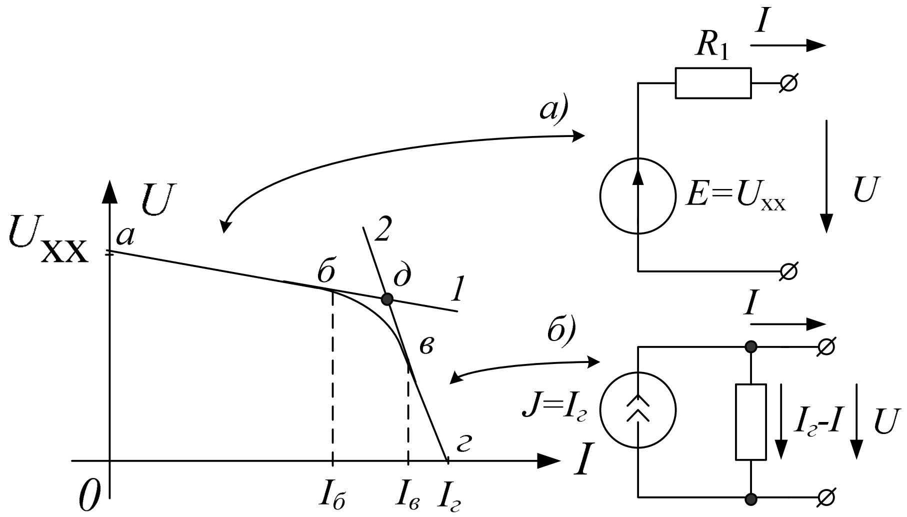


Рис.1.32

1.7. Классификация электрических цепей

Электрические цепи образуются из совокупности соединенных между собой идеальных элементов. Различают следующие классы электрических цепей:

1. Линейные электрические цепи с неизменными во времени пространственно-сосредоточенными параметрами, в которых все элементы имеют линейные функциональные характеристики, размеры элементов цепи считаются бесконечно малыми, проводники не имеют сопротивлений, электрическое и магнитное поля в конденсаторах и катушках сосредоточены в бесконечно малых объемах.

2. Нелинейные цепи, в которых имеется хотя бы один элемент имеет нелинейную функциональную характеристику.

3.Цепи с пространственно - распределёнными параметрами, в которых размеры элементов соизмеримы с длиной электромагнитной волны, действующей в цепи. Это линии передачи энергии, кабели, объёмные резонаторы, волноводы.

4. Цепи с переменными параметрами, содержащие элементы с периодически меняющимися параметрами: *R(t), C(t), L(t)*.

1.8. Основные топологические понятия и соотношения

Топология (геометрия) электрической цепи определяет способ соединения элементов цепи. Графическое изображение электрической цепи с условным обозначением элементов и их соединений называют схемой. Графическими элементами схемы являются: ветвь, узел, контур. Рассмотрим схему цепи (рис.1.33).

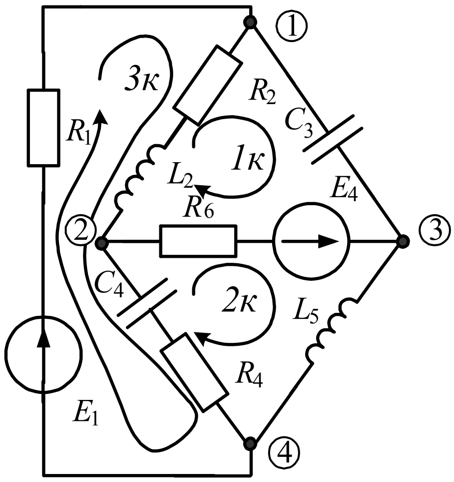


Рис.1.33

Ветвью называют последовательность элементов, через которые в любой момент времени проходит один и тот же ток. В цепи рис.1.33 количество ветвей равно 6 ($n_в$=6).

Узел это место соединения трех и более ветвей. В цепи рис.1.33 число узлов равно 4 ($n_у$=4). Один из узлов можно считать «общим» и заземлить его. Потенциал общего узла будет равен нулю. Тогда число «независимых узлов» $n_{унез} = n_у - 1 = 3$.

По *первому закону Кирхгофа* (1ЗК) составляют уравнения для независимых узлов.

Контур это замкнутый путь, состоящий из последовательности узлов и ветвей, причем каждый узел и ветвь входят в контур только один раз.

Независимые контуры отличаются друг от друга хотя бы одной ветвью.

По второму закону Кирхгофа (2ЗК) составляют уравнения для независимых контуров.

Количество независимых контуров определяют с помощью графа цепи. Графом называют геометрическую фигуру, изображающую структуру цепи. Простейший ненаправленный граф состоит из вершин, соединенных ребрами. Вершины соответствуют узлам цепи, а ребра – ветвям.

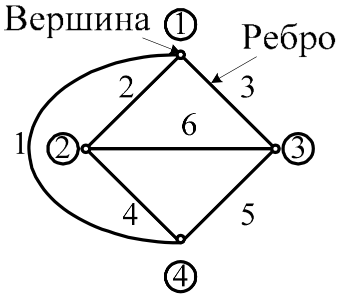


Рис.1.34

На рис.1.34 показан граф цепи рис.1.33. *Деревом графа* называют совокупность ветвей, соединяющих все узлы, но не образующих контуры. Примеры нескольких деревьев графа показаны на рис.1.35. Число ветвей дерева $n_д = n_у - 1$.

Количество деревьев рассчитывают как число сочетаний

$$C_6^3 = \frac{6!}{3!(6-3)!} - 3 = 17.$$

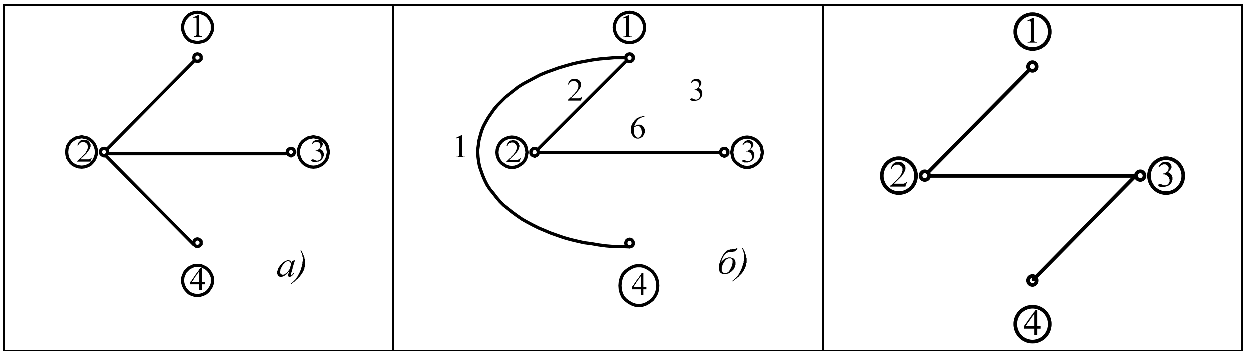


Рис.1.35.

Дополнением дерева называют множество ветвей графа, которые остаются, если удалить ветви дерева. Каждое дерево имеет свое дополнение. Для дерева (рис.1.35а) дополнение показано на рис.1.36.

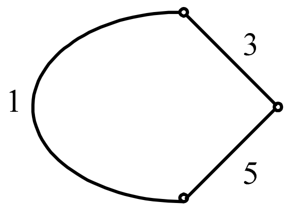


Рис.1.36

Каждая ветвь дополнения дерева называется *ветвью связи*. Число ветвей связи

$$n_{св} = n_в - n_д = n_в - (n_у - 1). \qquad (1.12)$$

Главный контур содержит только одну ветвь связи. Остальные ветви главного контура являются ветвями дерева. Каждый главный контур отличается от других по крайней мере одной ветвью связи. Поэтому *главные контуры являются независимыми.*

Правило дерева

Число независимых контуров равно числу ветвей связи, которые надо добавить в дерево, чтобы получить граф.

$$N_{нез} = n_{св} = n_в - n_д = n_в - (n_у - 1). \qquad (1.13)$$

Дополнение дерева (рис.1.36) имеет три ветви связи. Следовательно, в схеме рис.1.33 три независимых контура.

1.9. Основные законы электрических цепей

Обобщенный закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС

Рассмотрим участок цепи между узлами *ab* с постоянными источниками ЭДС (рис.1.37). Заданы: E_1, E_2, U_{ab}, R_1, R_2. Найти ток I.

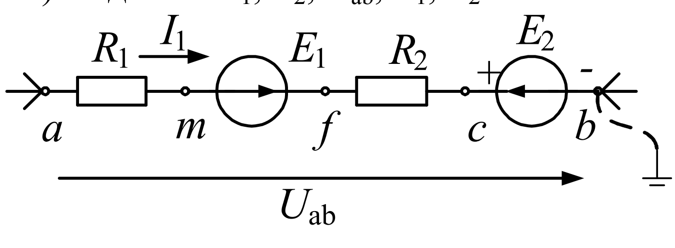


Рис.1.37

Пусть потенциал $\varphi_в = 0$.

Находим:

$\varphi_c = E_2$,

$\varphi_f = E_2 + IR_2$,

$\varphi_m = E_2 + IR_2 - E_1$,

$\varphi_a = E_2 + IR_2 - E + IR_1$,

$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = E_2 + IR_2 - E_1 + IR_1$.

Определим ток:

$$I = \frac{U_{ab} - E_2 + E_1}{R_1 + R_2}. \qquad (1.14)$$

Формулировка обобщенного закона Ома: *Ток на участке цепи равен деленному на суммарное сопротивление ветви напряжению на зажимах ветви, взятому по направлению тока плюс (минус) источники ЭДС. С положительным знаком берут источники ЭДС, совпадающие с положительным направлением тока.*

Пример 1.5.

В цепи рис.1.38 найти ток.

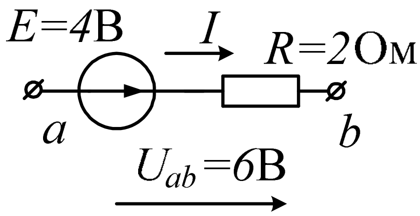


Рис.1.38

Первый закон Кирхгофа

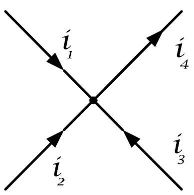


Рис.1.39

Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, в любой момент времени равна нулю.

Со знаком плюс берут токи, выходящие из узла.

$$\sum_{k=1}^{\infty} i_k = 0\,,\ -i_1 - i_2 - i_3 + i_4 = 0. \qquad (1.15)$$

Пример 1.6.

В цепи рис.1.40 $E = 9B, I_2 = 2A, U_{ab} = 3B, R = 4Ом$. Найти показания амперметра.

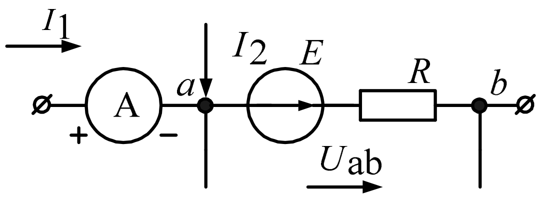


Рис.1.40

Второй закон Кирхгофа

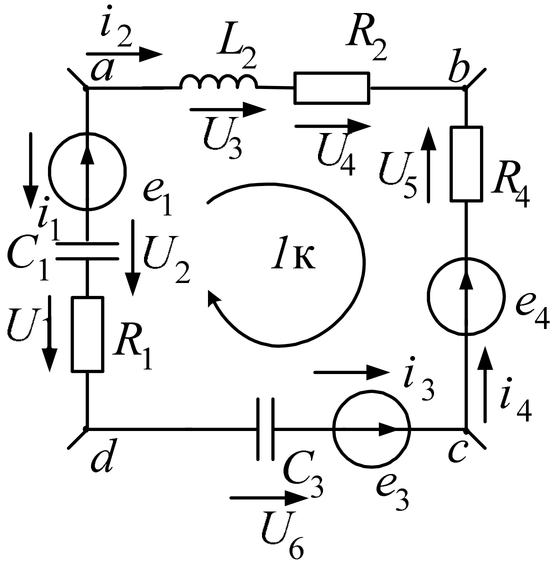


Рис.1.41

Уравнения по второму закону Кирхгофа составляют для независимых контуров цепи. Сначала выбираем направление обхода контура. Затем выбираем условно положительные направления токов в ветвях. Напряжения на пассивных элементах совпадают с направлением токов.

Формулировка второго закона Кирхгофа:

В любой момент времени алгебраическая сумма падений напряжений на пассивных элементах электрического контура равна алгебраической сумме источников напряжений, действующих в контуре. Со знаком плюс берут напряжения, которые совпадают с направлением обхода контура.

Для цепи рис.1.41 запишем уравнения в интегро-дифференциальной форме:

$$L_2\frac{di_2}{dt}+i_2R_2-i_4R_4-\frac{1}{C_3}\int i_3dt-i_1R_1-\frac{1}{C_1}\int i_1dt=e_1-e_3-e_4. \quad (1.16)$$

В левой части уравнения записана сумма падений напряжений на пассивных элементах. В правой части – сумма источников напряжений.

С помощью второго закона Кирхгофа найдем напряжение U_{bd} в цепи рис.1.42:

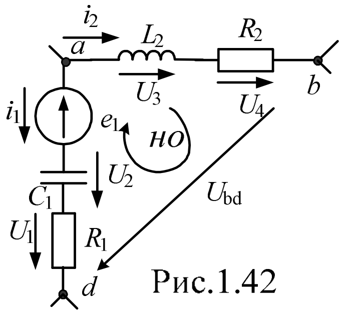


Рис.1.42

$$U_{bd} - i_1R_1 - \frac{1}{C_1}\int i_1 dt + L_2\frac{di_2}{dt} + i_2R_2 = e_1\,;$$

$$U_{bd} = e_1 - i_1R_1 + \frac{1}{C_1}\int i_1 dt - L_2\frac{di_2}{dt} - i_2R_2. \qquad (1.17)$$

1.10. Виды сигналов

В реальных электронных устройствах управления и связи сигналами могут быть любые физические процессы или состояния физических объектов, несущие информацию.

Реальные физические сигналы преобразуются приемными преобразователями в электрические токи и напряжения.

Рассмотрим примеры таких преобразований.

Электромагнитная волна преобразуется антенной приёмника в электрические сигналы *u(t), i(t)*.

Световое изображение преобразуется видеокамерой или сканером в электрические сигналы *u(t), i(t)*.

Тепловое изображение преобразуется приемником инфракрасного излучения (ИК-приемником) в электрические сигналы *u(t), i(t)*.

Звуковой сигнал преобразуется микрофоном в электрические сигналы *u(t), i(t)*.

Поэтому в расчетных моделях радиоэлектронных устройств, представляющих собой электрические цепи, входными сигналами являются электрические токи и напряжения. Реальные электрические сигналы ограничены во времени, могут быть одиночными импульсами, импульсными последовательностями, колебаниями звуковых частот, радиосигналами и т.д. Реальные электрические сигналы можно представить в виде совокупности простейших идеализированных сигналов.

Простейшие идеализированные сигналы

1.Постоянное напряжение (рис.1.43) и ток (рис.1.44)

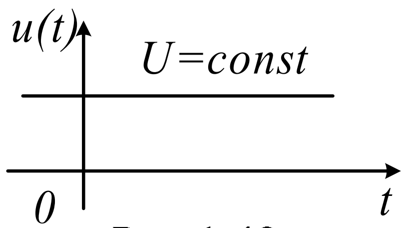


Рис.1.43

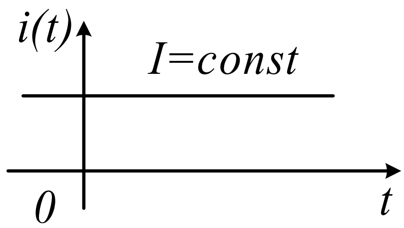


Рис.1.44

2. Гармонические напряжение и ток

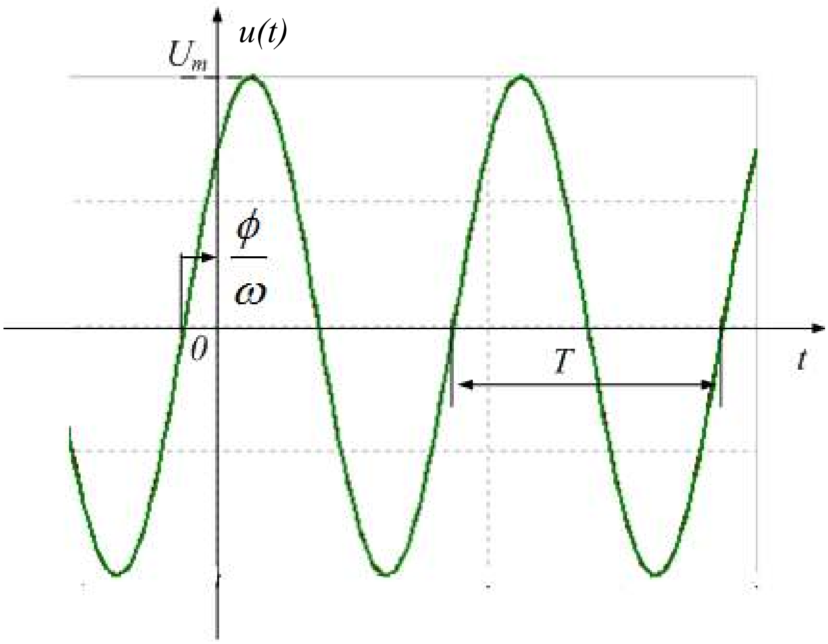


Рис.1.45

Гармонический синусоидальный сигнал записывают в виде:

$$u(t) = U_m \sin(\omega_1 t + \phi), \tag{1.18}$$

где U_m - амплитуда гармонических колебаний, ω_1 - угловая частота,

ϕ - начальная фаза (отсчитывается от ближайшего нуля с положительной производной к началу координат),

$(\omega_1 t + \phi)$ - текущая фаза,

$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ - период колебаний,

$f = \dfrac{1}{T}$ - частота колебаний.

3. Периодические негармонические сигналы

Для периодических негармонических сигналов выполняется условие:

$$u(t + T) = u(t). \tag{1.19}$$

Такие сигналы заданы на всей оси времени: $-\infty < t < +\infty$. На рис.1.46 показаны примеры негармонических периодических сигналов.

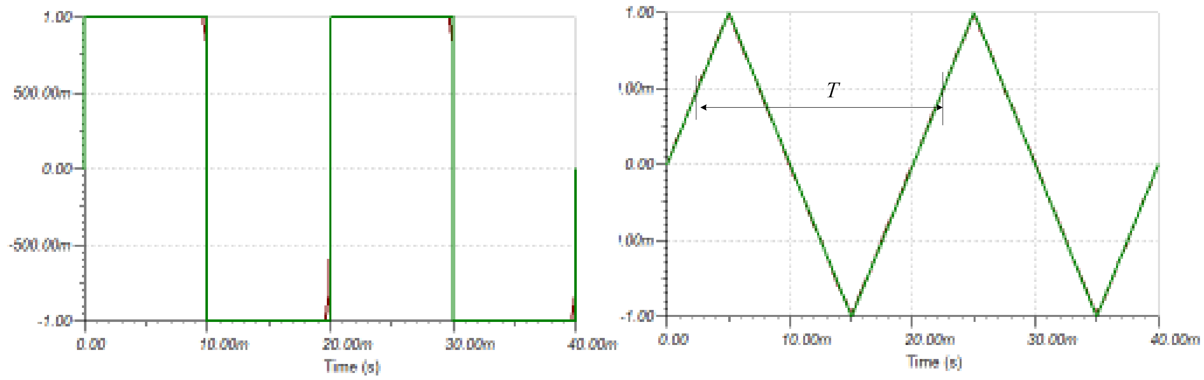


Рис.1.46

Периодические сигналы, удовлетворяющие условиям Дирихле, можно разложить в гармонический ряд Фурье и представить в виде постоянной составляющей и множества гармоник:

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t), \tag{1.20}$$

где: $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ - частота первой гармоники;

$\dfrac{a_0}{2} = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} u(t)dt$ - постоянная составляющая;

$a_n = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} u(t)\cos n\omega t dt$ - амплитуды косинусных гармоник;

$b_n = \dfrac{2}{T} \displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} u(t)\sin n\omega t dt$ - амплитуды синусных гармоник.

4. Непериодические сигналы

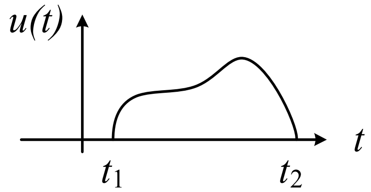


Рис.1.47

Непериодические сигналы можно представить множеством гармонических составляющих с бесконечно малыми амплитудами и бесконечно близкими частотами. Такое множество называют спектральной плотностью сигнала, а расчеты проводят спектральным методом с использованием прямого и обратного преобразования Фурье.

Таким образом, *моделями реальных сигналов служат идеализированные сигналы, состоящие из постоянных и гармонических токов и напряжений.*

1.11. Принцип суперпозиции в линейной цепи

Процессы в линейной электрической цепи описываются линейными интегро-дифференциальными или дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. В таких цепях действует *принцип суперпозиции: каждая составляющая тока или напряжения действует в цепи независимо от других и результирующую реакцию можно находить как сумму реакций на каждое воздействие в отдельности.*

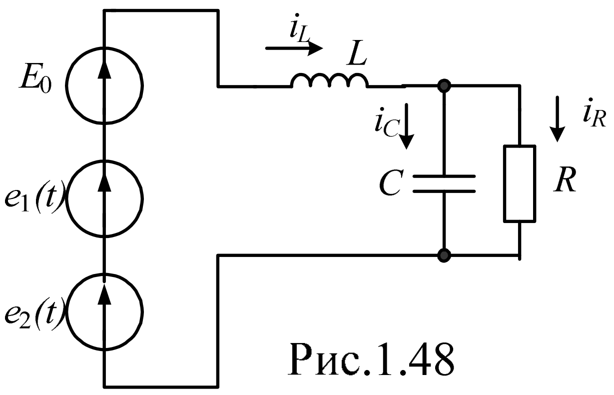


Рис.1.48

В цепи рис. 1.48 действуют источник постоянного напряжения E_0 и два источника гармонических сигналов $e_1(t)$ и $e_2(t)$. Расчет надо проводить для каждого сигнала в отдельности при отсутствии остальных и результаты сложить. Так для расчета тока в резисторе надо выполнить расчет для постоянного напряжения, для гармонического источника $e_1(t)$, для гармонического источника $e_2(t)$ и сложить результаты. В итоге получим:

$$i_R = I_{(E)} + i_{(e_1)}(t) + i_{(e_2)}(t). \qquad (1.21)$$

Пример 1.7

В цепи рис.1.49 задано: J=1А, E=12 В, R_1=R_2=4 Ом, R_3=8 Ом. Найти U_{ab}.

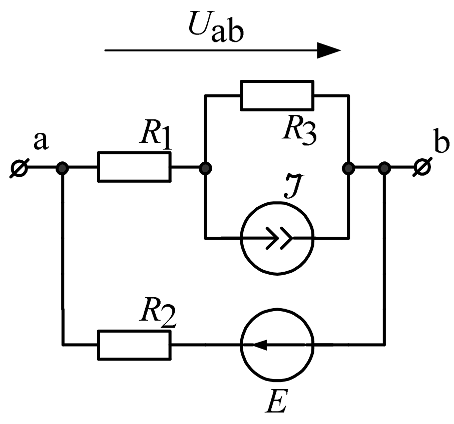


Рис.1.49

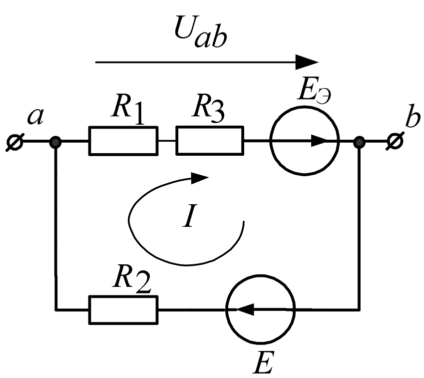


Рис.1.50

Р е ш е н и е

1. Преобразуем источник тока с параллельно включенным сопротивлением R_3 в эквивалентный источник напряжения $E_Э=JR_3=8$В с последовательным сопротивлением R_3. Получим одноконтурную цепь рис.1.50.

В этой цепи:

$$U_{ab}=-E_Э+I\cdot(R_1+R_3)=-E_Э+\frac{E+E_Э}{R_1+R_2+R_3}\cdot(R_1+R_3)=2\,B$$

Пример 1.8

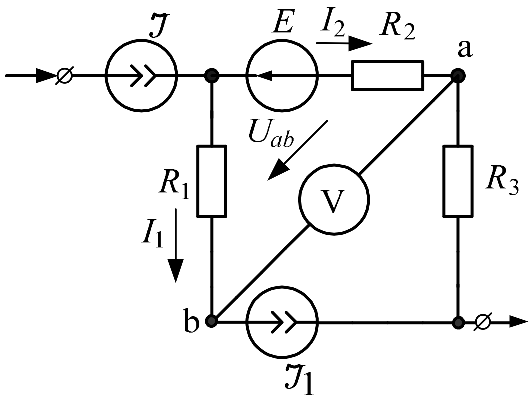


Рис.1.51

В цепи рис.1.52 J=2А, J_1=1А, E=10В, R_1=2 Ом, R_2=4 Ом, R_3= 2 Ом. Найти показания вольтметра.

Р е ш е н и е

Внутреннее сопротивление идеального вольтметра бесконечно велико. Поэтому ток через вольтметр не проходит и $I_1=J_1$=1А, $I_2=J-I_1$=1А. Считаем потенциал узла b равным нулю. Обходим ветви 1 и 2 в направлении узла a и находим:

$$U_{ab}=I_1R_1-E-I_2R_2=-12B.$$

Пример 1.9

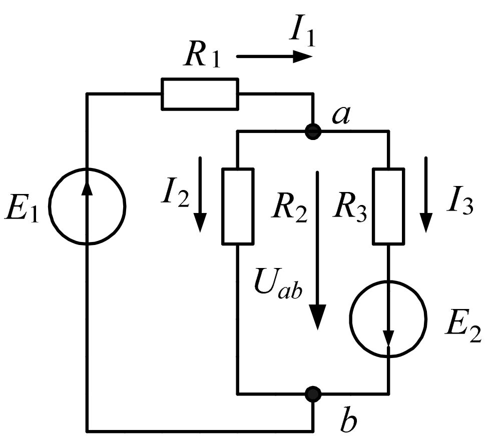


Рис.1.52

В цепи рис.1.52 задано: R_1=5 Ом, R_2=3 Ом, R_3=4Ом, I_3=1А, E_2=1В. Найти E_1.

Р е ш е н и е

Так как заданы ток I_3 и E_2, можно найти $U_{ab}=-E_2+I_3R_3$.

Затем находим:

$$I_2=\frac{U_{ab}}{R_2}=1A,$$

$$I_1 = I_2 + I_3 = 2A\,,$$
$$E_1 = U_{ab} + I_1 R_1 = 13B.$$

Пример 1.10

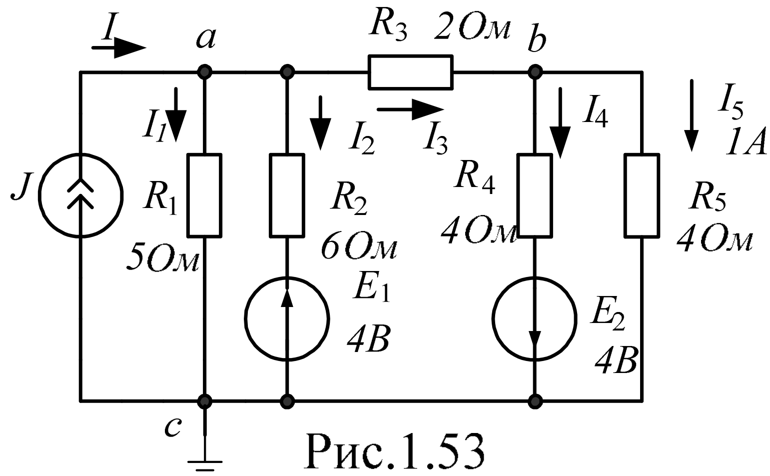


Рис.1.53

В резисторе R_5 цепи рис.1.53 проходит ток $I_5 = 1A$. Известные параметры цепи указаны на схеме. Найти неизвестный ток источника тока J.

Р е ш е н и е

1. Начинаем расчет с дальней ветви. Находим:

$$U_{bc} = I_5 R_5 = 4B,\ \ I_4 = \frac{U_{bc} + E_2}{R_4} = \frac{4+4}{4} = 2A\ ,\ \ I_3 = I_4 + I_5 = 3A\,,$$

$$U_{ac} = U_{bc} + I_3 R_3 = 4 + 3 \cdot 2 = 10B, \qquad I_2 = \frac{U_{ac} - E_1}{R_2} = \frac{10-4}{6} = 1A,$$

$I_1 = \dfrac{U_{ac}}{R_1} = 2A$. Получаем ответ: $J = I_1 + I_2 + I_3 = 6A$.

Пример 1.11

В цепи рис.1.54 действует один источник напряжения. Требуется найти токи во всех ветвях.

Р е ш е н и е

Так как в схеме действует только один источник напряжения расчет можно сделать *методом подобия*.

Задаем в самой удаленной ветви произвольно ток $I_6 = 1A$. Находим:

$$U_a = 4B,\ I_5 = 2A,\ I_4 = 3A,\ U_b = 10B,$$

$$I_3 = 5A,\ I_2 = 2A,\ I_1 = 10A,\ E = 20B.$$

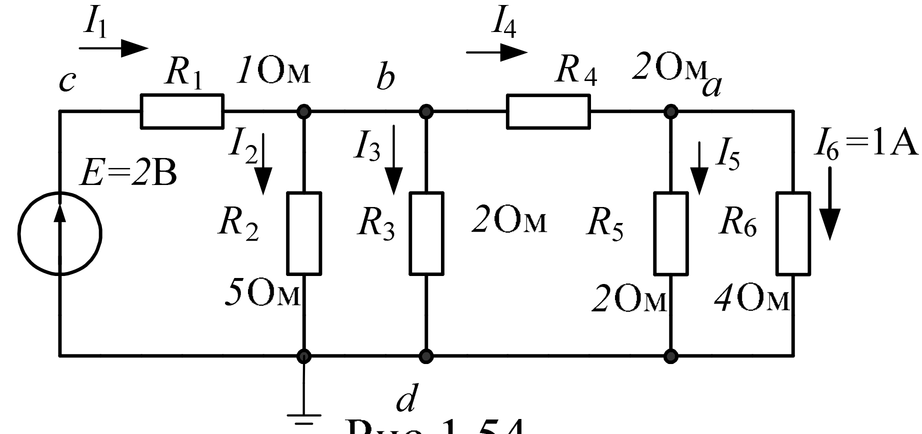


Рис.1.54

Так как в заданной схеме E=2 В искомые токи будут в 10 раз меньше рассчитанных (коэффициент подобия k=0,1).

Глава 2. ОСНОВНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ЦЕПЕЙ

Алгебраические методы расчета цепей основываются на применении законов Кирхгофа и Ома и сводятся к составлению систем уравнений для токов и напряжений в цепи, решению этих уравнений и определению искомых токов и напряжений.

2.1. Составление уравнений на основании законов Кирхгофа

Схема электрической цепи показана на рис.2.1. Составление уравнений по законам Кирхгофа проводим в такой последовательности.

Выбираем произвольно условно положительные направления токов. Строим граф схемы в виде дерева и ветвей связи (рис.2.2). Граф имеет 3 узла ($n_y = 4$) и 6 ветвей ($n_в = 6$).

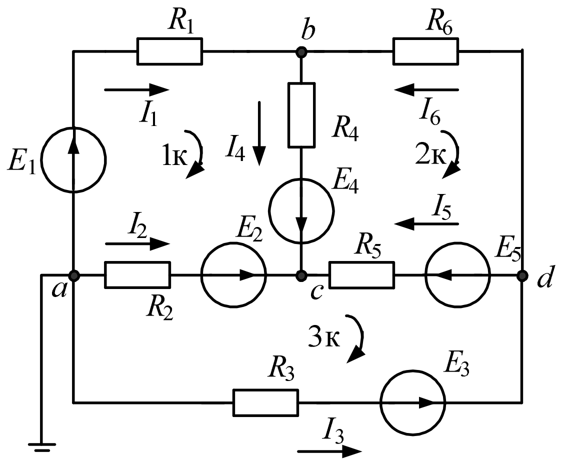


Рис.2.1

Число неизвестных токов в ветвях $T = 6$. Всего для расчета токов требуется 6 уравнений.

Число независимых узлов находим по формуле:

$$n_{унез} = n_y - 1 = 3. \quad (2.1)$$

Значит, по первому закону Кирхгофа можно составить 3 уравнения для токов в узлах.

Еще три уравнения будем составлять по второму закону Кирхгофа для независимых контуров. Количество независимых контуров определяем по правилу дерева:

$$N_{\text{нез}} = n_{\text{св}} = n_{\text{в}} - n_{\text{д}} = n_{\text{в}} - (n_{\text{у}} - 1) = 3. \quad (2.2)$$

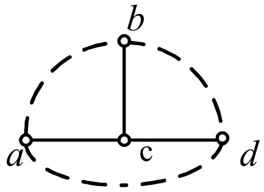


Рис.2.2

По первому закону Кирхгофа составляем 3 уравнения для токов в узлах:

$$\begin{aligned} &\textit{Узел}\, b: I_4 - I_1 - I_6 = 0; \\ &\textit{Узел}\, c: -I_2 - I_4 - I_5 = 0; \\ &\textit{Узел}\, d: I_5 + I_6 - I_3 = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

По второму закону Кирхгофа составляем 3 уравнения для напряжений в независимых контурах:

$$\begin{aligned} &1\,\text{контур}: I_1R_1 + I_4R_4 - I_2R_2 = E_1 + E_4 - E_2; \\ &2\,\text{контур}: -I_6R_6 + I_5R_5 - I_4R_4 = E_5 - E_4; \\ &3\,\text{контур}: I_2R_2 - I_5R_5 - I_3R_3 = E_2 - E_5 - E_3 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Общее число уравнений:

$$n_у - 1 + n_в - (n_у - 1) = n_в = T. \quad (2.5)$$

Если в цепи есть ветви с источниками тока и количество таких ветвей $n_{\text{ИТ}}$, то число неизвестных токов $T = n_в - n_{\text{ИТ}}$.

Примечание. По второму закону Кирхгофа следует составлять уравнения для контуров, не содержащих источников тока или преобразовывать их в источники напряжения.

Недостатком расчета цепи по законам Кирхгофа является то, что число уравнений равно числу неизвестных токов. Система уравнений может получиться сложной.

2.2. Метод контурных токов (МКТ)

Метод контурных токов позволяет сократить число уравнений до количества независимых контуров. В исходной схеме рис.2.3 число независимых контуров $N_{нез} = 4$ можно сократить до трех, выполнив преобразование источника тока в источник напряжения (рис.2.4). В результате мы перейдем к расчетной схеме рис.2.5.

После преобразования в резисторе R_2 проходит ток I_2'. Истинный ток I_2 в исходной схеме связан с током I_2' соотношением (см. рис.2.4):

$$I_2 = -J + I_2'. \quad (2.6)$$

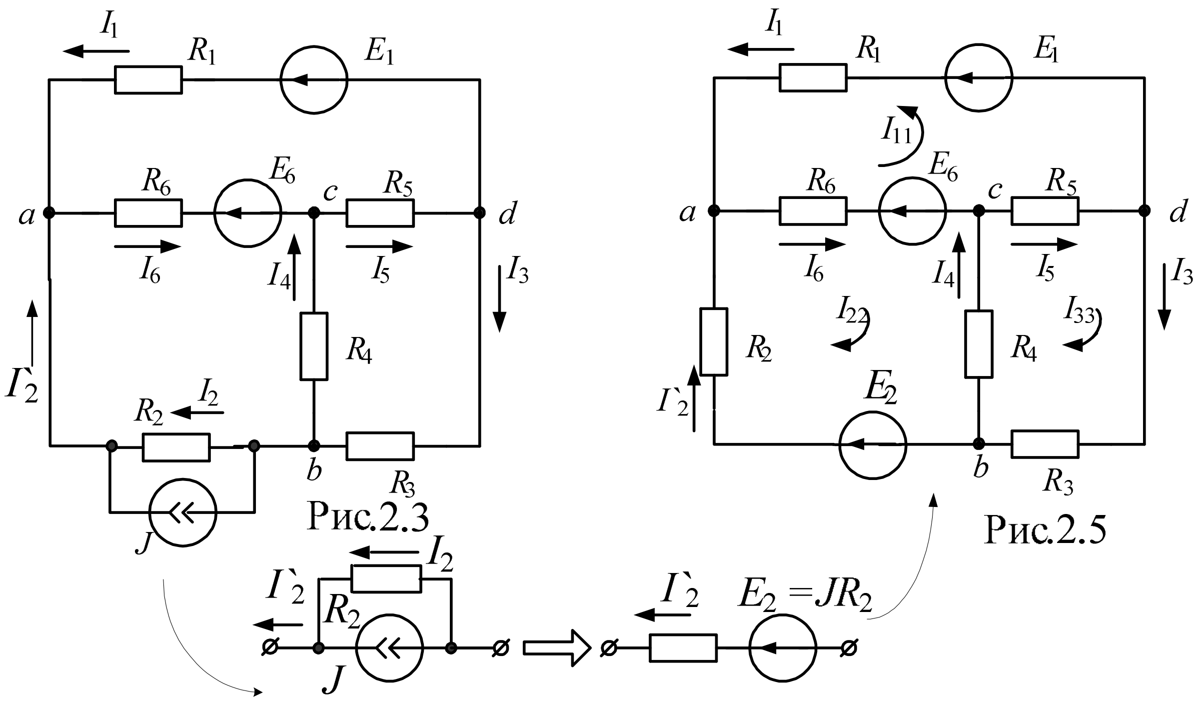


Рис.2.3

Рис.2.5

Рис.2.4

Для получения независимых контуров выбираем дерево графа и добавляем ветви связи (рис.2.6). Считаем, что в каждом контуре схемы рис.2.5 существуют расчетные контурные токи I_{11}, I_{22}, I_{33}, совпадающие с токами в ветвях связи графа. Составим таблицу, которая выражает токи в ветвях через контурные токи.

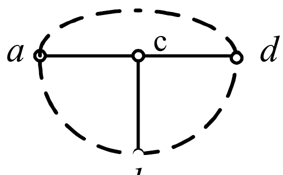


Рис.2.6

Таблица токов

$$
\begin{aligned}
I_1 &= I_{11} \qquad & I_4 &= I_{33} - I_{22} \\
I_2' &= I_{22} \qquad & I_5 &= I_{11} + I_{33} \\
I_3 &= I_{33} \qquad & I_6 &= I_{11} + I_{22}
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Составим для независимых контуров уравнения по второму закону Кирхгофа. Направления обхода контуров совпадают с направлением контурных токов.

$$
\begin{aligned}
&1 \text{ контур: } I_{11}R_1 + \left(I_{11} + I_{22}\right)R_6 + \left(I_{11} + I_{33}\right)R_5 = E_1 - E_6 \\
&2 \text{ контур: } I_{22}R_2 + (I_{11} + I_{22})R_6 + (I_{22} - I_{33})R_4 = E_2 - E_6 \\
&3 \text{ контур: } (I_{11} + I_{33})R_5 + I_{33}R_3 + (I_{33} - I_{22})R_4 = 0
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Приведем подобные члены с токами I_{11}, I_{22}, I_{33}:

$$\begin{cases} (R_1+R_5+R_6)I_{11} \;+\; R_6I_{22} \;+\; I_{33}R_5=E_1 - E_6 \\ R_6I_{11} \;+\; (R_2+R_4+R_6)I_{22} \;-\; R_4I_{33}=E_2 - E_6 \\ R_5I_{11} \;-\; R_4I_{22} \;+\; (R_3+R_4+R_5)I_{33}=0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Полученную систему уравнений для контурных токов запишем в канонической форме.

Каноническая форма системы уравнений по МКТ

$$\begin{cases} R_{11}I_{11}+R_{12}I_{22}+R_{13}I_{33}=E_{11} \\ R_{21}I_{11}+R_{22}I_{22}+R_{23}I_{33}=E_{22} \\ R_{31}I_{11}+R_{32}I_{22}+R_{33}I_{33}=E_{33} \end{cases}. \quad (2.10)$$

В канонических уравнениях:

$R_{11}=R_1+R_5+R_6$
$R_{22}=R_2+R_4+R_6$
$R_{33}=R_3+R_4+R_5$

-*собственные сопротивления* каждого контура;

$R_{12}=R_6$
$R_{13}=R_5$
$R_{21}=R_6=R_{12}$
$R_{23}=-R_4=R_{32}$
$R_{31}=R_{13}=R_5$

- *общие сопротивления смежных контуров*, взятые со знаком «+», если контурные токи в них совпадают, и со знаком «-», если токи противоположны.

Уравнения симметричны относительно главной диагонали: $R_{12}=R_{21},\ R_{13}=R_{31}, R_{23}=R_{32}$.

$E_{11}=R_1-R_6$
$E_{22}=E_2-E_6$
$E_{33}=0$

- *контурные ЭДС*, равные алгебраической сумме всех ЭДС данного контура. Со знаком «+» берут ЭДС, которые совпадают с направлением контурного тока, со знаком «-» берут ЭДС с направлением, противоположным контурному току.

Решение уравнений по МКТ можно выполнить при помощи определителей по правилу Крамера:

В формулах (2.11): Δ - определитель матрицы контурных сопротивлений;

$\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ - определители, полученные заменой соответствующего столбца контурных сопротивлений на столбец контурных ЭДС.

$$I_{11}=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix}E_{11} & R_{12} & R_{13}\\ E_{22} & R_{22} & R_{23}\\ E_{33} & R_{32} & R_{33}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}R_{11} & R_{12} & R_{13}\\ R_{21} & R_{22} & R_{23}\\ R_{31} & R_{32} & R_{33}\end{vmatrix}},\quad I_{22}=\frac{\Delta_2}{\Delta},\quad I_{33}=\frac{\Delta_3}{\Delta}. \qquad (2.11)$$

Вычислив контурные токи, по *таблице токов* находим токи в ветвях схемы рис.2.5.

Затем возвращаемся к исходной схеме рис.2.3 и находим ток $I_2=-J+I_2'$.

Раскрывая определитель $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, получим общее решение уравнений контурных токов:

$$I_{11}=E_{11}\frac{\Delta_{11}}{\Delta}+E_{22}\frac{\Delta_{21}}{\Delta}+E_{33}\frac{\Delta_{31}}{\Delta}, \qquad (2.12)$$

где Δ_{ik} - алгебраическое дополнение к элементу R_{ik} определителя, получаемое вычёркиванием *i* строки и *k* столбца, и помноженного на элемент $(-1)^{i+k}$.

В общем случае:

$$I_{kk}=\frac{\Delta_{1k}}{\Delta}E_{11}+\ldots+\frac{\Delta_{in}}{\Delta}E_{ii}+\ldots+\frac{\Delta_{nk}}{\Delta}E_{nn}. \qquad (2.13)$$

Контурный ток представляется как сумма составляющих, вызванных действием каждой контурной ЭДС в отдельности.

Матричная форма уравнений МКТ

Запишем уравнения для контурных токов в матричной форме:

$$\begin{bmatrix}R_{11} & R_{12} & R_{13}\\ R_{21} & R_{22} & R_{23}\\ R_{31} & R_{32} & R_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_{11}\\ I_{22}\\ I_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_{11}\\ E_{22}\\ E_{33}\end{bmatrix}. \qquad (2.14)$$

Можно использовать более компактную запись:

$$\left[R^{(k)}\right]\cdot[I]=[E]\ . \qquad (2.15)$$

Искомый столбец контурных токов находим, умножая обратную матрицу контурных сопротивлений на столбец контурных ЭДС:

$$\left[I\right]=\left[R^{(k)}\right]^{-1}\left[E\right] \qquad (2.16)$$

Пример 2.1.

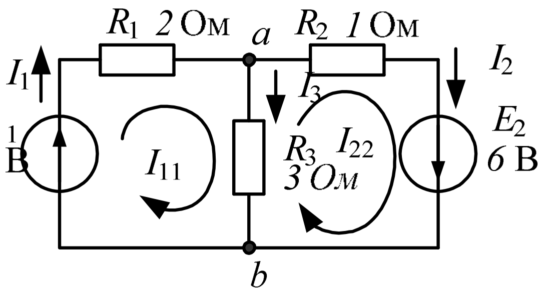


Рис.2.7

Дано: E_1=1В, E_2=6В, R_1=2Ом, R_2=1Ом, R_3=3 Ом.

Найти токи в ветвях методом контурных токов.

Составляем уравнения по МКТ:

$$\begin{matrix}(R_1+R_3)I_{11}-R_3I_{22}=E_1\\ -R_3I_{11}+(R_2+R_3)I_{22}=E_2\end{matrix}; \qquad \begin{matrix}5I_{11}-3I_{22}=1\\ -3I_{11}+4I_{22}=6\end{matrix}.$$

Решаем систему по правилу Крамера и находим контурные токи:

$$I_{11}=\frac{\begin{vmatrix}1 & -3\\ 6 & 4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & -3\\ -3 & 4\end{vmatrix}}=\frac{4+18}{20-9}=\frac{22}{11}=2\,\text{А}; \quad I_{22}=\frac{\begin{vmatrix}5 & 1\\ -3 & 6\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5 & -3\\ -3 & 4\end{vmatrix}}=\frac{30+3}{20-9}=\frac{33}{11}=3\,\text{А}$$

Находим токи в ветвях:

$$I_1=I_{11}=2\,\text{А};\ I_2=I_{22}=3\,\text{А};\ I_3=I_{11}-I_{22}=-1\,\text{А}.$$

2.3. Метод узловых напряжений (МУН)

Метод узловых напряжений основан на применении первого закона Кирхгофа и закона Ома и сводится к нахождению напряжений в узлах схемы и последующему нахождения токов по закону Ома. МУН целесообразно применять тогда, когда число независимых узлов меньше числа независимых контуров.

В схеме рис.2.8 имеем:

число узлов $n_{\text{у}}=3$;

число независимых узлов $n_{\text{унез}}=3-1=2$;

число ветвей $n_{\text{в}}=8$;

число источников тока $n_{\text{ит}}=1$;

число неизвестных токов $T=n_{\text{в}}-n_{\text{ит}}=7$.

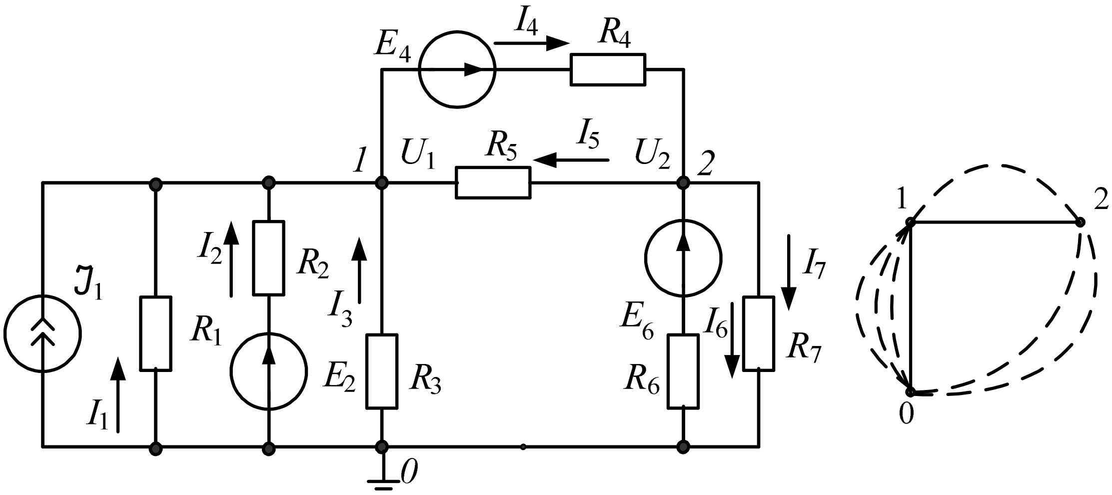


Рис.2.8

По законам Кирхгофа надо составить систему из 7 уравнений.

Число независимых контуров после преобразования источника тока в источник напряжения $N_{нез} = n_{св} - n_{ит} = 6 - 1 = 5$. Следовательно, по методу контурных токов надо составить систему из 5 уравнений.

В то же время имеем два независимых узла. Если будут известны узловые напряжений U_1 и U_2 относительно общего узла, то по закону Ома можно будет рассчитать токи всех ветвей. Примем напряжение общего узла $U_0 = 0$ и выразим токи в ветвях через напряжения и проводимости. Получим *таблицу токов:*

$$
\begin{aligned}
&I_1 = -U_1G_1 = -U_1G_1 \\
&I_2 = (-U_1 + E_2)G_2 = (E_2 - U_1)G_2 \\
&I_3 = -U_1G_3 \\
&I_4 = (U_1 - U_2 + E_4)G_4 \\
&I_5 = (U_2 - U_1)G_5 \\
&I_6 = (U_2 - E_6)G_6 \\
&I_7 = U_2G_7
\end{aligned}
\tag{2.17}
$$

Запишем уравнения для токов в узлах по первому закону Кирхгофа:

Узел 1: $-J_1 - I_1 - I_2 - I_3 + I_4 - I_5 = 0;$ (2.18)

Узел 2: $-I_4 + I_5 + I_6 + I_7 = 0.$ (2.19)

Выразим токи с учетом таблицы токов:

$$\begin{cases} -J_1+U_1G_1+U_1G_2-E_2G_2+U_1G_3+U_1G_5-U_2G_5+U_1G_4-U_2G_4+E_4G_4=0 \\ U_2G_4-U_1G_4-E_4G_4+U_2G_5-U_1G_5+U_2G_6-E_6G_6+U_2G_7=0 \end{cases}$$

После преобразования получим систему уравнений для расчета напряжений в узлах по методу узловых напряжений:

$$\begin{cases} (G_1+G_2+G_3+G_4+G_5)U_1-(G_5+G_4)U_2=J_{11}=J+E_2G_2-E_4G_4 \\ -(G_4+G_5)U_1+(G_4+G_5+G_6+G_7)U_2=J_{22}=E_4G_4+E_6G_6 \end{cases} \quad (2.20)$$

Уравнения узловых напряжений можно сразу записывать в канонической форме.

Каноническая форма уравнений МУН

$$\begin{cases} G_{11}U_1+G_{12}U_2=J_{11} \\ G_{21}U_1+G_{22}U_2=J_{22} \end{cases}, \quad (2.21)$$

где: $G_{11}=G_1+G_2+G_3+G_4+G_5$; $G_{22}=G_4+G_5+G_6+G_7$ - сумма проводимости ветвей присоединенных к узлам 1 и 2;

$G_{12}=G_{21}=-(G_4+G_5)$ - взятая со знаком «-» сумма проводимости ветвей, соединяющих узлы 1 и 2;

$J_{11}=J+E_2G_2-E_4G_4$, $J_{22}=E_4G_4+E_6G_6$ - узловые токи, равные алгебраической сумме источников тока и умноженных на проводимости ветвей источников напряжения, подключенных к узлам 1 и 2. Причём положительные знаки берут у источников, направленных к узлам.

МУН широко применяют для расчёта электрических схем. После расчёта напряжения в узлах, токи находят по закону Ома по Таблице токов.

Матричная форма уравнений МУН

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Решение уравнений МУН: $\left[U^{(y)}\right]=\left[G^{y}\right]^{-1}\cdot[J]$. (2.23)

Пример 2.2.

В цепи рис.2.9 найти токи методом узловых напряжений.

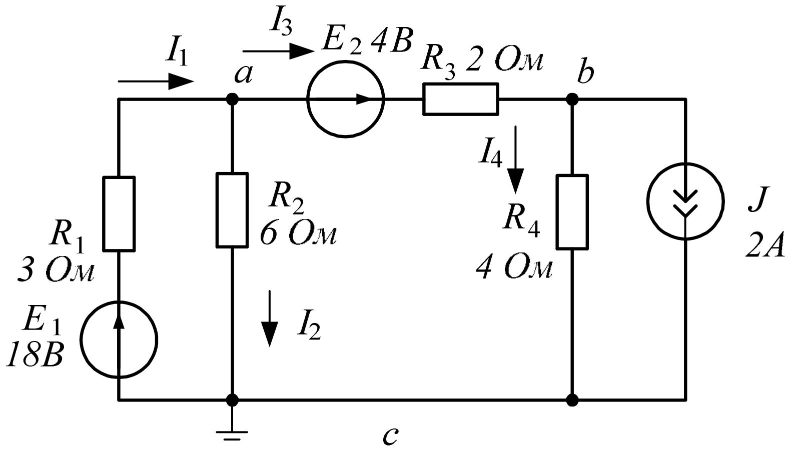


Рис.2.9

Составляем уравнения МУН в канонической форме:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)U_a-\frac{1}{2}U_b=\frac{18}{3}-\frac{4}{2}=4 \\ -\frac{1}{2}U_a+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)U_b=\frac{4}{2}-2=0 \end{cases}.$$

Преобразуем и решаем уравнения:

$$\begin{cases} U_a-\frac{1}{2}U_b=4 \\ -U_a+\frac{3}{2}U_b=0 \end{cases}.$$ Получим: $U_b=4\,B$, $U_a=\frac{3}{2}U_b=6B$.

Находим токи в ветвях:

$$I_1=\frac{18-6}{3}=4\,A, I_2=\frac{6}{6}=1\,A, I_3=\frac{6-4+4}{2}=3\,A, I_4=\frac{4}{4}=1\,A.$$

2.4. Метод двух узлов

Метод двух узлов является частным случаем МУН. В схеме рис.2.10 один независимый узел с узловым напряжением U_1.

По МУН для расчета U_1 имеем одно уравнение:

$$(G_1+G_2+G_3)U_1=J_1+E_1G_2-E_2G_3. \qquad (2.24)$$

Получаем формулу для расчета узлового напряжения по методу двух узлов:

$$U_1=\frac{J_1+E_1G_2-E_2G_3}{G_1+G_2+G_3}. \qquad (2.25)$$

В общем случае в схеме с двумя узлами:

$$U_{10} = \frac{\sum\limits_p J_p + \sum\limits_k G_k E_k}{\sum\limits_k G_k}. \qquad (2.26)$$

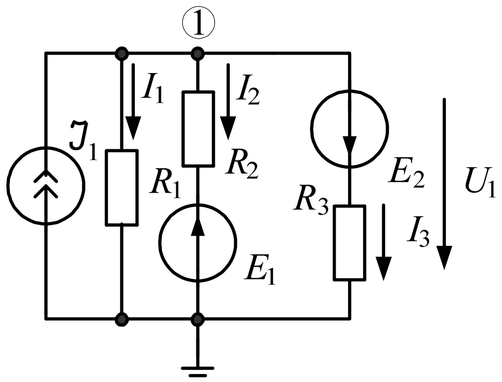


Рис.2.10

В этой формуле со знаком «+» берут токи и ЭДС, направленные к узлу 1 и со знаком «-», направленные от узла 1.

В схеме рис.2.10 задано: $J_1 = 6\text{А}, E_1 = 12\text{В}, E_2 = 8\text{В}, R_1 = 3\text{Ом}, R_2 = 6\text{Ом}, R_3 = 2\text{Ом}$.

Проводим вычисления по формуле метода двух узлов:

$$U_1 = \frac{6 + 12/6 - 8/2}{1/3 + 1/6 + 1/2} = 4B.$$

По закону Ома находим токи в ветвях:

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1} = \frac{4}{3}A, \quad I_2 = \frac{U_1 - E_1}{R_2} = \frac{4-12}{6} = -\frac{4}{3}A,$$

$$I_3 = \frac{U_1 + E_2}{R_3} = \frac{4+8}{2} = 6A.$$

Проверка по первому закону Кирхгофа:

$$J_1 = I_1 + I_2 + I_3,$$

$$6 = \frac{4}{3} + 6 - \frac{4}{3} = 6.$$

Глава 3. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

3.1. Принцип наложения

Пользуясь методом контурных токов, запишем решение для тока в первой ветви схемы рис.3.1:

$$I_1 = I_{11} = \frac{\begin{vmatrix} E_{11} & R_{12} & R_{13} \\ E_{22} & R_{22} & R_{23} \\ E_{33} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}} = E_{11}\frac{\Delta_{11}}{\Delta} + E_{22}\frac{\Delta_{21}}{\Delta} + E_{33}\frac{\Delta_{31}}{\Delta} =$$

$$= (E_1 - E_6)\frac{\Delta_{11}}{\Delta} + (E_2 - E_6)\frac{\Delta_{21}}{\Delta} + 0\frac{\Delta_{31}}{\Delta} =$$

$$= \frac{\Delta_{11}}{\Delta}E_1 + \frac{\Delta_{21}}{\Delta}E_2 - \frac{(\Delta_{11} + \Delta_{21})}{\Delta}E_6 = I_1` + I_1`` + I_1``` \qquad (3.1)$$

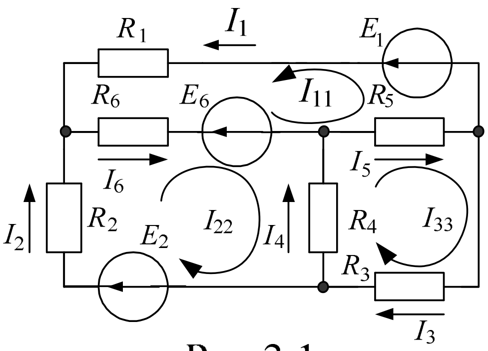


Рис.3.1

Мы видим, что в линейной электрической цепи действует *принцип наложения*:

Ток в любой ветви равен алгебраической сумме частичных токов, обусловленных действием каждого источника в отдельности при отсутствии остальных.

При расчете частичных токов вместо выключенных источников надо оставлять их внутренние сопротивления: $(R_{ин} = 0, R_{ит} = \infty)$.

Пример 3.1.

В схеме рис.3.2а $E = 6\text{В}, J = 2\text{А}, R_1 = R_2 = 1\text{Ом}$. Найти ток I_2.

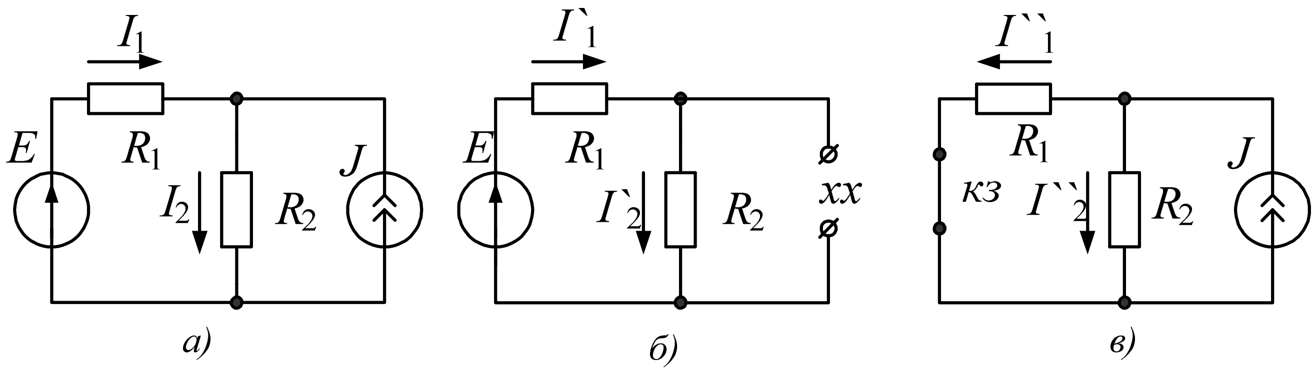


Рис.3.2

Решение

1. Исключим источник тока и найдем в цепи рис.3.2б частичный ток $I_2` = \dfrac{E}{R_1 + R_2} = 3A$.

2. Исключим источник напряжения E и найдем в цепи рис.3.2в частичный ток $I_2`` = J\dfrac{R_2}{R_1 + R_2} = 1A$. (Эту формулу можно получить преобразованием источника тока в источник напряжения).

3. Находим полный ток $I_2 = I_2` + I_2`` = 4A$.

3.2. Теорема взаимности (теорема обратимости)

В сложной пассивной цепи рис.3.3а выделим две внешние ветви i и k.

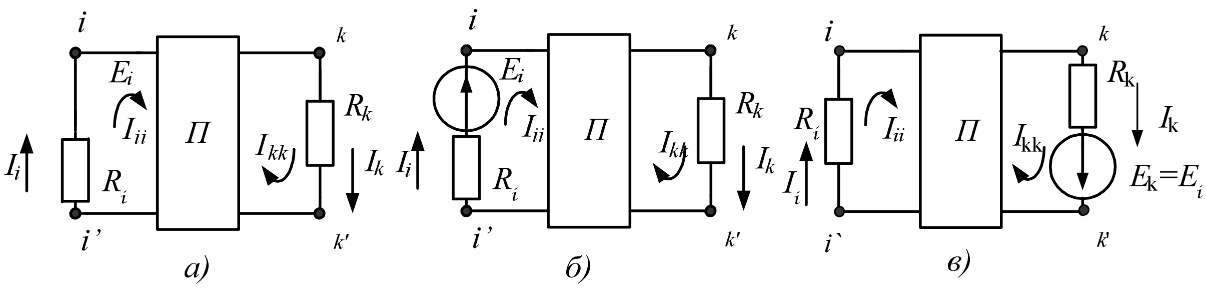


Рис.3.3

Выберем контуры так, чтобы ветви ii' и kk' были ветвями связи и токи в них совпадали с контурными: $I_i = I_{ii}$ и $I_k = I_{kk}$.

Поместим в ветвь ii' источник напряжения E_i (рис.3.3б). Других источников напряжения в цепи нет. По методу контурных токов, используя формулу (2.13), найдем:

$$I_k = I_{kk} = \frac{\Delta_{ik}}{\Delta} E_i. \tag{3.2}$$

Здесь Δ_{ik} - алгебраическое дополнение к элементу R_{ik} матрицы контурных сопротивлений.

Затем поместим в ветвь kk' источник напряжения $E_k = E_i$. Найдем ток

$$I_i = I_{ii} = \frac{\Delta_{ki}}{\Delta} E_k \tag{3.3}$$

В линейной цепи определитель Δ симметричен относительно главной диагонали. Следовательно: $\Delta_{ik} = \Delta_{ki}$ и так как $E_k = E_i$ получим:

$$I_k = I_i. \tag{3.4}$$

Если $E_i \neq E_k$, то выполняется пропорциональность:

$$I_i / E_k = I_k / E_i . \qquad (3.5)$$

Формулировка теоремы взаимности

Если источник E действует в ветви i и вызывает в ветви k ток I_k, то тот же источник, помещенный в ветвь k, вызывает в ветви i ток $I_i = I_k$ (с точностью до знака).

Электрические цепи, удовлетворяющие теореме взаимности, называются *обратимыми (или взаимными). Все линейные цепи с независимыми источниками являются обратимыми.* К необратимым цепям относятся нелинейные цепи и линейные цепи с зависимым источником.

Пример 3.2.

Собрать схемы рис.3.4 и проверить выполнение теоремы взаимности.

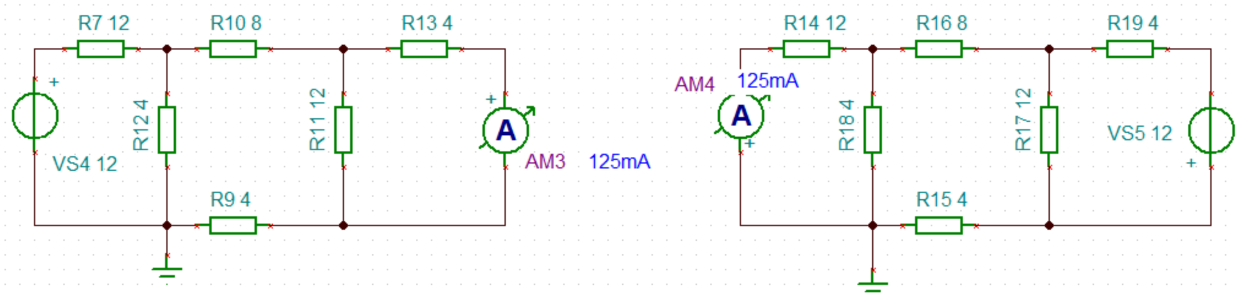


Рис.3.4

3.3. Входные и взаимные проводимости и сопротивления ветвей

По принципу наложения ток в любой ветви равен сумме частичных токов, обусловленных действием каждого источника в отдельности:

$$I_k = G_{k1}E_1 + G_{k2}E_2 + ... + G_{kk}E_k + ... + G_{kn}E_n \qquad (3.6)$$

Коэффициенты в формуле (3.6) называются входными и взаимными проводимостями.

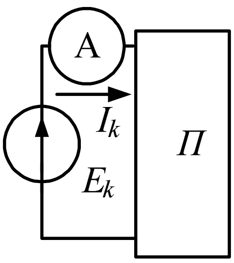


Рис.3.5

Входная проводимость ветви «k»

$$G_{kk} = \frac{I_k}{E_k} \qquad (3.7)$$

равна отношению тока ветви к ЭДС, включенной в эту ветвь, при равных нулю ЭДС остальных ветвей. Схема измерения входной проводимости G_{kk} показана на рис.3.5.

Величина, обратная входной проводимости, называется входным сопротивлением ветви:

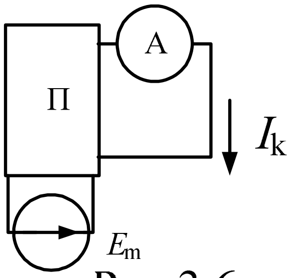


Рис.3.6

$$R_{kk} = \frac{1}{G_{kk}} \qquad (3.8)$$

Взаимная проводимость ветвей «*k*» и «*m*»

$$G_{km} = \frac{I_k}{E_m} \qquad (3.9)$$

равна отношению тока в ветви «*k*» к ЭДС, включенной в ветвь «*m*», при равных нулю ЭДС других ветвей. Схема измерения взаимной проводимости G_{km} показана на рис.3.6.

Величина, обратная взаимной проводимости, называется взаимным сопротивлением:

$$R_{km} = \frac{1}{G_{km}} \qquad (3.10)$$

По принципу взаимности в линейной обратимой цепи:

$$G_{km} = G_{mk}, \qquad (3.11)$$

$$R_{km} = R_{mk}. \qquad (3.12)$$

Входные и взаимные проводимости положительны, а составляющие токов $G_{k1}E_1,\ G_{k2}E_2$ ….. могут иметь разные знаки в зависимости от выбранных направлений.

3.4. Связь между входными и взаимными проводимостями

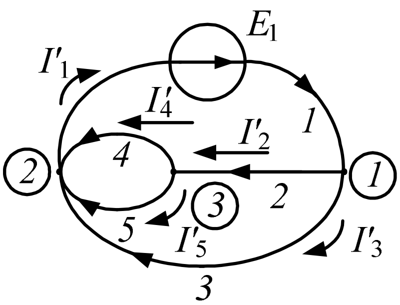


Рис.3.7

На рис.3.7 показан граф разветвленной цепи с нумерацией узлов и ветвей. По первому закону Кирхгофа для узла 1 имеем:

$$I'_1 = I'_2 + I'_3 \qquad (3.13)$$

Для узла 2 имеем:

$$I'_1 = I'_4 + I'_5 + I'_3. \qquad (3.14)$$

Следовательно:

$$I'_1 = I'_2 + I'_3 = I'_4 + I'_5 + I'_3. \qquad (3.15)$$

Делим на E_1:

$$\frac{I'_1}{E_1} = \frac{I'_2}{E_1} + \frac{I'_3}{E_1} = \frac{I'_4}{E_1} + \frac{I'_5}{E_1} + \frac{I'_3}{E_1}. \qquad (3.16)$$

Получили связь между входной проводимостью и взаимными проводимостями:

$$G_{11} = G_{21} + G_{31} = G_{41} + G_{51} + G_{31}. \qquad (3.17)$$

Входная проводимость ветви равна сумме взаимных проводимостей данной ветви и каждой из остальных ветвей, присоединённых к одному из двух узлов, к которым присоединена эта ветвь.

3.5. Теорема о компенсации

В электрической цепи рис.3.8а имеется ветвь с резистором R_1, в которой проходит ток I_1. Напряжение на резисторе U_1. В цепи рис.3.8б в эту ветвь подключены два равных по величине и направленных встречно источника напряжения $E_1 = E_1' = U_1 = I_1 R_1$.

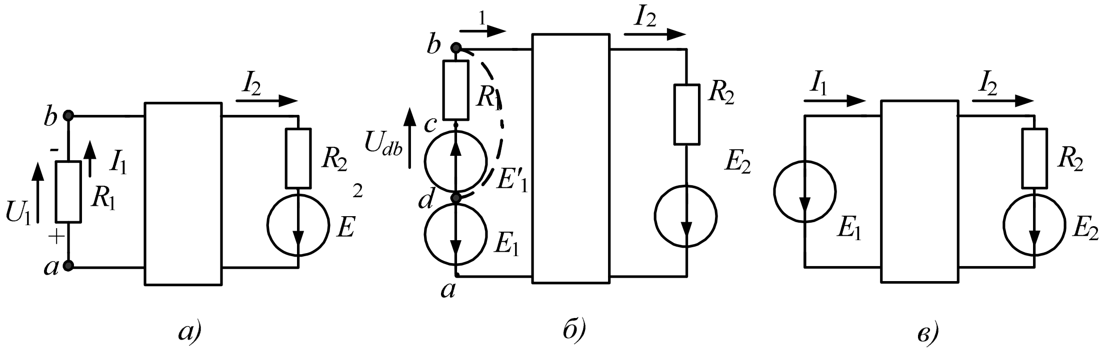


Рис.3.8

Найдем напряжение

$$U_{db} = U_d - U_b = I_1 R_1 - E_1' = 0 \tag{3.18}$$

Так как напряжение между точками d и b равно нулю, участок db можно закоротить. В результате мы получим схему рис.3.8в, в которой резистор R_1 заменен источником напряжения $E_1 = I_1 R_1$.

Ф о р м у л и р о в к а т е о р е м ы о к о м п е н с а ц и и

Любое сопротивление можно заменить источником ЭДС, направленным встречно току и равным напряжению на этом сопротивлении.

П р и м е р 3.3.

Собрать схемы рис.3.9 и проверить выполнение теоремы о компенсации.

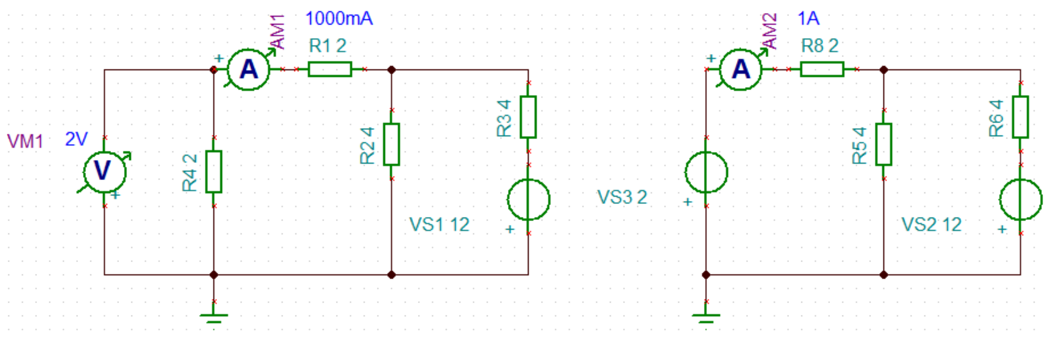


Рис.3.9

3.6. Теорема об эквивалентном генераторе

В исходной схеме рис.3.10а требуется найти ток в одной ветви нагрузки с резистором *R*. Остальную часть схемы с источниками энергии можно рассматривать как активный двухполюсник с зажимами *ab*. Покажем, что для расчета тока в ветви активный двухполюсник можно заменить эквивалентным источником ЭДС и пассивным двухполюсником.

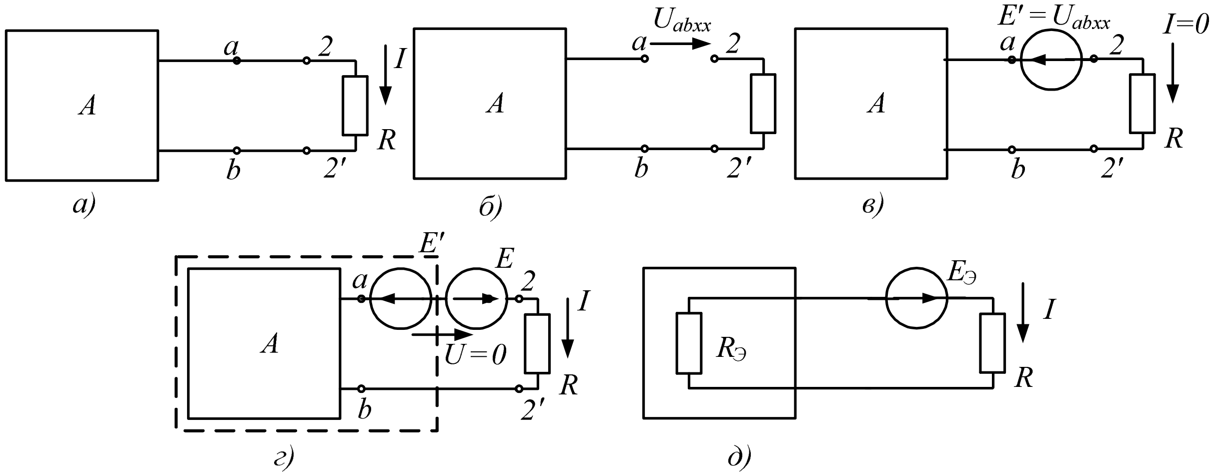


Рис.3.10

Выполним следующие действия.

1. Разомкнем цепь между точками «*а-2*» и найдем напряжение холостого хода U_{abxx} (рис.3.10б).

2. Включим между точками «*а-2*» $E' = U_{abxx}$ (рис.3.10в). Так как при этом напряжение между точками «*а-2*» будет такое же, как в схеме рис.3.10б, ток в резисторе останется равным нулю (*I*=0).

3. Включим $E = E'$ противоположно к E'. Получим схему рис.3.10г, эквивалентную исходной. Ток равен исходному, так как два источника ЭДС направлены противоположно и компенсируют друг друга.

4. В схеме рис.3.10г активный двухполюсник вместе с *E*' становится пассивным. Его можно заменить эквивалентным сопротивлением $R_{экв} = R_{вхab}$, равным входному сопротивлению пассивного двухполюсника. В полученной схеме рис.3.10д

$$I = \frac{E_э}{R + R_э} = \frac{U_{авхх}}{R + R_{вхав}} \qquad (3.19)$$

Т е о р е м а   о б   э к в и в а л е н т н о м   г е н е р а т о р е

Любой активный двухполюсник можно заменить эквивалентным генератором, у которого ЭДС равна напряжению холостого хода на зажимах активного двухполюсника, а внутреннее сопротивление равно входному сопротивлению двухполюсника при равных нулю источниках напряжения и отключенных источниках тока.

Пример 3.4

Используя моделирование, преобразовать исходную схему рис.3.11а к эквивалентному генератору рис.3.11г и убедиться в равенстве токов в нагрузке.

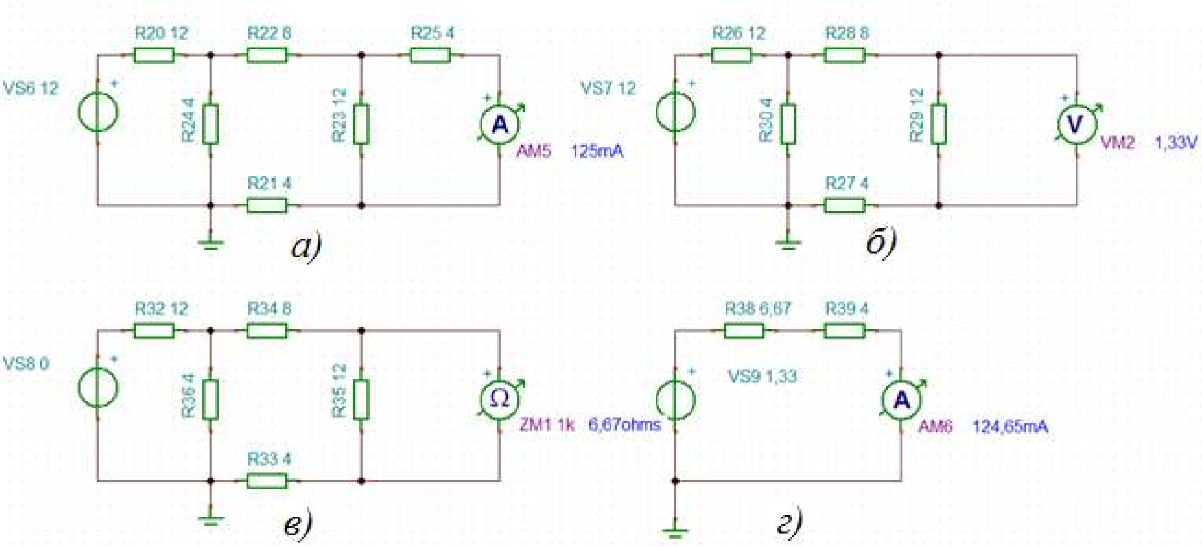


Рис. 3.11

3.7. Передача энергии от активного двухполюсника к нагрузке, согласование нагрузки с генератором

К электрической цепи, представленной активным двухполюсником рис.3.12а, подключена нагрузка $R_н$.

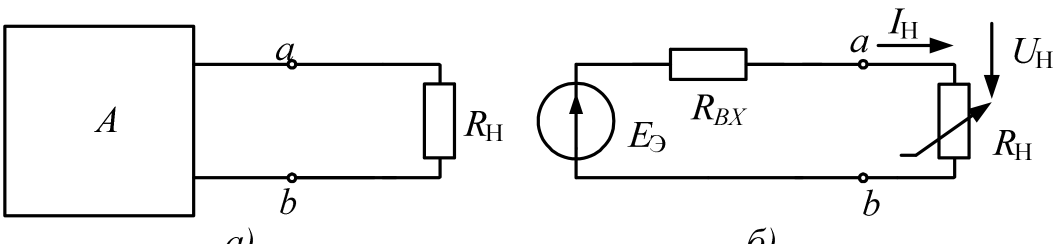


Рис.3.12

Заменим активный двухполюсник эквивалентным генератором (рис.3.12б). В полученной схеме

$$E_Э = I_н R_н + I_н R_{вх}. \tag{3.20}$$

Умножим на $I_н$:

$$E_Э I_н = I_н^2 R_н + I_н^2 R_{вх}. \tag{3.21}$$

Получили уравнение для мощностей:

$$P_г = P_н + P_{вн}, \tag{3.22}$$

где: $P_г$-мощность генератора; $P_н$-мощность нагрузки; $P_{вн}$ - потери мощности внутри генератора.

Определим ток, при котором в нагрузке будет выделяться максимальная мощность ($P_н = P_{мах}$).

Выразим мощность в нагрузке:

$$P_н = E_Э I_н - I_н^2 R_{вх}. \tag{3.23}$$

Приравняем нулю производную мощности в нагрузке:

$$\frac{dP_н}{dI} = E_Э - 2I_н R_{вх} = 0. \tag{3.24}$$

При выполнении этого условия ток в нагрузке

$$I_н = \frac{E_Э}{2R_{вх}}. \tag{3.25}$$

Но в схеме рис.3.12б $I_н = \dfrac{E_Э}{R_{вх} + R_н}$.

Следовательно:

$$R_{вх} = R_н \tag{3.26}$$

-*условие согласования нагрузки с генератором*, при котором в нагрузке выделяется максимальная мощность.

Найдем максимальную мощность в нагрузке:

$$P_{мах} = I_н^2 R_н = \frac{E_Э^2}{(2R_{вх})^2} R_{вх} = \frac{E_Э^2}{4R_{вх}}. \tag{3.27}$$

Коэффициентом полезного действия (КПД) активного двухполюсника называется отношение мощности отдаваемой в нагрузку к мощности, развиваемой эквивалентным генератором.

Используют несколько формул для расчета КПД:

$$\eta = \frac{P_н}{P_г} = \frac{E_э I_н - I_н^2 R_{вх}}{E_э I_н} = 1 - \frac{R_{вх} I_н}{E_э} = 1 - \frac{I_н}{I_{кз}} =$$

$$\frac{I_н^2 R_н}{I_н^2 (R_{вх} + R_н)} = \frac{R_н / R_{вх}}{1 + R_н / R_{вх}}. \tag{3.28}$$

Графики КПД, напряжения на нагрузке и мощности в нагрузке от тока в нагрузке показаны на рис.3.13. Мы видим, что мощность в нагрузке равна нулю при отсутствии в ней тока ($I_н = 0$) или отсутствии напряжения на нагрузке при ее замыкании ($U_н = 0, I_н = I_{кз}$). Максимальная мощность в нагрузке выделяется при условии (3.26). При этом

$$I_{\text{н}} = \frac{I_{\text{кз}}}{2} \qquad (3.29)$$

Найдем отношение мощности в нагрузке к ее максимальному значению:

$$\frac{P_{н}}{P_{\text{мах}}} = \frac{E_{э}^{2} R_{\text{н}} \cdot 4R_{\text{вх}}}{(R_{\text{н}} + R_{\text{вх}})^{2} E_{э}^{2}} = \frac{4 \, {R_{\text{н}}}/{R_{\text{вх}}}}{\left(1 + {R_{\text{н}}}/{R_{\text{вх}}}\right)^{2}}. \qquad (3.29)$$

График этой зависимости показан на рис. 3.14. Если в нагрузке должна выделяться большая мощность, то при согласовании по условию (3.26), когда ${R_{\text{н}}}/{R_{\text{вх}}} = 1$, КПД равен 0,5 и такая же большая мощность будет выделяться во внутреннем сопротивлении генератора. Это может быть недопустимо. Тогда нагрузку увеличивают до значения ${R_{\text{н}}}/{R_{\text{вх}}} \approx 3$, КПД при этом увеличивается до 0,75, а отношение $\frac{P_{н}}{P_{\text{мах}}}$ снижается до 0,75.

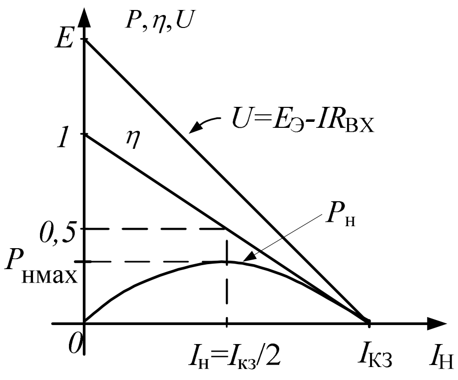


Рис.3.13

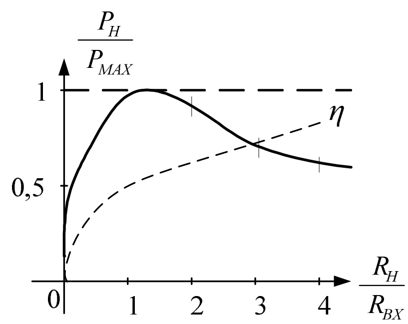


Рис.3.14

Пример 3.5.

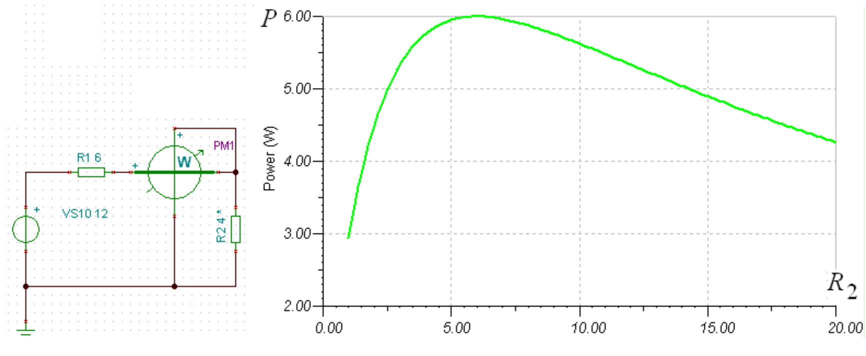


Рис.3.15

Исследовать измерение мощности ваттметром в схеме рис.3.15. Провести *Analysis – DC analysis – DC Transfer Characteristic* , изменяя нагрузку R_2 от 1 до 20 Ом. Объяснить вид графика мощности.

Пример 3.6.

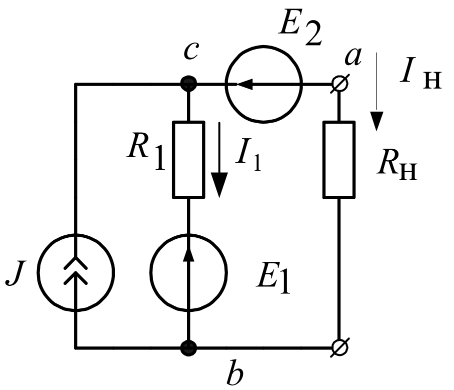


Рис.3.16

В цепи рис.3.16 дано: J=1А, R_1=6Ом, $R_н$=2Ом, E_1=4В, E_2=2В. Найти $I_н$ и $P_н$.

Решение

1. Отключим нагрузку и найдем сначала в режиме холостого хода

$$U_{cbxx} = E_1 + JR_1 = 10B.$$

2. Далее находим

$U_{abxx} = U_{cbxx} - E_2 = 8\ B$ и $R_{вх} = R_1 = 6Ом$.

3. Находим ток в нагрузке $I_н = \dfrac{U_{abxx}}{R_{вх} + R_н} = 1A$.

4. Мощность в нагрузке $P_н = I_н^2 R_н = 2\,Bm$.

Пример 3.7.

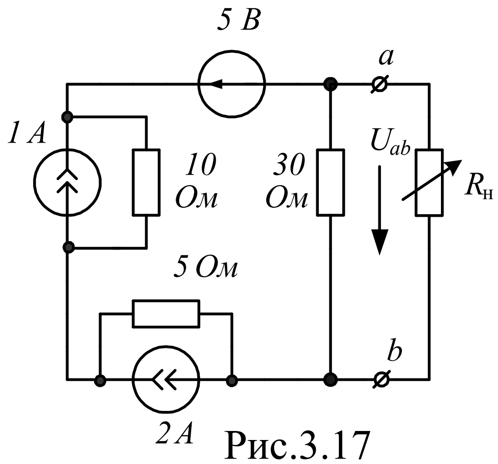


Рис.3.17

В цепи рис.3.17 определить, при каком оптимальном значении сопротивления нагрузки в ней выделяется наибольшая мощность? Найти эту мощность.

Решение

1. Отключаем нагрузку, заменяем источники тока на источники напряжения и находим:

$$U_{abxx} = \frac{(2\cdot 5 + 1\cdot 10 - 5)}{5 + 10 + 30}\cdot 30 = 10\,B,$$

$$R_{вх} = \frac{15\cdot 30}{45} = 10\,Ом,\ R_{нonm} = R_{вх} = 10Ом.$$

2. Находим максимальную мощность в нагрузке:

$$P_{н\,max} = \frac{U^2_{abxxabxx}}{4R_{вх}} = \frac{100}{40} = 2{,}5\,Bm$$

Пример 3.8.

В цепи рис.3.18 J=4А, R_1=R_4=2Ом, R_2=R_3=4Ом.Найти показания амперметра.

Решение

1. Отключим амперметр и найдем U_{abxx}. Так как $R_1 + R_3 = R_2 + R_4$ токи $I_1 = I_2 = 2$ А. Находим $U_{abxx} = I_1 R_3 - I_2 R_4 = 8 - 4 = 4B$.

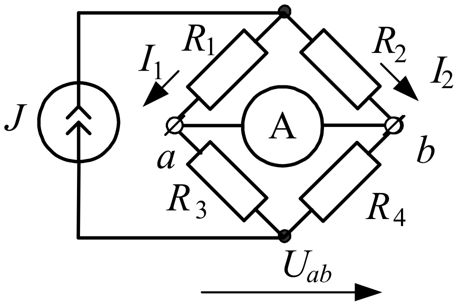


Рис.3.18

2. Находим входное сопротивление эквивалентного генератора:

$$R_{вх} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = 3\,Ом.$$

3. Так как амперметр имеет нулевое внутреннее сопротивление:

$$I_A = \frac{U_{abxx}}{R_{вх}} = \frac{4}{3}A.$$

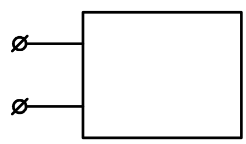
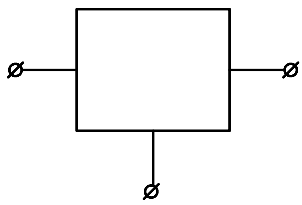
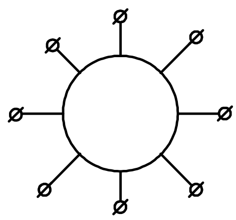
Глава 4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Постановка задачи

Преобразованием (свёрткой) цепи называют совокупность операций, приводящих электрическую цепь к простейшему виду.

Часть цепи, подлежащую преобразованию и связанную с остальной цепью в двух и более точках, представляют в виде *многополюсников*.

Виды многополюсников

			
Двухполюсник	Трехполюсник	Четырехполюсник	Многополюсник

Многополюсники называются эквивалентными, если при замене одного многополюсника другим, напряжения и токи во внешней цепи не изменятся.

4.1. Преобразование пассивных цепей

Последовательное соединение резисторов

В цепи рис.4.1 по второму закону Кирхгофа входное напряжение равно сумме паданий напряжений на пассивных резисторах:

$$U = IR_1 + IR_2 + IR_3 + \ldots + IR_n = IR_э \qquad (4.1)$$

Делим левую и правую часть уравнения (4.1) на ток I. Получим формулу для эквивалентного сопротивления последовательного соединения резисторов:

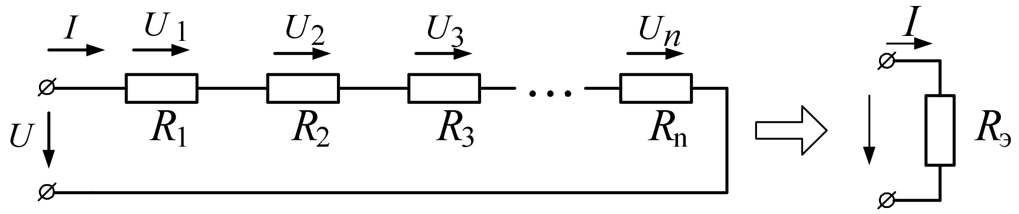


Рис.4.1

$$R_э = \sum_{k=1}^{n} R_k \tag{4.2}$$

Делитель напряжения позволяет получить часть от входного напряжения. В цепи рис.4.2:

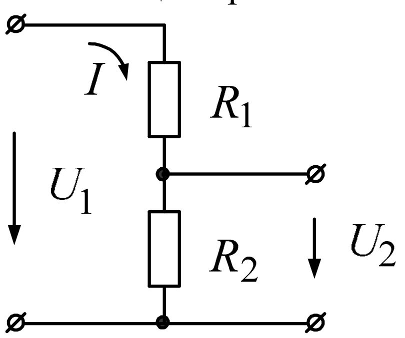


Рис.4.2

$$U_2 = IR_2 = \frac{U_1 R_2}{R_1 + R_2} \tag{4.3}$$

Параллельное включение резисторов

В цепи рис.4.3 по первому закону Кирхгофа:

$$I = I_1 + I_2 + ... + I_n \tag{4.4}$$

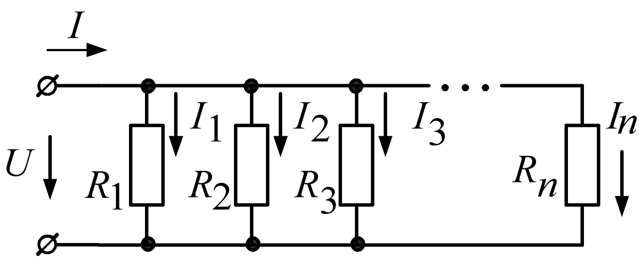


Рис.4.3

На всех резисторах действует одно и то же напряжение U. Выразим токи через это напряжение и проводимости:

$$UG_э = UG_1 + UG_2 + ... + UG_n \tag{4.5}$$

Получим формулу для эквивалентной проводимости параллельного соединения резисторов:

$$G_э = G_1 + G_2 + ... + G_n \tag{4.6}$$

Если параллельно включены всего два резистора, то:

$$G_э = G_1 + G_2 = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}.$$

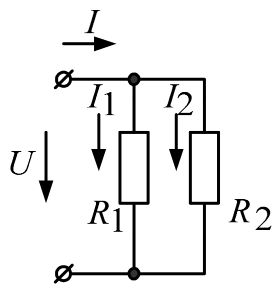


Рис.4.4

Следовательно, при параллельном соединении двух резисторов (рис.4.4)

$$R_э = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \qquad (4.7)$$

Делитель токов позволяет получить в нужной ветви часть от входного тока. В схеме рис.4.4:

$$I_2 = \frac{U}{R_2} = I\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \cdot \frac{1}{R_2} = I\frac{R_1}{R_1 + R_2} \qquad (4.8)$$

Полезно запомнить *правило деления токов*:

Ток в одной из двух ветвей равен общему току, умноженному на сопротивление другой ветви и деленному на сумму сопротивлений двух ветвей.

Смешанное соединение

В смешанном соединении есть участки с последовательным и параллельным соединением. Свёртку начинают с наиболее удалённых участков цепи.

Пример 4.1

Найти входное сопротивление цепи рис.4.5.

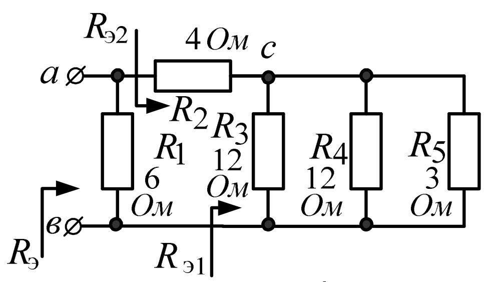


Рис.4.5

1. Сначала заменим параллельное соединение резисторов R_3, R_4, R_5 эквивалентным. Находим эквивалентную проводимость и эквивалентное сопротивление:

$$G_{э1} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\,См,$$

$R_{э1} = 2\,Ом$.

2. Резистор R_2 включен последовательно с $R_{э1}$. Находим $R_{э2} = 4 + 2 = 6\,Ом$.

3. Резистор R_1 включен параллельно с $R_{э2}$. Находим входное сопротивление: $R_э = \dfrac{6 \cdot 6}{6 + 6} = 3\,Ом$.

Преобразование звезда – треугольник

Звездой называют три или более ветвей, соединенных в общем узле 0 (рис.4.6а). Ветви называют лучами звезды. В расчетах бывает нужно устранить внутренний узел звезды. Для этого трехлучевую звезду заменяют эквивалентным треугольником (рис.4.6б). *Звезда и треугольник эквивалентны, если внешние токи и напряжения одинаковы.*

Для преобразования звезды в эквивалентный треугольник требуется, чтобы проводимости сторон треугольника определялись через проводимости лучей звезды по следующим формулам:

$$G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3},\ G_{23} = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3},\ G_{31} = \frac{G_3 G_1}{G_1 + G_2 + G_3} \quad (4.9)$$

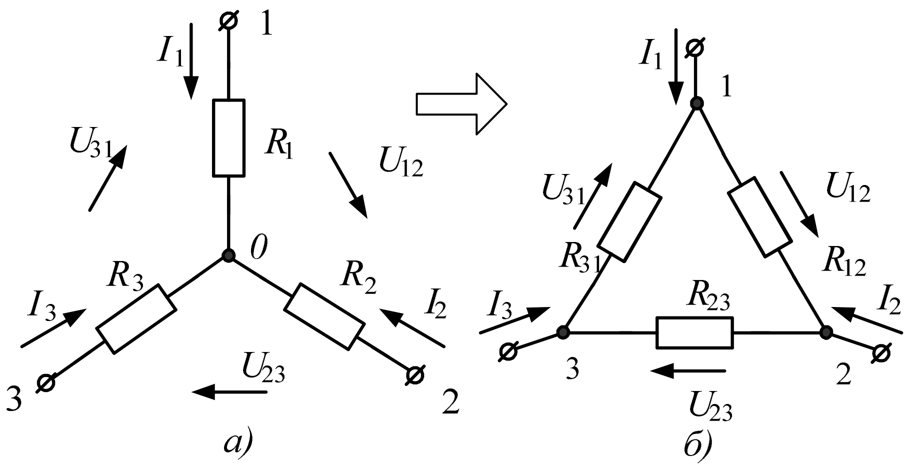


Рис.4.6

П р а в и л о 1

Проводимость стороны треугольника равна произведению проводимостей лучей звезды, подсоединенных к тем же внешним полюсам, деленному на сумму проводимостей всех лучей.

Из (4.9) получим формулы для расчета сопротивлений сторон треугольника:

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1 R_2}{R_3},\ R_{13} = R_1 + R_3 + \frac{R_1 R_3}{R_2},\ R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2 R_3}{R_1} \quad (4.10)$$

В равносторонней звезде $R_1 = R_2 = R_3$ и $R_\Delta = 3R_Y$.

Преобразование треугольник-звезда

Это преобразование также бывает полезным для расчета цепей. Звезда (рис. 4.6а) будет эквивалентна треугольнику (рис.4.6б), если сопротивления лучей рассчитать по формулам:

$$R_1=\frac{R_{12}R_{13}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}},\quad R_2=\frac{R_{12}R_{23}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}},$$

$$R_3=\frac{R_{13}R_{23}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}} \qquad (4.11)$$

П р а в и л о   2

Сопротивление луча звезды равно произведению сопротивлений исходного треугольника, подсоединенных к тому же узлу, деленному на сумму всех сопротивлений треугольника.

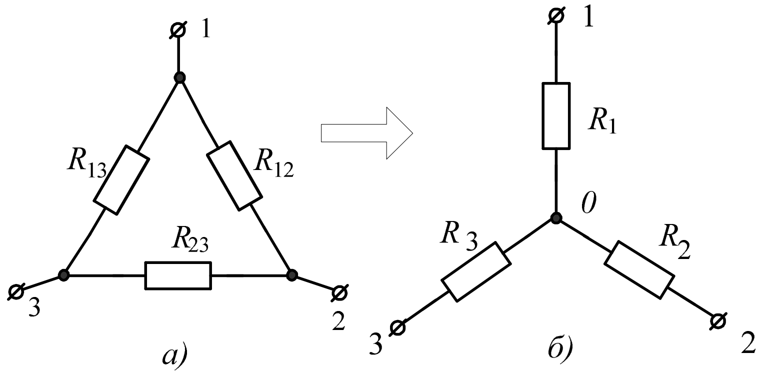


Рис.4.6

П р и м е р 4.2.

Для цепи рис.4.7а рассчитать входное сопротивление.

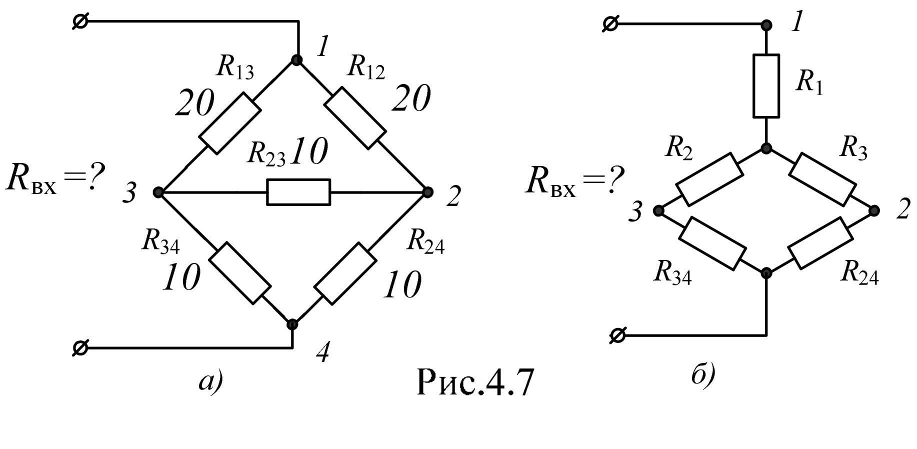


Рис.4.7

Схема рис.4.7а называется мостом. Входное сопротивление можно найти, если преобразовать треугольник в звезду (рис.4.7б).

По формулам (4.11) вычисляем:

$$R_1=\frac{20\cdot 20}{20+20+10}=8\,Ом,\quad R_2=\frac{20\cdot 10}{20+20+10}=4\,Ом,$$

$$R_3=\frac{20\cdot 10}{20+20+10}=4\,Ом.$$

Рассчитаем последовательное соединение резисторов:

$$R_2 + R_{34} = R_3 + R_{24} = 14\,Ом.$$

Параллельное соединение ветвей с этими резисторами имеет сопротивление:

$$R_{э1} = \frac{14 \cdot 14}{14 + 14} = 7\,Ом.$$

Искомое входное сопротивление

$$R_{вх} = R_1 + R_{э1} = 15\,Ом.$$

4.2. Преобразование активных цепей

Взаимное преобразование источников напряжения и источников тока

Правила эквивалентной замены источника напряжения на источник тока и наоборот были рассмотрены в первой главе. Преобразование (рис.4.8) будет эквивалентным, если выполняются условия (1.11).

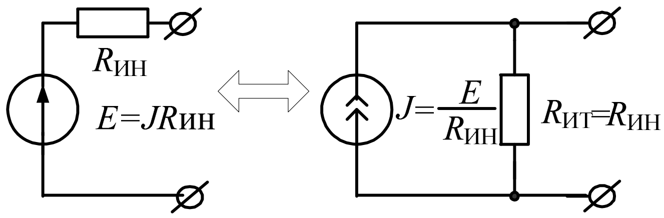


Рис.4.8

Последовательное соединение источников напряжения

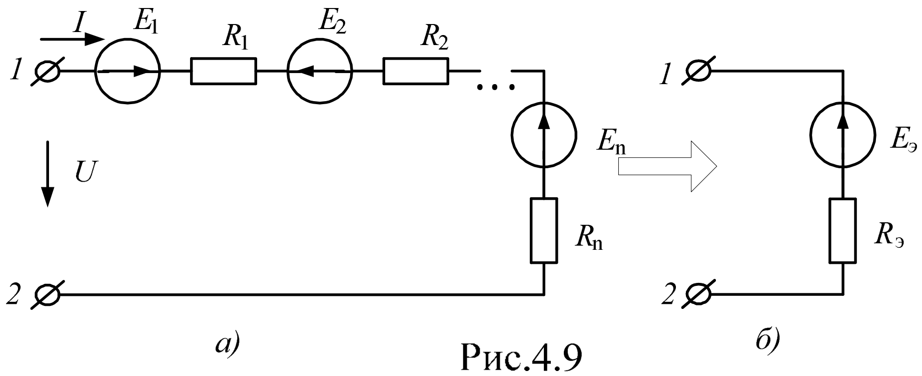


Рис.4.9

В исходной схеме рис.4.9а сгруппируем все источники напряжения, выбрав произвольно направление результирующего ИН. Напряжение эквивалентного ИН находят по формуле:

$$E_э = \sum_{k=1}^{n} \pm E_k\,, \tag{4.12}$$

где знак плюс берут у источников напряжения, совпадающих по направлению с эквивалентным.

Сопротивление эквивалентного ИН находят по формуле:

$$R_Э = \sum_{k=1}^{n} R_n \qquad (4.13)$$

Параллельное соединение источников тока

В исходной схеме рис.4.10а сгруппируем вместе источники тока и внутренние сопротивления (рис.4.10б). Направление результирующего тока в схеме рис.4.10б $J_э$ должно соответствовать направлению искомого эквивалентного ИТ. По первому закону Кирхгофа находим ток эквивалентного источника тока:

$$J_э = J_1 + J_2 - J_3 \qquad (4.14).$$

Знак плюс в формуле (4.14) берут у источников тока, совпадающих по направлению с эквивалентным ИТ (рис.4.10в).

Находим эквивалентное сопротивление:

$$R_э = \frac{1}{G_э} \qquad (4.15),$$

где: $$G_э = G_1 + G_2 + G_3 \qquad (4.16)$$

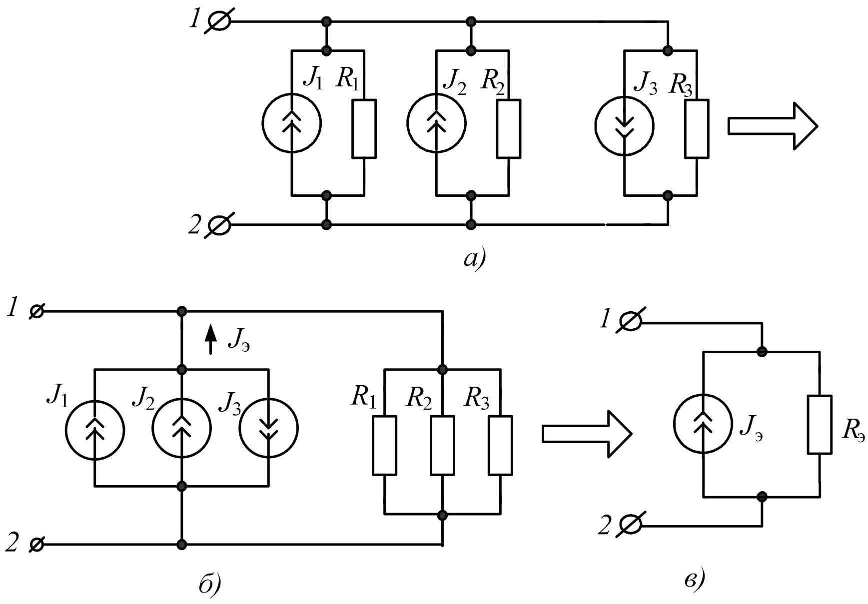


Рис.4.10

Параллельное соединение источников напряжения

В исходной схеме рис.4.11а параллельное соединение ИН представим активным двухполюсником и заменим его эквивалентным генератором. Найдем по методу двух узлов напряжение на зажимах двухполюсника в режиме холостого хода:

$$U_{12} = \frac{E_1 G_1 - E_2 G_2 + E_3 G_3}{G_1 + G_2 + G_3} = E_э \tag{4.17}$$

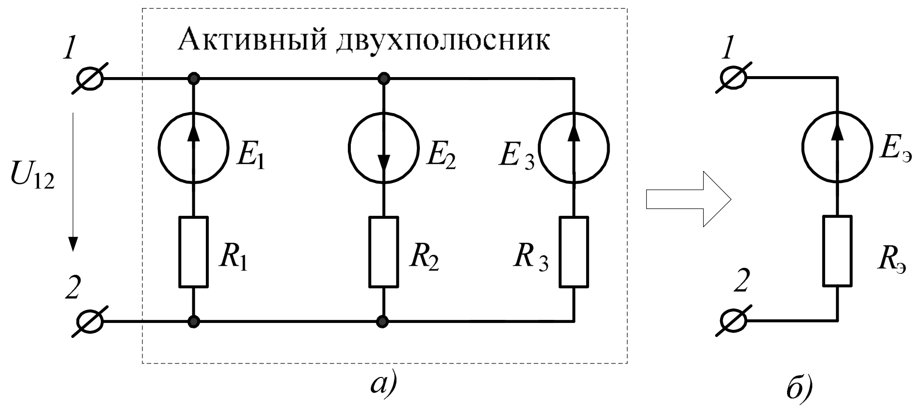


Рис.4.11

Эквивалентную входную проводимость активного двухполюсника найдем по формуле:

$$G_э = G_1 + G_2 + G_3 \tag{4.18}$$

Эквивалентное сопротивление: $R_э = {}^{1}\!/_{G_э}$ (4.19)

В результате получим эквивалентную схему рис.4.11.б.

Последовательное соединение источников тока

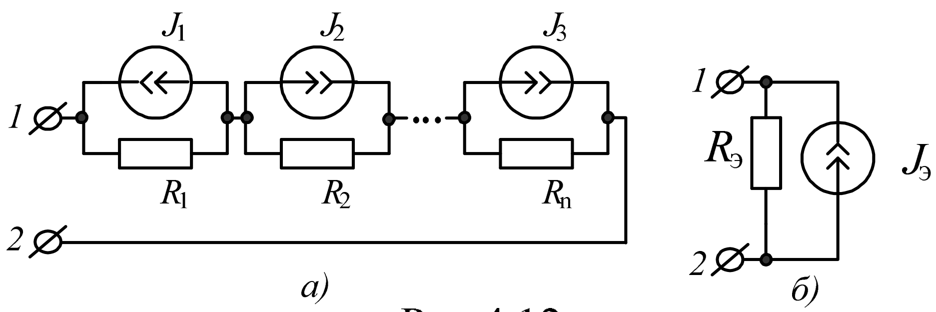


Рис.4.12

Для расчета параметров эквивалентной схемы рис.4.12б сначала надо преобразовать в схеме рис.4.12б источники тока в источники напряжения, найти эквивалентный источник напряжения и преобразовать его в источник тока.

В результате для схемы рис.4.12б получим:

$$J_э = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \pm J_k R_k}{\sum R_k} \tag{4.20}$$

$$R_Э = \sum_{k=1}^{n} R_n \qquad (4.21)$$

В формуле (4.20) знак «+» берут у источников тока, совпадающих по направлению с эквивалентным.

Вывод: *При любом соединении источников тока или источников напряжения можно найти их общий эквивалент в виде одной из схем* (рис.4.13):

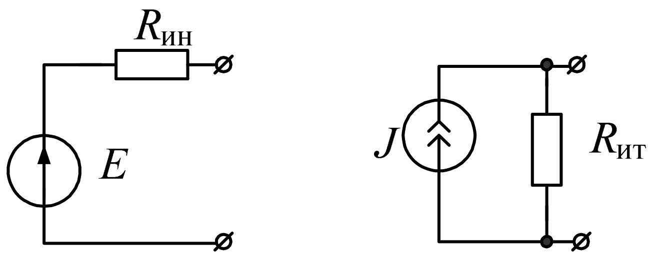


Рис.4.13

4.3. Правило переноса источника напряжения через узел

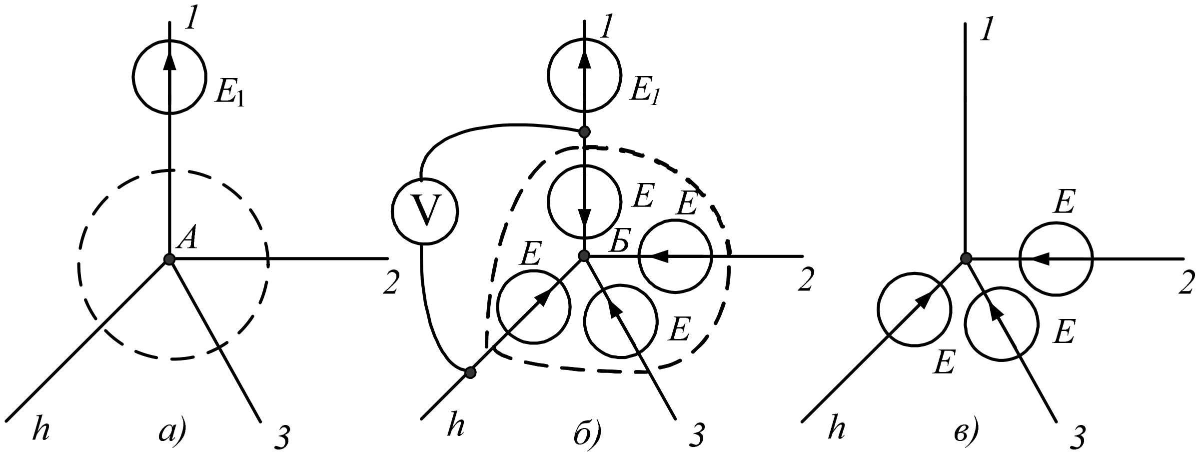


Рис.4.14

В первой ветви исходной схемы рис.4.14а включен источник напряжения E_1, направленный от узла *А*. Окрестность узла *А,* обведенная пунктиром, не содержит источников напряжения. Такой узел *А* называют «пустой узел».

В схеме рис.4.14б в каждой ветви включены дополнительные источники $E = E_1$, направленные к узлу *Б*. Окрестность узла *Б* с источниками напряжения обведем пунктиром и будем рассматривать как многополюсник. Если все ИН равны, то напряжения между любыми зажимами многополюсника будут равны нулю. Следовательно, узел *Б* можно считать «пустым узлом», эквивалентным узлу *А*. Значит, исходная схема рис.4.14а эквивалентна схеме рис.4.14в, в которой источник напряжения перемещен через узел во все другие ветви, присоединенные к этому узлу.

П р а в и л о

Источник напряжения можно перенести через узел во все другие ветви, присоединенные к данному узлу, без изменения токов в схеме.

4.4. Правило размножения источников тока

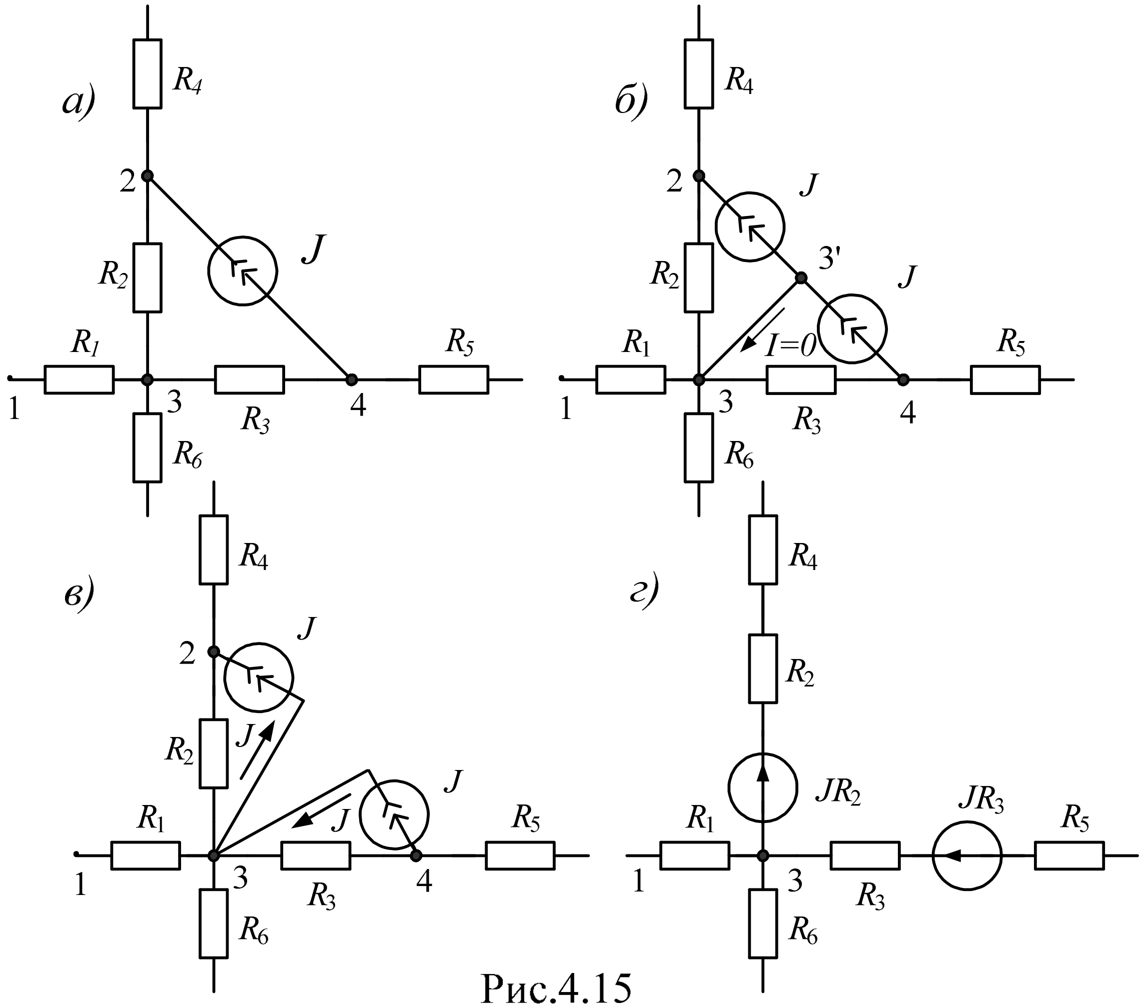


Рис.4.15

В исходной схеме рис.4.15а требуется устранить узлы 2 и 4. В идеальном источнике тока ток постоянный по величине и не зависит от внешней цепи. Последовательное соединение двух одинаковых по величине источников тока (рис.4.15б) эквивалентно одному ИТ.

В схеме рис.4.15б соединим узлы 3 и 3’перемычкой. Ток в перемычке равен нулю, так как по первому закону Кирхгофа $J - J + I = 0$.

Расщепим перемычку 3-3’ на две с токами J (рис. 4.15в) и преобразуем источники тока с параллельными резисторами R_2 и R_3 в источники напряжения. Получим эквивалентную схему рис.4.15г, в которой устранены узлы 2 и 4.

П р а в и л о

Идеальный источник тока может быть заменён несколькими равными по величине источниками тока, подключёнными параллельно всем ветвям, которые составляют контур с исходным источником тока (рис.4.16).

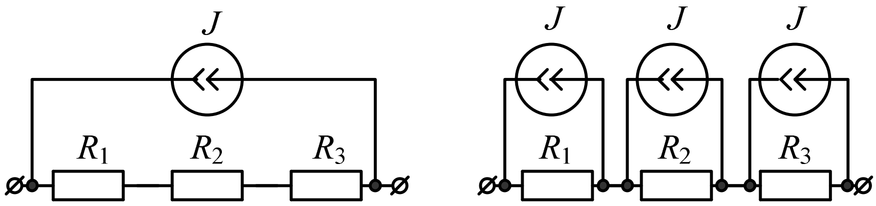
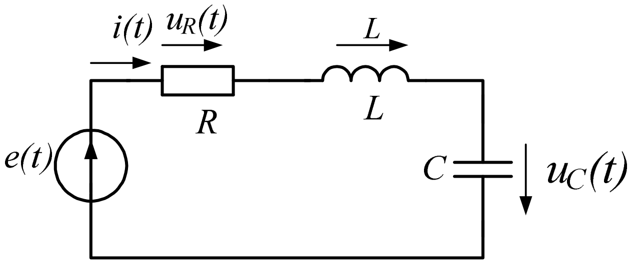


Рис.4.16

Глава 5. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ТОКАХ И НАПРЯЖЕНИЯХ

5.1. Гармонические сигналы и их характеристики

В линейной электрической цепи процессы описываются линейными интегро-дифференциальными уравнениями, которые справедливы для любой формы сигналов. Так для цепи рис.5.1 по второму закону Кирхгофа можно составить уравнения:



$$u_R + u_L + u_C = e(t) \tag{5.1}$$

или

$$iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i dt = e(t) \tag{5.2}$$

Рис.5.1

Для гармонического сигнала применяют упрощённый метод расчёта, не требующий решения интегро-дифференциального уравнения. Он называется символический метод расчёта цепей гармонического тока и использует параметры (символы) гармонической функции.

Г а р м о н и ч е с к и й   с и г н а л

Гармоническими сигналами называют синусоидальные и косинусоидальные функции одной частоты.

В радиотехнике традиционно используют косинусоидальные функции.

В электротехнике мы будем применять синусоидальные гармонические функции. Мгновенные значения синусоидальных функций тока и напряжения записывают так:

$$i(t)=I_m sin(\omega t+\psi_I),\ u(t)=U_m sin(\omega t+\Psi_U). \qquad (5.3)$$

Характеристиками гармонического сигнала являются угловая частота ω, амплитуда (I_m, U_m) и начальная фаза (ψ_I, ψ_U). В цепи гармонического синусоидального тока во всех ветвях угловая частота ω известна. Неизвестны и подлежат определению амплитуды и фазы сигналов I_m, Ψ_I и U_m, Ψ_U. Каждый ток и напряжение можно охарактеризовать амплитудой и начальной фазой и все расчёты вести только для амплитуд и фаз гармонической функции.

Амплитуда и фаза– это символы, характеризующие гармоническую функцию. Подставив их в общее выражение (5.3) с известной частотой ω, всегда можно найти мгновенное значение функции.

Пример 5.1

Рассчитаны: $I_m = 2A, \Psi = 45^0$. Известна $\omega = 10^3 \frac{1}{c}$.

Находим: $i(t) = 2\, sin(10^3 t + 45^0)\ A$.

5.2. Оператор поворота

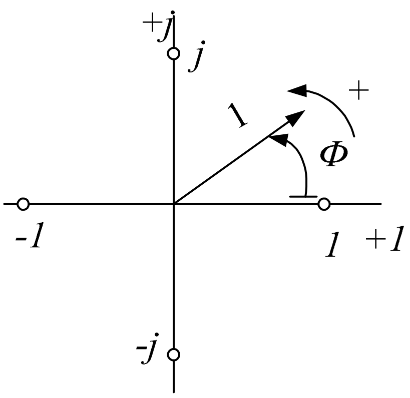


Рис.5.2

Рассмотрим комплексную экспоненциальную функцию $e^{j\Phi}$.

По формуле Эйлера

$$e^{j\Phi} = cos\,\Phi + j\,sin\,\Phi \qquad (5.4)$$

Модуль этой комплексной величины

$$\left|e^{j\Phi}\right| = \sqrt{cos^2\,\Phi + sin^2\,\Phi} = 1 \qquad (5.5)$$

Аргумент

$$arg\,e^{j\Phi} = arctg\left[\frac{sin\,\Phi}{cos\,\Phi}\right] = \Phi \qquad (5.6)$$

На комплексной плоскости (рис. 5.2) комплексная функция (5.4) изображается вектором единичной длины, повернутым относительно оси +1 против часовой стрелки на угол Φ. Функцию $e^{j\Phi}$ называют *оператором поворота,* так как при изменении Φ, изображающий ее вектор поворачивается на комплексной плоскости (рис.5.2).

Найдем положения единичного вектора для нескольких значений Φ:

$$\varPhi = 0, \quad e^{j0^0} = \cos 0 + j\sin 0 = 1, \qquad \varPhi = \frac{\pi}{2}, \quad e^{j90^0} = j,$$
$$\varPhi = \pi, \quad e^{j180^0} = -1, \qquad \varPhi = -\frac{\pi}{2}, \quad e^{-j90^0} = -j \qquad .(5.7)$$

5.3. Символическое представление гармонической функции

Рассмотрим гармоническую функцию тока

$$i(t) = I_m sin(\omega t + \psi_I), \qquad (5.8)$$

в которой: I_m - амплитуда; ω - угловая частота; ψ_I - начальная фаза.

Обозначим текущую фазу гармонической функции

$$\Phi(t) = \omega t + \psi_I \qquad (5.9)$$

Подставим текущую фазу в оператора поворота и получим вращающийся вектор:

$$e^{j\Phi(t)} = \cos\Phi(t) + j\sin\Phi(t). \qquad (5.10)$$

Умножим оператор поворота на амплитуду I_m и получим *комплексную функцию времени для тока*:

$$\tilde{i}(t) = I_m e^{j\Phi(t)} = I_m \cos\Phi(t) + jI_m \sin\Phi(t) \qquad (5.11).$$

В расчетах мы ищем мгновенное значение тока, которое равно мнимой части комплексной функции времени:

$$i(t) = I_m sin(\omega t + \psi_I) = I_m \sin\Phi(t) = Jm\left\{\tilde{i}(t)\right\}. \qquad (5.12)$$

Следовательно, вычислив комплексную функцию времени, мы всегда сможем найти мгновенное значение гармонической функции.

Введем важные определения составляющих комплексной функции времени

$$\tilde{i}(t) = I_m e^{j\Phi(t)} = I_m e^{j(\omega t + \psi_I)} = I_m e^{j\psi_I} e^{j\omega t} \qquad (5.13).$$

Здесь: $\underline{I}_m = I_m e^{j\psi_I}$ - *комплексная амплитуда* (КА) гармонической функции, не зависит от времени и является «символом» гармонической функции;

$\left| I_m e^{j\psi_I} \right| = I_m$ - *модуль комплексной амплитуды*, амплитуда гармонической функции;

ψ_I - *фаза комплексной амплитуды*, равная начальной фазе гармонической функции;

$e^{j\omega t}$ - оператор поворота.

Для обозначения комплексной амплитуды мы будем применять подчеркивание буквы $\underline{I}_m$.

Построим вращающийся вектор, отображающий функцию $\tilde{i}(t)$ на комплексной плоскости (рис.5.3). В момент $t=0$ $I_m e^{j\psi_I} = I_m \cos\psi_I + j I_m \sin\psi_I$. В момент $t=t_1$ получим $I_m e^{j\psi_I} e^{j\omega t_1}$. При этом вектор повернется на угол ωt_1.

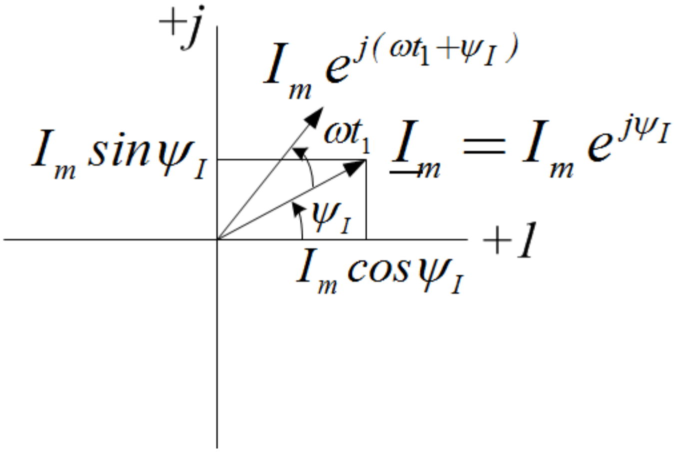


Рис.5.3

Сделаем выводы:

1. Гармоническая функция $i(t)=I_m\sin(\omega t+\psi_I)$ представляется на комплексной плоскости вектором, вращающимся с частотой ω. Длина вектора I_m, начальная фаза ψ_I , текущая фаза $\Phi(t)=\omega t+\psi_I$.

2. Проекция вектора на ось +*j* даёт гармоническую синусную функцию.

3. Векторы гармонических функций одной частоты вращаются с одинаковыми угловыми скоростями и их положение относительно друг друга неизменно и соответствует моменту $t=0$. Поэтому расчёт комплексных амплитуд тока и напряжения полностью определяет режим цепи в любой момент времени.

5.4. Формы записи комплексной амплитуды (КА)

Комплексную амплитуду можно записать в трех формах:

1. $\underline{A}_m = A_m e^{j\Psi}$ - показательная форма;

2. $\underline{A}_m = A_m \cos\Psi + jA_m \sin\Psi$ - тригонометрическая форма;

3. $\underline{A}_m = a + jb$ - алгебраическая форма.

В показательной форме удобно выполнять умножение и деление комплексных амплитуд. В алгебраической форме делают сложение и вычитание КА.

В процессе вычислений часто приходится делать переход от алгебраической формы записи КА к показательной.

Пусть задано: $\underline{A}_m = a + jb$.

Находим модуль комплексной амплитуды

$$A_m = |a + jb| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{5.14}$$

и фазу

$$\Psi = arctg\frac{b}{a} \pm (\frac{0}{\pi}) . \tag{5.15}$$

В формуле (5.15) для векторов КА, расположенных во втором и третьем квадранте комплексной плоскости, к значению $arctg\frac{b}{a}$ надо прибавить или вычесть π.

В результате получим:

$$\underline{A}_m = \sqrt{a^2 + b^2} e^{j\Psi} . \tag{5.16}$$

Пример 5.2

Дано: $\underline{A}_m = -1 - j1$.

Находим: $|A_m| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$,

$\Psi = arctg(\frac{-1}{-1}) = 45^0 + 180^0 = 225^0$,

$\underline{A}_m = \sqrt{2} e^{j225^0}$.

Пример 5.3

Полезные формулы:

Произведение комплексно-сопряженных чисел:

$$(a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2 . \tag{5.17}$$

Избавление от комплексного числа в знаменателе

$$\frac{1}{a + jb} = \frac{a - jb}{(a + jb)(a - jb)} = \frac{a - jb}{a^2 + b^2} \tag{5.18}$$

Пример 5.4

Дано мгновенное значение тока $i(t) = 20\,\boldsymbol{sin}(\omega t - 45^o)$.

Найти комплексную амплитуду.

Запишем комплексную функцию времени:

$\tilde{i}(t) = 20 e^{j(\omega t - 45^o)} = 20 e^{-j45^o} e^{j\omega t}$.

Находим комплексную амплитуду: $\underline{I}_m = 20e^{-j45^o}$.

Важное требование

Для правильного учёта фаз все исходные гармонические функции следует преобразовывать к одному виду, а именно к синусу:

$$\boldsymbol{cos(}\omega t + \Psi\boldsymbol{)} = \boldsymbol{sin(}\omega t + \Psi + 90^0\boldsymbol{)} \qquad (5.19)$$

5.5. Сложение гармонических функций одной частоты

Пусть даны два гармонических напряжения одной частоты $u_1(t) = U_{m1}\,\boldsymbol{sin(}\omega t + \psi_1\boldsymbol{)}$ и $u_2(t) = U_{m2}\,\boldsymbol{sin(}\omega t + \psi_2\boldsymbol{)}$.

От мгновенных значений напряжений перейдем к комплексным амплитудам $\underline{U}_{m1} = U_{m1}e^{j\psi_1}$ и $\underline{U}_{m2} = U_{m2}e^{j\psi_2}$.

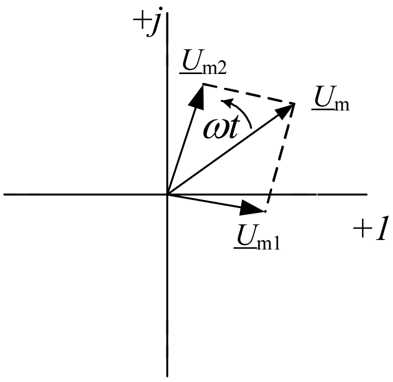


Рис.5.4

На комплексной плоскости (рис.5.4) комплексные амплитуды задают для момента времени $t = 0$ положения вращающихся векторов, изображающих гармонические функции.

Сложим комплексные амплитуды:

$$\underline{U}_m = \underline{U}_{m1} + \underline{U}_{m2} = U_m e^{j\psi}. \qquad (5.20)$$

Полученная комплексная амплитуда определяет положение результирующего вектора суммы двух гармонических функций.

От комплексной амплитуды перейдем к мгновенному значению суммы:

$$u(t) = U_m\,\boldsymbol{sin(}\omega t + \psi\boldsymbol{)}\,. \qquad (5.21)$$

Важное замечание

Сложение комплексных амплитуд возможно только для функций одной частоты, когда изображающие вектора вращаются с одной скоростью.

5.6. Гармонический ток и напряжение в резисторе

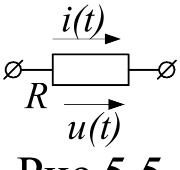


Рис.5.5

Гармонический ток $i(t) = I_m\,\boldsymbol{sin(}\omega t + \Psi_I\boldsymbol{)}$ проходит через резистор (рис.5.5). Найти напряжение на резисторе u(t).

Вместо мгновенного значения тока возьмем комплексную функцию времени для тока $\tilde{i}\,(t) = I_m e^{j\psi_I} e^{j\omega t}$.

Находим комплексную функцию времени для напряжения:

$$\tilde{u}_R(t) = R\tilde{i}(t) = RI_m e^{j\psi_I} e^{j\omega t} = U_{mR} e^{j\psi_U} e^{j\omega t} \qquad (5.22)$$

Разделим уравнение (5.22) на $e^{j\omega t}$ и получим:

$$U_{mR} e^{j\psi_U} = RI_m e^{j\psi_I}. \qquad (5.23)$$

В итоге получаем следующие выражения для гармонического тока и напряжения на резисторе:

для комплексных амплитуд напряжения и тока на резисторе:

$$\underline{U}_{mR} = R\underline{I}_m; \qquad (5.24)$$

для модулей (амплитуд):

$$U_{mR} = RI_m; \qquad (5.25)$$

для фаз:

$$\psi_U = \psi_I. \qquad (5.26)$$

В формуле (5.23) *активным сопротивлением цепи* называют R.

После расчета комплексной амплитуды находим мгновенное значение напряжения на резисторе:

$$u_R(t) = RI_m \sin(\omega t + \Psi_I).$$

Векторная диаграмма

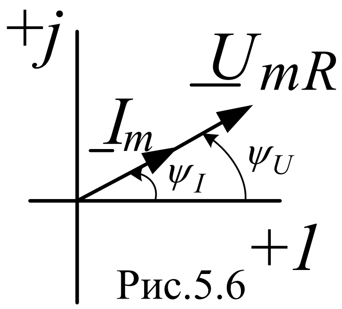


Рис.5.6

Векторной диаграммой называют совокупность векторов напряжений и токов, построенных из начала комплексной плоскости с соблюдением взаимной ориентации.

На рис.5.6 показана векторная диаграмма тока и напряжения на резисторе.

Важное правило: *напряжение на резисторе совпадает по фазе с током* ($\psi_U = \psi_I$) *и амплитуда* $U_{mR} = RI_m$.

Пример 5.5.

В схеме рис.5.7а с источником гармонического тока с амплитудой $J_m = 10\,мА$ и с частотой $f = 159{,}155\,Гц$ рассчитать мгновенное значение напряжения на резисторе $R_1 = 2\,Ом$. Выполнить моделирование схемы рис.5.7а и сравнить полученные графики рис.5.7б с результатами расчета.

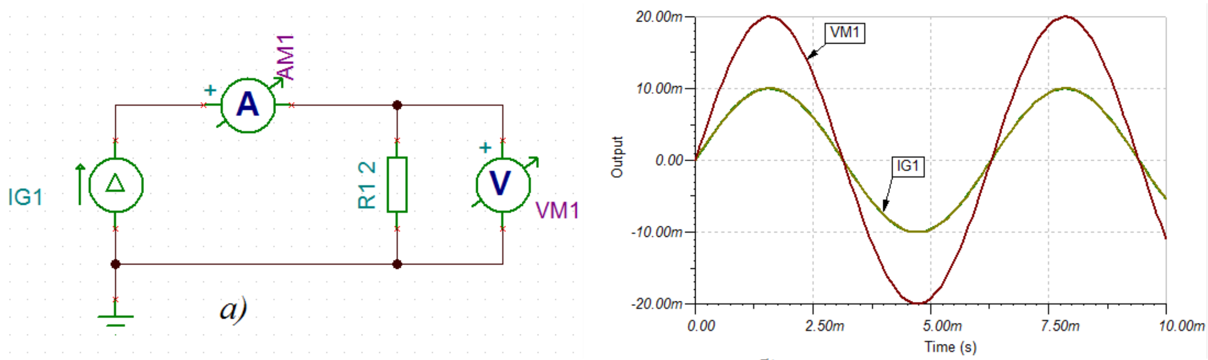


Рис.5.7 б)

5.7. Гармонический ток и напряжение в индуктивности

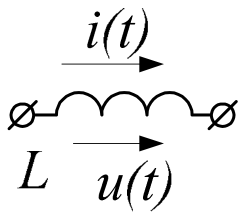


Рис.5.8

Гармонический ток $i(t) = I_m \sin(\omega t + \Psi_I)$ проходит через индуктивность L (рис.5.8). Надо найти напряжение на индуктивности:

$$u_L(t) = L\frac{di}{dt}. \qquad (5.27)$$

Как и в случае с резистором заменим гармоническую функцию тока комплексной функцией времени $\tilde{i}(t) = I_m e^{j\psi_I} e^{j\omega t}$ и подставим ее в (5.27):

$$\tilde{u}_L(t) = L\frac{d\tilde{i}(t)}{dt} = L\frac{d(I_m e^{j\Psi_I} e^{j\omega t})}{dt} = j\omega L I_m e^{j\Psi_I} e^{j\omega t} =$$

$$= \omega L I_m e^{j(\Psi_I + 90^o)} e^{j\omega t} = \underline{U}_m e^{j\omega t} = U_m e^{j\Psi_U} e^{j\omega t}. \qquad (5.28)$$

Здесь мы учли, что в комплексной функции времени $\tilde{i}(t)$ дифференцируется по времени только $e^{j\omega t}$ и что множитель $j = e^{j90^o}$.

Из (5.28) получаем следующие выражения для гармонического тока и напряжения на индуктивности:

для комплексных амплитуд:

$$\underline{U}_{mL} = j\omega L \underline{I}_m = \underline{Z}_L \underline{I}_m; \qquad (5.29)$$

для амплитуды напряжения:

$$U_{mL} = \omega L I_m; \qquad (5.30)$$

для фаз:

$$je^{j\Psi_I} = e^{j90^0} e^{j\Psi_I} = e^{j(\Psi_I + 90^0)} = e^{j\Psi_U}; \qquad (5.31)$$

$$\Psi_U = \Psi_I + 90^0. \qquad (5.32)$$

В формуле (5.29) *комплексным сопротивлением индуктивности* называют

$$\underline{Z}_L = j\omega L = \omega L e^{j90^o} = jX_L; \qquad (5.33)$$

реактивным сопротивлением индуктивности (*индуктивным сопротивлением*) называют

$$X_L = \omega L. \qquad (5.34)$$

Индуктивное сопротивление измеряется в омах: $[\omega L] = \frac{1}{c} \cdot Ом \cdot c = Ом$

Мы видим, что с увеличением частоты ω реактивное сопротивление индуктивности увеличивается прямо пропорционально частоте.

После расчета комплексной амплитуды напряжения находим мгновенное значение:

$$u_L(t) = \omega L I_m \sin(\omega t + \Psi_I + 90^o). \qquad (5.35)$$

Векторная диаграмма тока и напряжения на индуктивности показана на рис.5.9

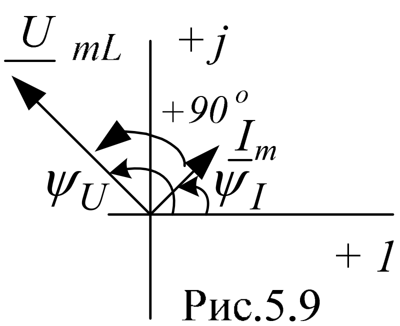


Рис.5.9

В а ж н о е п р а в и л о : *напряжение на индуктивности опережает ток на 90° и амплитуда* $U_{mL} = \omega L I_m$.

Пример 5.6

В схеме рис.5.10а с источником гармонического тока $J_m = 1A$ на частоте $f = 159{,}155\,Гц$ рассчитать мгновенное значение напряжения на индуктивности $L = 2\,мГн$. Выполнить моделирование схемы рис.5.10а и сравнить полученные графики рис.5.10б с результатами расчета.

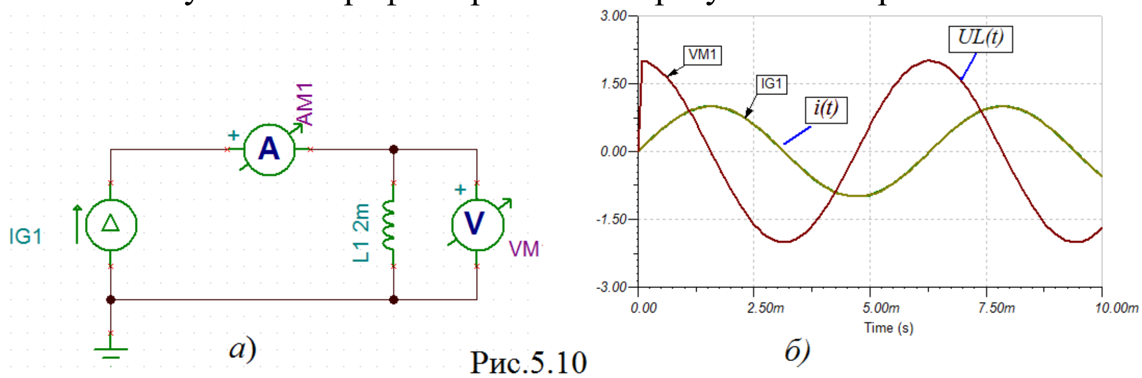


Рис.5.10

5.8. Гармонический ток и напряжение в емкости

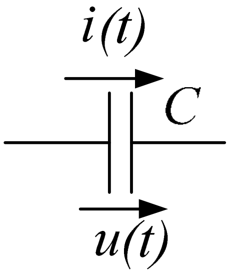


Рис.5.11

К емкости C (рис.5.11) приложено гармоническое напряжение $u_c(t) = U_{mC}\,\boldsymbol{sin}(\omega t + \Psi_U)$. Требуется найти ток в емкости

$$i_C(t) = C\frac{du_C}{dt}\ . \qquad (5.36)$$

Заменим напряжение на емкости комплексной функцией времени:

$$\tilde{u}_c(t) = U_{mC}e^{j\Psi_U}e^{j\omega t}\ . \qquad (5.37)$$

Вычислим комплексную функцию времени для тока:

$$\tilde{i}(t) = C\frac{d}{dt}\left[U_{mC}e^{j\Psi_U}e^{j\omega t}\right] = j\omega CU_{mC}e^{j\Psi_U}e^{j\omega t} = I_m e^{j\Psi_I}e^{j\omega t}\,. \quad (5.38)$$

Разделим (5.38) на $e^{j\omega t}$:

$$j\omega CU_{mC}e^{j\Psi_U} = j\omega C\underline{U}_{mC} = I_m e^{j\Psi_I} = \underline{I}_m\ . \qquad (5.39)$$

Из (5.39) получаем следующие выражения для гармонического тока и напряжения на емкости:

для комплексных амплитуд:

$$\underline{U}_{mC} = \frac{1}{j\omega C}\underline{I}_m = -j\frac{1}{\omega C}\underline{I}_m = \underline{Z}_C\underline{I}_m; \qquad (5.40)$$

для амплитуды напряжения и тока:

$$U_{mC} = \frac{1}{\omega C}I_m; \qquad (5.41)$$

для фаз:

$$\Psi_U = \Psi_I - 90^o. \qquad (5.42)$$

В формуле (5.40) *комплексным сопротивлением емкости* называют

$$\underline{Z}_c = -j\frac{1}{\omega C} = -jX_C; \qquad (5.43)$$

реактивным сопротивлением емкости (*емкостным сопротивлением*) называют

$$X_C = \frac{1}{\omega C}. \qquad (5.44)$$

Емкостное сопротивление измеряется в омах: $\left[\frac{1}{\omega C}\right] = \frac{c \cdot Ом}{c} = Ом$.

С увеличением частоты ω реактивное сопротивление емкости уменьшается обратно пропорционально частоте.

Мгновенное значение напряжения на емкости рассчитываем по формуле:

$$u_C(t) = \frac{1}{\omega C} I_m \, \boldsymbol{sin}(\omega t + \Psi_I - 90^o). \qquad (5.45)$$

Векторная диаграмма тока и напряжения на емкости показана на рис.5.12.

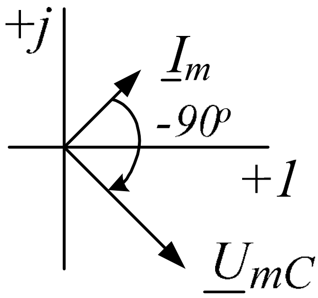


Рис.5.12

В а ж н о е п р а в и л о : *напряжение на емкости отстает от тока на 90° и амплитуда* $U_{mC} = \frac{1}{\omega C} I_m$.

Пример 5.7

В схеме рис.5.13а с источником гармонического напряжения $U_m = 1B$ на частоте $f = 159{,}155\,Гц$ рассчитать мгновенное значение тока в емкости $C = 1\,мФ$. Выполнить моделирование схемы рис.5.13а и сравнить полученные графики рис.5.13б с результатами расчета.

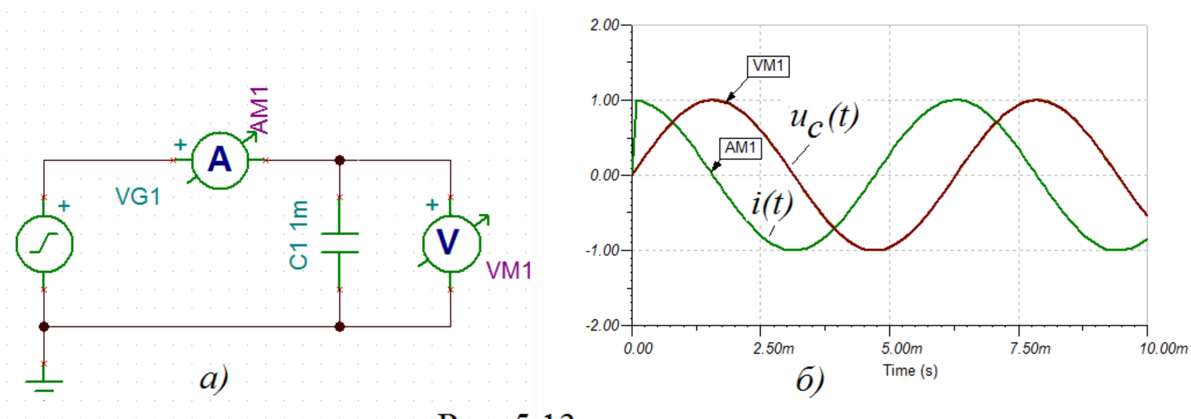


Рис. 5.13

5.9. Комплексное сопротивление цепи

В цепи рис.5.14 резистор, индуктивность и емкость соединены последовательно и подключены к источнику напряжения $e(t)$.

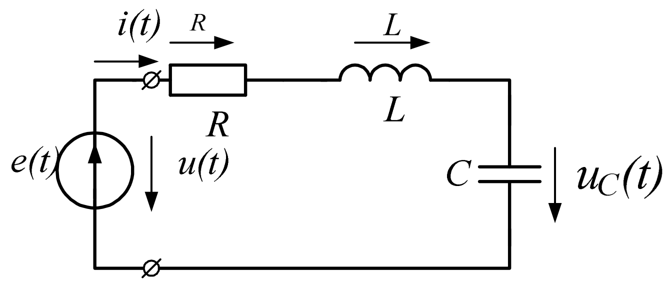


Рис.5.14

Для сигнала произвольной формы уравнение по второму закону Кирхгофа записывают так:

$$u_R + u_L + u_C = e(t) = u(t) \qquad (5.46).$$

Перепишем это уравнение в интегро-дифференциальной форме:

$$iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} idt = u(t). \qquad (5.47)$$

Если в цепи действует гармонический источник напряжения

$$e(t) = E_m sin(\omega t + \psi_E) = U_m sin(\omega t + \psi_U), \qquad (5.48)$$

мы можем подставить в (5.47) комплексную функцию времени для тока, перейти к комплексным амплитудам и записать уравнение в символической форме:

$$\underline{U}_{mR} + \underline{U}_{mL} + \underline{U}_{mC} = R\underline{I}_m + j\omega L\underline{I}_m - j\frac{1}{\omega c}\underline{I}_m = \underline{I}_m\underline{Z} = \underline{U}_m, \qquad (5.49)$$

где

$$\underline{Z} = R + j\omega L - j\frac{1}{\omega C} = R + jX_L - jX_C = R + jX = Ze^{j\varphi} \qquad (5.50)$$

комплексное сопротивление цепи (КС).

Из формулы (5.49) получим:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{I}_m} = \frac{U_m e^{j\Psi_U}}{I_m e^{j\psi_I}} = Ze^{j\varphi}. \qquad (5.51)$$

Модуль комплексного сопротивления (*полное сопротивление* цепи на переменном токе):

$$Z = |\underline{Z}| = \frac{U_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + X^2}; \qquad (5.52)$$

аргумент комплексного сопротивления:

$$\varphi = \Psi_U - \Psi_I = arctg\frac{X}{R}; \qquad (5.53)$$

В тригонометрической форме записи:

$$\underline{Z} = Z\,\boldsymbol{cos}\,\varphi + jZ\,\boldsymbol{sin}\,\varphi \qquad (5.54)$$

Активное сопротивление цепи R является действительной частью комплексного сопротивления и всегда положительно.

Реактивное сопротивление цепи $X = X_L - X_C = \omega L - \dfrac{1}{\omega c}$ является мнимой частью комплексного сопротивления.

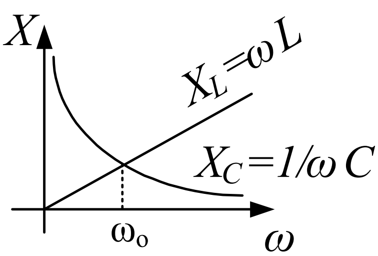


Рис.5.15

Реактивное сопротивление индуктивности $X_L = \omega L > 0$.

Реактивное сопротивление емкости $X_C = \dfrac{1}{\omega c} > 0$.

Реактивное сопротивление цепи $X = X_L - X_C$ может быть положительным или отрицательным.

На рис.5.15 показаны зависимости реактивных сопротивлений индуктивности и емкости от частоты. На частоте ω_0 индуктивное сопротивление становится равным емкостному и реактивное сопротивление цепи $X = 0$.

Треугольник сопротивлений

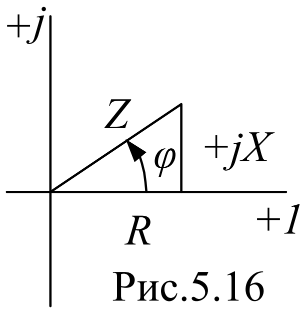


Рис.5.16

Комплексное сопротивление $\underline{Z} = \sqrt{R^2 + X^2}\,e^{j\varphi}$ можно изобразить на комплексной плоскости (рис.5.16). Активное сопротивление отложено по оси +1, реактивное сопротивление отложено по оси +*j*. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна модулю комплексного сопротивления $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$.

Угол треугольника:

$$\varphi = arctg\frac{X}{R} = arctg\frac{X_L - X_C}{R}.$$

Причем выполняется условие: $(-90^o < \varphi < 90^o)$.

Если $X_L > X_C$, реактивное сопротивление $X > 0$ и имеет индуктивный характер, то $0^o < \varphi < 90^o$.

Если $X_L < X_C$, реактивное сопротивление $X < 0$ и имеет емкостной характер, то $-90^o < \varphi < 0^o$.

5.10. Символический метод расчёта

Символическим методом называют расчёт цепей гармонического тока с использованием комплексных амплитуд и комплексных сопротивлений.

Для расчета символическим методом схему цепи для мгновенных значений (рис.5.14) заменяют *символической схемой замещения* рис.5.17а или рис.5.17б.

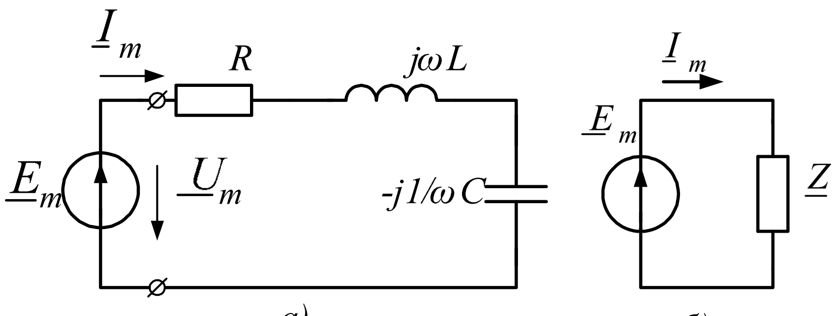


Рис.5.17

В схеме рис.5.17а источник напряжения с комплексной амплитудой $\underline{E}_m$ включен последовательно с активным сопротивлением R, комплексным сопротивлением индуктивности $\underline{Z}_L = j\omega L$ и комплексным сопротивлением емкости $\underline{Z}_C = -j\dfrac{1}{\omega C}$.

В схеме рис.5.17б использовано общее комплексное сопротивление цепи $\underline{Z} = R + j\omega L - j\dfrac{1}{\omega C}$. Комплексную амплитуду тока в схеме рис.5.17б находим по формуле: $\underline{I}_m = \dfrac{\underline{E}_m}{\underline{Z}}$.

Пример 5.8.

Найти полное сопротивление цепи рис.5.18.

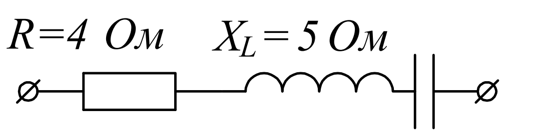


Рис.5.18

Для элементов цепи рис.5.18 заданы: активное сопротивление $R = 4\,Ом$, индуктивное сопротивление $X_L = 5\ Ом$, емкостное сопротивление $X_C = 2\,Ом$. Полное сопротивление равно модулю комплексного сопротивления цепи.

Находим комплексное сопротивление (КС):

$$\underline{Z} = R + j(X_L - X_C) = 4 + j(5-2) = 4 + j3.$$

Находим модуль КС и полное сопротивление цепи:

$$|\underline{Z}| = \sqrt{16+9} = 5\,Ом = Z.$$

Найдем также аргумент КС: $\varphi = arctg\dfrac{X}{R} = arctg\dfrac{3}{4} = 37^0$.

Запишем КС в показательной форме: $\underline{Z} = 5e^{j37^0}$.

5.11. Векторная диаграмма тока и напряжения в неразветвлённой цепи

Напомним, что *векторной диаграммой называется совокупность векторов напряжения и токов, построенных из начала комплексной плоскости с соблюдением взаимной ориентации*. Для построения векторной диаграммы надо сначала рассчитать комплексные амплитуды всех токов и напряжений в цепи, которые и определяют положения векторов токов и напряжений на комплексной плоскости.

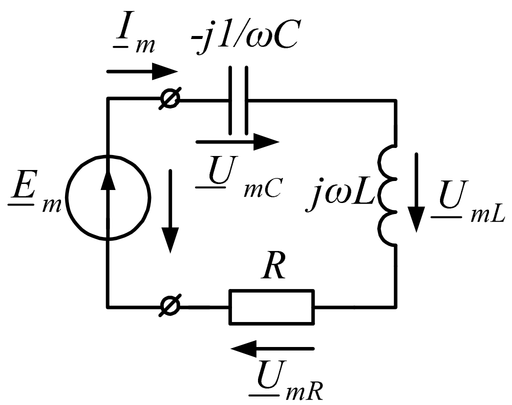


Рис.5.19

Пусть в цепи рис.5.19 задана $e(t) = E_m \sin(\omega t + \Psi_E)$. Выполним расчет символическим методом.

Переходим к комплексной амплитуде напряжения: $\underline{E}_m = E_m e^{j\Psi_E}$.

Рассчитываем реактивные сопротивления:

$$X_L = \omega L, X_c = \frac{1}{\omega c}.$$

Находим комплексное сопротивление цепи:

$$\underline{Z} = R + jX = R + j(X_L - X_c) = Ze^{j\varphi}. \qquad (5.55)$$

Модуль КС: $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$, аргумент $\varphi = arctg\dfrac{X}{R}$.

Находим комплексную амплитуду тока:

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}} = \frac{E_m e^{j\Psi_E}}{Ze^{j\varphi}} = \frac{U_m}{Z} e^{j(\Psi_E - \varphi)} = I_m e^{j\Psi_I}. \qquad (5.56)$$

Начальная фаза тока: $\Psi_I = \Psi_E - \varphi$.

Вычислим комплексные амплитуды напряжений на элементах цепи:

$$\underline{U}_{mR} = \underline{I}_m R = I_m R\, e^{j\Psi_I}; \ \underline{U}_{mL} = jX_L \underline{I}_m = \omega L I_m e^{j(\Psi_I + 90^0)};$$

$$\underline{U}_{mC} = -j\frac{1}{\omega c}\underline{I}_m = \frac{1}{\omega c} I_m e^{j(\Psi_I - 90^0)}.$$

На комплексной плоскости рис.5.20 с учетом масштабов по вычисленным комплексным амплитудам строим векторы токов и напряжений.

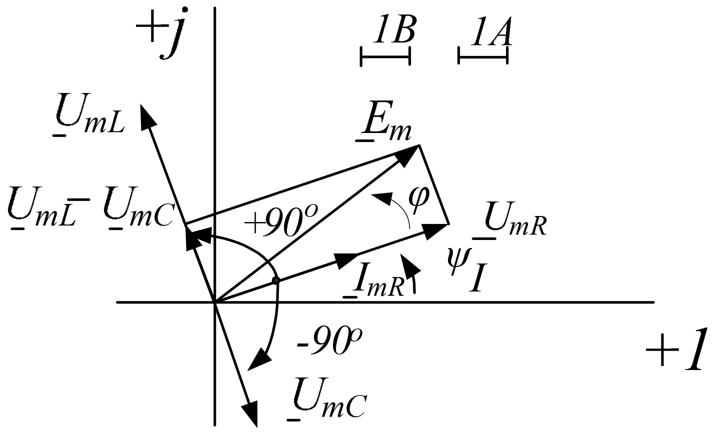


Рис.5.20

5.12. Резонанс напряжений

Резонансом напряжений (последовательным резонансом) называется режим работы пассивной цепи, при котором ток на входе цепи по фазе совпадает с напряжением и сопротивление становится чисто активным.

Резонанс напряжений возникает в цепи с последовательным соединением индуктивности и емкости (рис.5.19).

В цепи рис.5.19 будем считать начальную фазу источника напряжения $\Psi_E = 0$. По формуле (5.56) запишем:

$$I_m = \frac{U_m}{Z} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}. \tag{5.57}$$

Получили зависимость амплитуды тока от частоты, которую называют *амплитудно-частотная характеристика тока (АЧХ).*

Фазо-частотная характеристика тока (ФЧХ) – это зависимость фазы тока от частоты:

$$\Psi_I = -\varphi = -arctg\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \tag{5.58}$$

На рис.5.15 было показано, что на некоторой частоте ω_0 индуктивное сопротивление становится равным емкостному сопротивлению:

$$X_L = X_C, \quad \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}. \qquad (5.58)$$

Частота ω_0 называется резонансной и равна:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \qquad (5.59)$$

На резонансной частоте эквивалентное реактивное сопротивление цепи:

$$X_Э = X_L - X_C = 0, \qquad (5.60)$$

Аргумент комплексного сопротивления:

$$\varphi = arctg\frac{X_Э}{R} = 0; \qquad (5.61)$$

сопротивление цепи уменьшается до минимального значения и становится чисто активным:

$$\underline{Z} = R. \qquad (5.62)$$

Ток в последовательной цепи рис.5.19 на резонансной частоте становится максимальным и равным:

$$I_{mрез} = \frac{U_m}{R}. \qquad (5.63)$$

Пример 5.9

В последовательной цепи рис. 5.21 $R_1 = 20\,Ом$, $L_1 = 10\,мГн$, $C_1 = 47\,нФ$. Амплитуда генератора напряжения равна 1 В. Найти резонансную частоту тока. По формулам (5.57) и (5.58) рассчитать и построить АЧХ и ФЧХ тока. Выполнить моделирование схемы рис.5.21 в режиме *Analysis - AC Analysis-- AC Transfer Characteristic* и получить графики АЧХ и ФЧХ и сравнить их с расчетными.

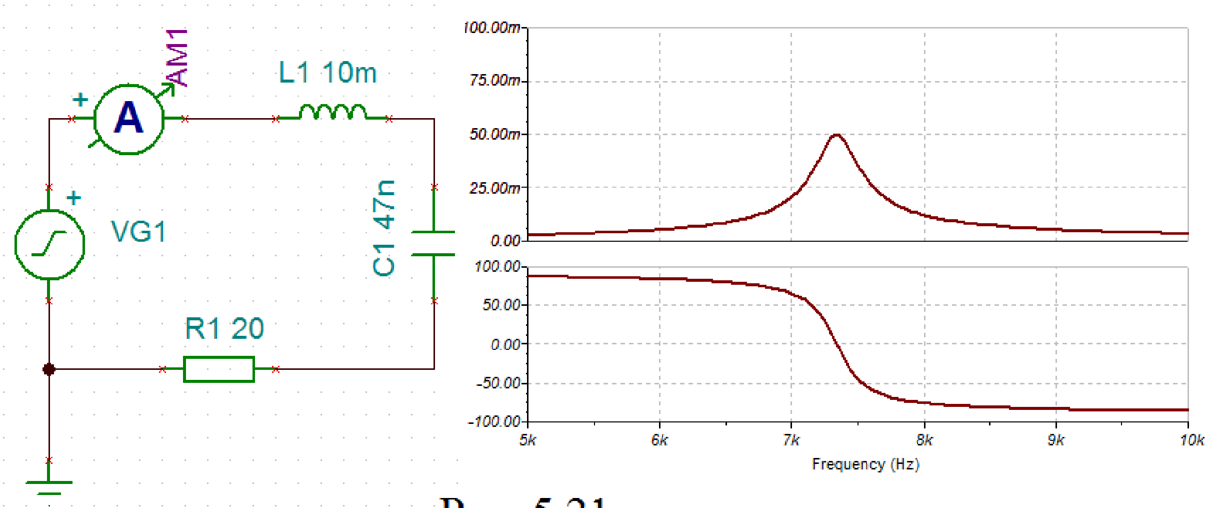


Рис. 5.21

Пример 5.10.

На резонансной частоте, рассчитанной в примере 5.9, выполнить моделирование схемы рис.5.22 в режиме *Analysis-- Transient*. Получить графики напряжений на резисторе, индуктивности и емкости. Объяснить вид графиков.

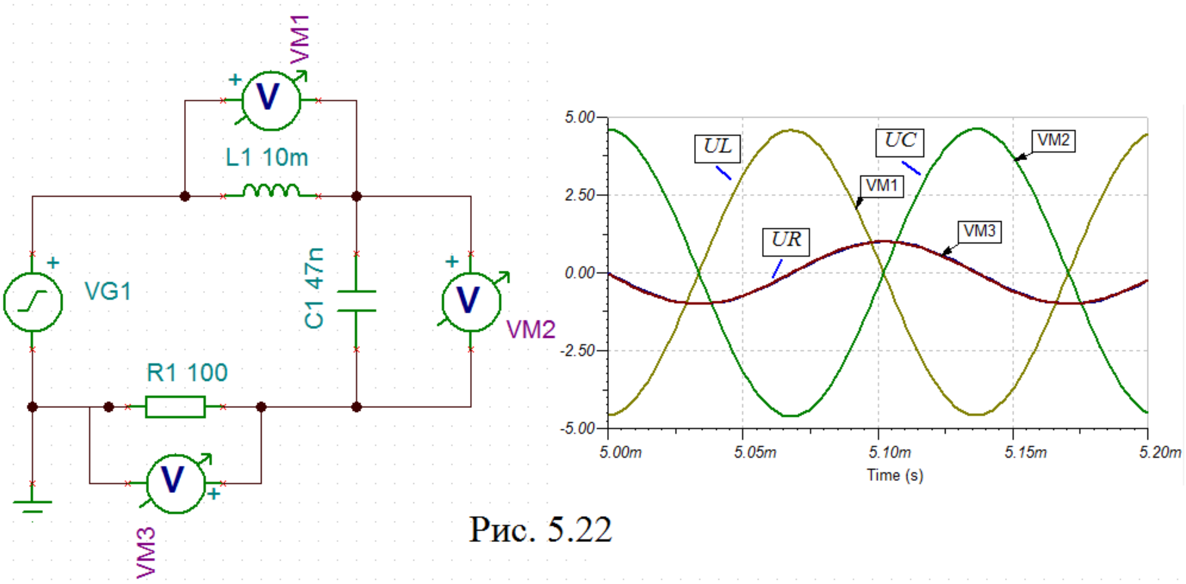


Рис. 5.22

5.13. Расчёт напряжения и токов при параллельном соединении *R,L,C*

В схеме рис.5.23 задано входное напряжение $u(t) = U_m \sin(\omega t + \Psi_U)$ и параметры параллельно соединенных элементов R, L и C. Требуется найти токи в ветвях и входной ток.

Для мгновенных значений тока в узле a выполняется первый закон Кирхгофа:

$$i = i_R + i_L + i_C.$$

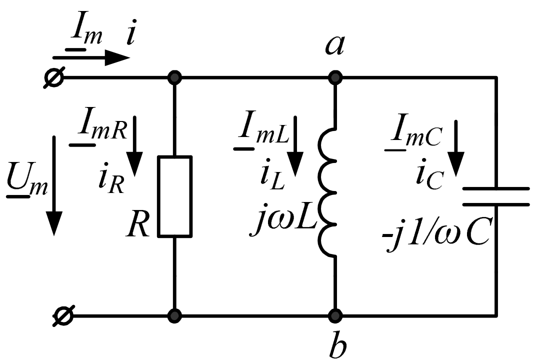


Рис.5.23

Для гармонического тока первый закон Кирхгофа действует и для комплексных амплитуд тока:

$$\underline{I}_m = \underline{I}_{mR} + \underline{I}_{mL} + \underline{I}_{mC}. \quad (5.64)$$

Выразим комплексные амплитуды токов через комплексную амплитуду напряжения $\underline{U}_m = U_m e^{j\Psi_U}$ и комплексные сопротивления ветвей:

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{U}_m}{R} + \frac{\underline{U}_m}{j\omega L} + \frac{\underline{U}_m}{-j\dfrac{1}{\omega C}} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}_{вх}} = \underline{U}_m \underline{Y}. \qquad (5.65)$$

На рис.5.24 показана векторная диаграмма токов и напряжения в цепи.

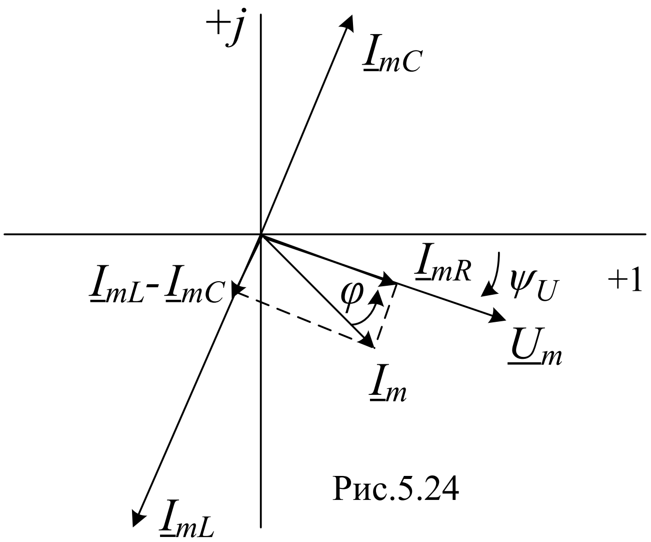


Рис.5.24

Комплексная проводимость

Разделим (5.65) на $\underline{U}_m$ и получим выражение для комплексной проводимости параллельного соединения элементов *R,L,C*:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}_{вх}} = \frac{1}{R} - j\frac{1}{\omega L} + j\omega C = \frac{1}{R} - j\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right) = g - jb \,..(5.66)$$

В этом выражении:

$g = \dfrac{1}{R}$ - активная проводимость цепи;

$b = b_L - b_C = \dfrac{1}{\omega L} - \omega C$ - реактивная проводимость (может быть положительной, отрицательной и равной нулю);

$b_L = \dfrac{1}{\omega L}$ - реактивная проводимость индуктивности;

$b_C = \omega C$ - реактивная проводимость емкости;

$\underline{Y} = y e^{-j\varphi}$ - комплексная проводимость;

$y = \sqrt{g^2 + b^2}$ - полная проводимость, равная модулю комплексной проводимости;

$\varphi = \mathrm{arctg}\dfrac{b}{g}$ - аргумент комплексной проводимости.

П р а в и л о : *При параллельном соединении суммируются комплексные проводимости ветвей*: $\underline{Y}_{вх} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3$.

5.14. Переход от сопротивления к проводимости

Пусть задано комплексное сопротивление ветви $\underline{Z} = R + jX$. Его аргумент $\varphi_Z = arctg\dfrac{X}{R}$.

Найдем проводимость ветви:

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{(R + jX)(R - jX)} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2} = \\ = \frac{R}{R^2 + X^2} - j\frac{X}{R^2 + X^2} = g - jb = ye^{-j\varphi_Y};$$

Здесь:

активная проводимость: $g = \dfrac{R}{R^2 + X^2}$;

реактивная проводимость: $b = \dfrac{X}{R^2 + X^2}$;

аргумент комплексной проводимости:

$$\varphi_Y = arctg\frac{b}{g} = arctg\frac{X}{R} = \varphi_Z.$$

5.15. Резонансом токов

Резонансом токов (параллельным резонансом) называют режим работы параллельной цепи, в котором реактивные проводимости ветвей компенсируют друг друга ($b = b_L - b_C = 0$)*, входная проводимость цепи становится чисто активной* $\underline{Y}_{вх} = \underline{Y}_{рез} = g_{рез} = \dfrac{1}{R_{рез}}$ *и входной ток совпадает по фазе с напряжением.*

На частоте параллельного резонанса ω_0 выполняется условие:

$$b = b_L - b_C = \frac{1}{\omega_0 L} - \omega_0 C = 0, \tag{5.67}$$

и, следовательно, резонансная частота

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \tag{5.68}$$

Напряжение на зажимах параллельной цепи при резонансе равно:

$$\underline{U}_{mрез} = \frac{\underline{I}_{mрез}}{\underline{Y}_p} = \underline{I}_{mрез} R_{рез} \tag{5.69}$$

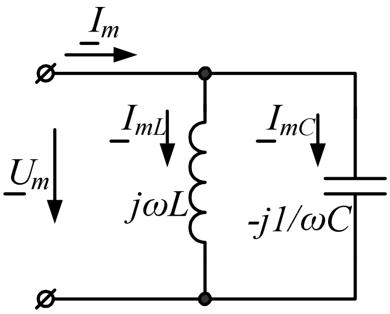


Рис.5.25

В цепи рис.5.25 без потерь ($g = 0$) при параллельном резонансе резонансная проводимость $\underline{Y}_p = -j(b_L - b_C) = 0$, а *входное сопротивление в цепи без потерь при параллельном резонансе становится бесконечно большим*:

$$\underline{Z}_{вх} = \frac{jX_L(-jX_C)}{jX_L - jX_C} = \frac{jX_L(-jX_C)}{0} = \infty$$

Пример 5.11

В схеме рис.5.26 действует гармонический источник тока IG1 с амплитудой 1 мА. Найти частоту параллельного резонанса по формуле (5.68). На резонансной частоте вычислить резонансное сопротивление, напряжение на зажимах цепи и токи в ветвях. Построить графики токов и напряжения. Выполнить моделирование и сравнить полученные графики токов с расчетными графиками.

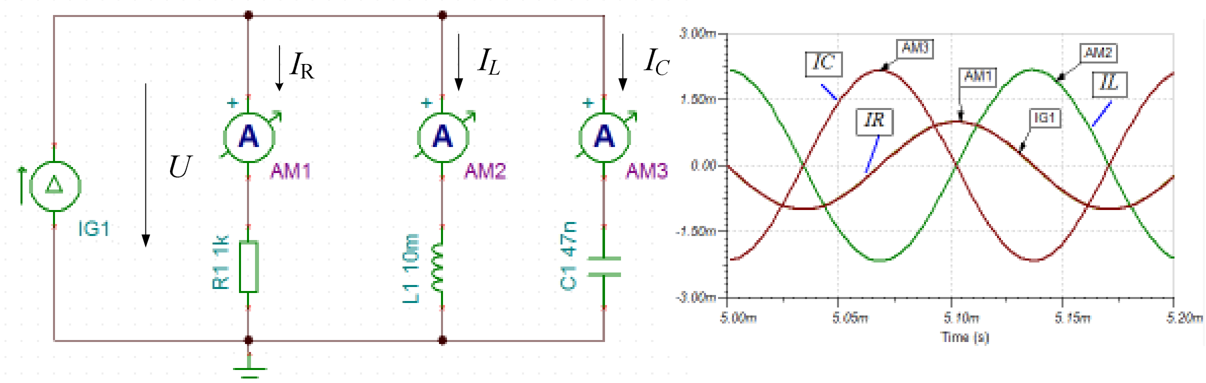


Рис. 5.26

Выводы.

При параллельном резонансе напряжение на входе цепи совпадает по фазе с входным током. Ток в индуктивности опережает входной ток на 90°. Ток в емкости отстает от входного тока на 90° и равен по модулю току в индуктивности. В результате ток в емкости компенсирует ток в индуктивности, входной ток равен току в резисторе.

5.16. Основные законы цепей в символической форме

Обобщенный закон Ома:

В символической схеме замещения рис.5.27: $\underline{U}_{mab} = \underline{Z}\,\underline{I}_m - \underline{E}_{m1} + \underline{E}_{m2}$.

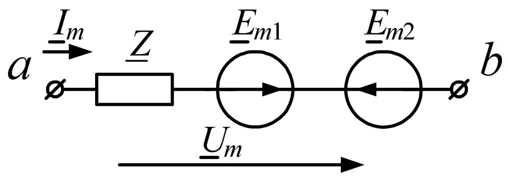


Рис.5.27

В общем случае *обобщенный закон Ома* формулируется так:

Комплексная амплитуда тока на участке цепи равна комплексной амплитуде напряжения на этом участке, взятой по направлению тока, плюс/минус комплексные амплитуды источников напряжения, деленной на комплексное сопротивление участка цепи. Со знаком плюс берут комплексные амплитуды источников напряжения, совпадающих по направлению с током.

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{U}_m \pm \underline{E}_{mk}}{\underline{Z}}. \tag{5.70}$$

Первый закон Кирхгофа:

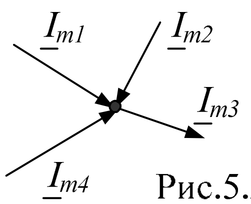


Рис.5.28

В символической схеме замещения (рис.5.28) первый закон Кирхгофа выполняется для комплексных амплитуд токов:

$$-\underline{I}_{m1} - \underline{I}_{m2} + \underline{I}_{m3} - \underline{I}_{m4} = 0$$

Второй закон Кирхгофа:

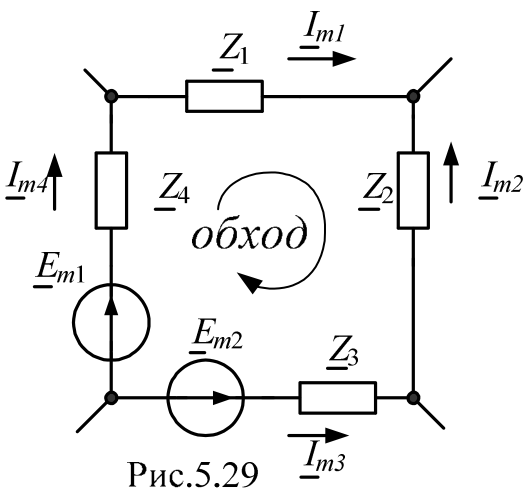


Рис.5.29

В символической схеме замещения (рис.5.29) второй закон Кирхгофа выполняется для комплексных амплитуд токов и напряжений и комплексных сопротивлений:

$$\underline{I}_{m1}\underline{Z}_1 - \underline{I}_{m2}\underline{Z}_2 - \underline{I}_{m3}\underline{Z}_3 + \underline{I}_{m4}\underline{Z}_4 = \\ = \underline{E}_1 - \underline{E}_2 \tag{5.71}$$

Алгебраическая сумма комплексных амплитуд падений напряжений в любом замкнутом контуре равна алгебраической сумме комплексных амплитуд ЭДС, действующих в контуре. Со знаком плюс берут напряжения и ЭДС, совпадающие с направлением обхода контура.

Вывод: *Поскольку основные законы в символической форме выполняются все преобразования и метода расчета гармонического тока в символической форме аналогичны методам расчёта цепей постоянного тока при условии замены:*

$$E \to \underline{E}_m,\ J \to \underline{J}_m, U \to \underline{U}_m, R \to \underline{Z} = R + jX,\ G \to \underline{Y} = g + jb$$

5.17. Порядок расчета цепи символическим методом

В цепи рис.5.30 действуют два источника сигналов $e_1(t) = E_{m1}\,\boldsymbol{sin}(\omega t + \Psi_{E_1})$ и $e_2(t) = E_{m2}\,\boldsymbol{cos}(\omega t + \Psi_{E_2})$. Расчет цепи надо выполнять в такой последовательности:

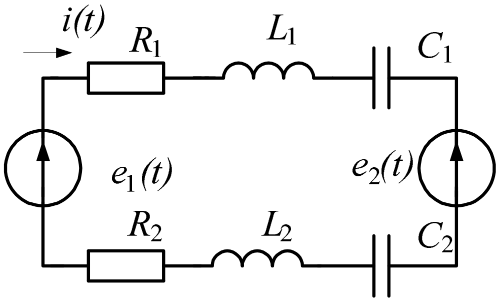


Рис.5.30

1. Приводим запись всех источников сигнала к функции синуса, используя формулу:

$$\boldsymbol{cos}(\omega t + \Psi_{E_2}) = \boldsymbol{sin}(\omega t + \Psi_{E_2} + 90^0).$$

2. Определяем комплексные амплитуды напряжений:

$$\underline{E}_{m1} = E_{m1}e^{j\Psi_E},\ \underline{E}_{m2} = E_{m2}e^{j(\Psi_{E2} + 90^0)}.$$

3. Находим комплексные сопротивления:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}),\quad \underline{Z}_2 = R_2 + j(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}).$$

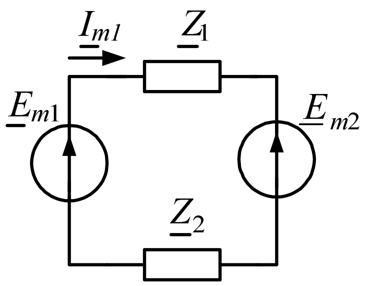


Рис.5.31

4. Переходим к символической схеме замещения (рис.5.30).

5. Находим комплексную амплитуду тока.

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{E}_{m1} - \underline{E}_{m2}}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = I_m e^{j\Psi_I}.$$

6. Находим мгновенное значение тока.

$$i(t) = I_m\,\boldsymbol{sin}(\omega t + \Psi_I).$$

5.18. Топографические диаграммы

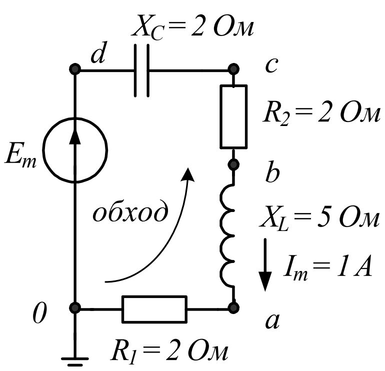


Рис.5.32

Топографическими диаграммами *называют изображение на комплексной плоскости комплексных потенциалов различных точек электрической цепи. Нулевой потенциал соответствует началу координат.*

Пример 5.12. Построить топографическую диаграмму для цепи рис.5.32 и найти E_m.

На схеме цепи заданы активные и реактивные сопротивления и комплексная амплитуда тока. Начальную фазу тока будем считать нулем. Заземлим нижнюю точку цепи и выполним расчет комплексных потенциалов для всех точек цепи, обходя цепи против направления тока:

$$\underline{\varphi}_{ma} = \underline{I}_m R = 2\,B;$$

$$\underline{\varphi}_{mb} = \underline{\varphi}_{ma} + j5 \cdot \underline{I}_m = 2 + j5B;$$

$$\underline{\varphi}_{mc} = \underline{\varphi}_{mb} + 2\underline{I}_m = 4 + j5B;$$

$$\underline{\varphi}_{md} = \underline{\varphi}_{mc} - j2 \cdot \underline{I}_m = 4 + j3B = \underline{E}_m.$$

Модуль комплексной амплитуды $E_m = \sqrt{16+9} = 5\,B.$

Изобразим рассчитанные комплексные потенциалы точками на комплексной плоскости рис.5.33. Получим топографическую диаграмму. Построим на топографической диаграмме вектор тока $\underline{I}_m$ = 1 А. Вектор $\underline{E}_m = 4 + j3B$, направленный из нуля в точку с потенциалом $\underline{\varphi}_{md}$, изображает комплексную амплитуду напряжения.

Топографическая диаграмма позволяет определять комплексные амплитуды напряжения между различными точками цепи. Например, вектор $\underline{U}_{mdb} = \underline{\varphi}_{md} - \underline{\varphi}_{mb}$ на топографической диаграмме направлен к точке, соответствующей первому индексу d, равен $2 - j2\,B$ и определяет комплексную амплитуду напряжения между точками d и b.

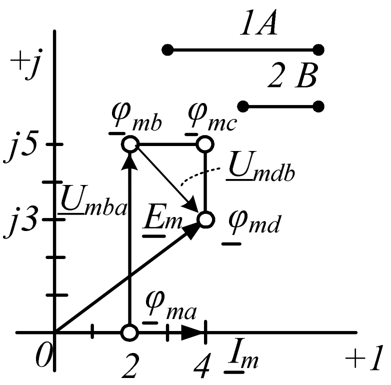
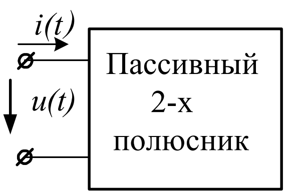


Рис.5.33

Если векторы направлены в сторону условно более высокого потенциала при обходе цепи против направления тока, то они будут правильно ориентированы относительно вектора тока. Так вектор $\underline{U}_{mba} = \underline{\varphi}_{mb} - \underline{\varphi}_{ma}$ определяет комплексную амплитуду напряжения на индуктивности и опережает вектор тока $\underline{I}_m$ на 90°.

5.19. Энергетические соотношения в цепях переменного тока. Мгновенная и средняя мощность



Рассмотрим пассивный двухполюсник, подключенный к напряжению $u(t)$. Входной ток равен $i(t)$.

Мгновенная мощность определяется как скорость изменения энергии:

$$p(t) = u(t)i(t) = \frac{dW(t)}{dt} = u(t)\frac{dq}{dt} \qquad (5.72)$$

Пусть в цепи гармонического тока:

$$u(t) = U_m \sin \omega t.$$

Найдем комплексную амплитуду:

$$\underline{U}_m = \underline{U}_m e^{j0^o} = U_m.$$

Входное сопротивление двухполюсника:

$$\underline{Z} = R + jX = Ze^{j\varphi},\ Z = \sqrt{R^2 + X^2},\ \varphi = arctg\frac{X}{R}.$$

Находим ток: $\underline{I}_m = \dfrac{\underline{U}_m}{Ze^{j\varphi}} = I_m e^{-j\varphi} = \dfrac{U_m}{Z}e^{-j\varphi}$.

Мгновенное значение тока равно: $i(t) = I_m \sin(\omega t - \varphi)$.

Мгновенная мощность:

$$p(t) = u(t)\cdot i(t) = U_m \sin \omega t \cdot I_m \sin(\omega t - \varphi) =$$

$$= \frac{1}{2}U_m I_m\left[\cos\varphi - \cos(2\omega t - \varphi)\right]. \qquad (5.73)$$

График мгновенной мощности показан на рис.5.34.

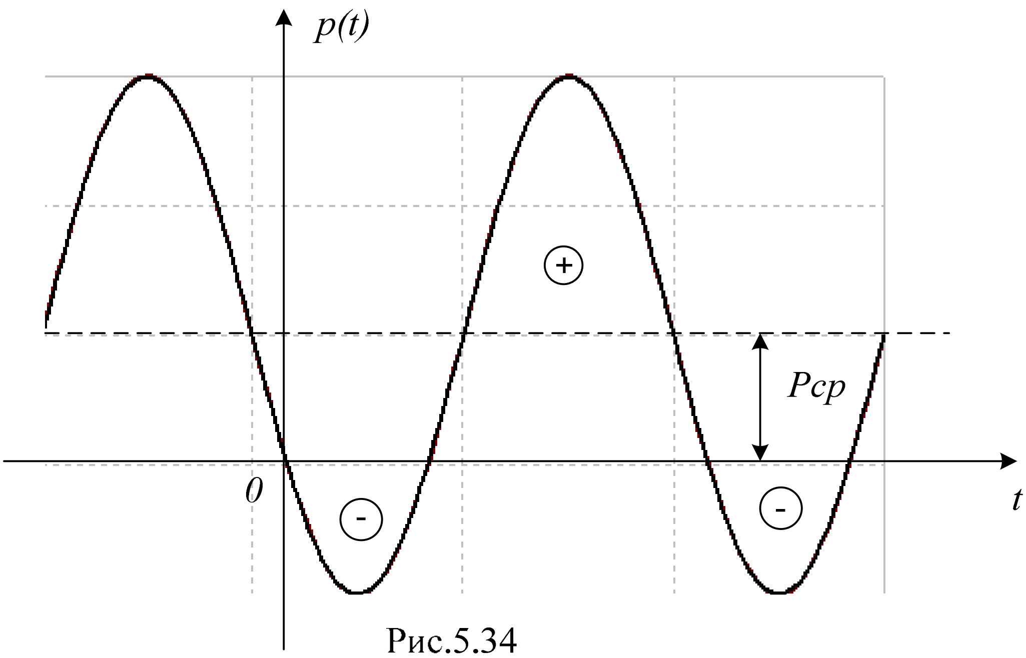


Рис.5.34

Мгновенная мощность изменяется с частотой 2ω и может принимать положительные и отрицательные значения. Положительная мгновенная мощность поступает в цепь и потребляется в ней. Отрицательная мгновенная мощность отдается из цепи в источники.

Среднее значение мгновенной мощности за период называется *активной мощностью*:

$$P_{cp} = P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt = \frac{U_m I_m}{2}\boldsymbol{cos}\,\varphi. \tag{5.74}$$

В пассивном двухполюснике аргумент входного сопротивления $\varphi = arctg\dfrac{X}{R}$ лежит в пределах $\left(-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le +\dfrac{\pi}{2}\right)$. Следовательно, $0 \le \boldsymbol{cos}\,\varphi \le 1$ и активная мощность $P \ge 0$. Активная мощность будет равна нулю в пассивном двухполюснике без потерь, когда $R = 0$.

5.20. Действующие значения токов и напряжения

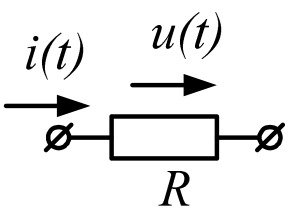


Рис.5.35

Вычислим мощность, которую выделяет гармонический ток в активном сопротивлении $\underline{Z} = R$. В нем

$$\varphi = arctg\frac{X}{R} = arctg\frac{0}{R} = 0, \quad \boldsymbol{cos}\,\varphi = 1.$$

Ток совпадает по фазе с напряжением. По формуле (5.74) находим активную мощность:

$$P = P_{cp} = \frac{U_m I_m}{2} = \frac{I_m^2 R}{2}, \tag{5.75}$$

так как $U_m = I_m \cdot R$.

Постоянный ток выделяет в том же сопротивлении мощность:

$$P = UI = I^2 R. \tag{5.76}$$

О п р е д е л е н и е. ***Действующее значение переменного тока*** *(напряжения) равно по величине такому постоянному току (напряжению), который выделяет в сопротивлении R то же количество тепла, что и переменный ток.*

Приравниваем мощности (5.75) и (5.76):

$$I^2 R = \frac{I_m^2 R}{2}. \tag{5.77}$$

Получим *действующее значение тока*

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \tag{5.78}$$

Аналогично получим действующие значения напряжений:

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \quad E = \frac{E_m}{\sqrt{2}}. \tag{5.79}$$

Вместо комплексных амплитуд в расчетах можно применять *комплексные действующие значения*. Их обозначают подчеркиванием, но индекс амплитуды «*m*» не ставят:

$$\underline{I} = \frac{\underline{I}_m}{\sqrt{2}}, \ \underline{U} = \frac{\underline{U}_m}{\sqrt{2}}, \ \underline{E} = \frac{\underline{E}_m}{\sqrt{2}}. \qquad (5.80)$$

В электрической сети и электрических приборах указывают номинальные действующие значения напряжений и токов. Так, для стандартного действующего напряжения в сети $U = 220\,B$ амплитудное значение будет равно $U_m = 220\sqrt{2} = 311\,B$. Действующие значения напряжений и токов измеряют вольтметрами и амперметрами. Амплитудные значения измеряют осциллографами.

Через комплексные действующие значения комплексное сопротивление выражают так:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}. \qquad (5.81)$$

Если расчет проведен для комплексных действующих значений, при переходе к мгновенным значениям модуль действующего тока надо умножить на $\sqrt{2}$:

$$i(t) = I\sqrt{2}\,\boldsymbol{sin}(\omega t - \varphi) = I_m\,\boldsymbol{sin}(\omega t - \varphi). \qquad (5.82)$$

5.21. Активная, реактивная и полная мощность

Активная мощность потребляется пассивным двухполюсником, всегда положительна и вычисляется по формулам:

$$P = \frac{U_m I_m}{2}\boldsymbol{cos}\,\varphi = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{I_m}{\sqrt{2}}\boldsymbol{cos}\,\varphi =$$

$$= UI\,\boldsymbol{cos}\,\varphi = IZI\,\boldsymbol{cos}\,\varphi = I^2 Z\,\boldsymbol{cos}\,\varphi = I^2 R = \frac{U^2}{R}. \qquad (5.83)$$

Особо надо запомнить формулу для активной мощности, выраженной через действующие значения напряжения и тока:

$$P = UI\,\boldsymbol{cos}\,\varphi. \qquad (5.84)$$

Активная мощность измеряется в ваттах [Вт].

Полная мощность равна произведению действующих значений напряжения и тока:

$$S = UI = I^2 Z = \frac{U^2}{Z}. \qquad (5.85)$$

Полная мощность измеряется в вольт-амперах [ВА].

Активная мощность связана с полной мощностью такой важной формулой:

$$P = S\,\boldsymbol{cos}\,\varphi. \qquad (5.86)$$

Важной характеристикой качества потребителя электрической энергии является *коэффициент мощности*:

$$\boldsymbol{cos}\,\varphi = \frac{P}{S}. \qquad (5.87)$$

Коэффициент мощности стремятся сделать близким к единице. Тогда полезную активную мощность потребитель получит при меньших значениях входного тока и, следовательно, при меньших потерях в проводах сети.

Реактивная мощность обусловлена реактивной составляющей входного сопротивления двухполюсника и вычисляется по формулам:

$$Q = S\,\boldsymbol{sin}\,\varphi = UI\,\boldsymbol{sin}\,\varphi = IZI\,\boldsymbol{sin}\,\varphi = I^2 X = I^2 (X_L - X_C) \quad (5.88).$$

Измеряется реактивная мощность в вольт-амперах реактивных [Вар].

Если комплексная нагрузка имеет индуктивный характер ($\varphi > 0$), то реактивная мощность $Q > 0$.

Если комплексная нагрузка имеет емкостной характер ($\varphi < 0$), то $Q < 0$.

Реактивная мощность не потребляется в цепи, а характеризует обмен мощности между источниками и накопительными элементами *L* и *C*.

Треугольник мощности

Соотношения между активной, реактивной и полной мощностью можно изобразить в виде треугольника мощности (рис.5.36)

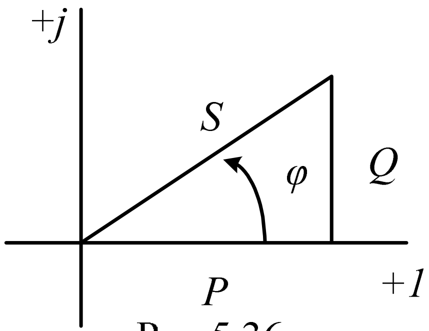


Рис.5.36

Катеты треугольника мощности равны:

$$P = S\,\boldsymbol{cos}\,\varphi \text{ и } Q = S\,\boldsymbol{sin}\,\varphi.$$

Гипотенуза равна: $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ (5.89)

Треугольник мощности подобен треугольнику сопротивлений.

5.22. Расчёт мощности в комплексной форме

Пусть на входе пассивного двухполюсника заданы мгновенные значения напряжения $u(t) = U_m\,\boldsymbol{sin}\,\omega t$ и тока $i(t) = I_m\,\boldsymbol{sin}(\omega t - \varphi)$.

Запишем комплексные действующие значения:

$$\underline{U} = \frac{\underline{U}_m}{\sqrt{2}} = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \text{ и } \underline{I} = \frac{\underline{I}_m}{\sqrt{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} e^{-j\varphi}. \qquad (5.90)$$

Возьмем комплексно-сопряженное значение тока $\underline{I}^{*} = Ie^{+j\varphi}$ и вычислим *комплексную мощность* по формуле:

$$\tilde{S} = \underline{U}\underline{I}^{*} = \underline{I}\underline{Z}\underline{I}^{*} = I^2\underline{Z} = I^2(R + jX) = I^2R + jI^2X = P + jQ \quad (5.91)$$

Сравнивая результат с (5.83) и (5.88), мы видим, что *действительная часть комплексной мощности равна активной мощности, а мнимая часть равна реактивной мощности цепи.*

Реактивная мощность равна нулю, если в цепи отсутствуют реактивные элементы L и C, или эквивалентное реактивное сопротивление этих элементов становится равным нулю ($X = 0$).

Реактивная мощность Q характеризует накопление и возвращение энергии в цепи, содержащей элементы L и C.

5.23. Баланс мощностей

В цепи гармонического тока выполняется баланс комплексных мощностей источников энергии и потребителей энергии:

$$\sum_{n}\tilde{S}_{ист} = \sum_{k}\tilde{S}_{потр}. \quad (5.92)$$

Следовательно, должен выполняться баланс для действительных и мнимых частей равенства (5.92).

Значит выполняются:

баланс активных мощностей:

$$\sum_{n}P_{ист} = \sum_{k}P_{потр} \quad \text{и} \quad (5.93)$$

баланс реактивных мощностей:

$$\sum_{n}Q_{ист} = \sum_{k}Q_{потр}. \quad (5.94)$$

В пассивном двухполюснике реактивную мощность рассчитывают как сумму реактивных мощностей всех ветвей:

$$Q = \sum_{k}I_k^2(X_{Lk} - X_{Ck}), \quad (5.95)$$

где I_k -- действующее значение тока k - ой ветви,

X_{Lk} - индуктивное сопротивление k - ой ветви,

X_{Ck} - емкостное сопротивление k - ой ветви.

Пример 5.13.

В цепи рис.5.37 заданы параметры элементов в омах и действующее значение источника напряжения $\underline{E} = \frac{10}{\sqrt{2}}B$. Рассчитать токи и проверить баланс мощностей.

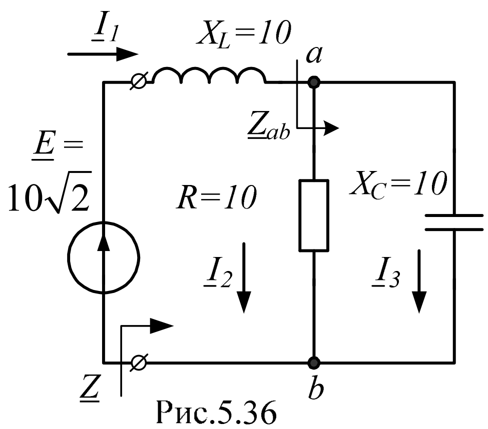


Рис.5.36

Р е ш е н и е

Находим параллельное соединение резистора и емкости:

$$\underline{Z}_{ab}=\frac{10(-j10)}{10-j10}=\frac{-j10}{\sqrt{2}e^{-j45^o}}=$$

$$\frac{10}{\sqrt{2}}e^{-j45^o}=\frac{10}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1-j)=5-j5\,Ом$$

Находим входное сопротивление двухполюсника:

$$\underline{Z}=jX_L+\underline{Z}_{ab}=j10+5-j5\,Ом=5+j5=5\sqrt{2}e^{j45^o}\,Ом.$$

Далее находим:

входной ток $\underline{I}_1=\dfrac{\underline{E}}{\underline{Z}}=\dfrac{10}{\sqrt{2}\cdot5\cdot\sqrt{2}e^{+j45^o}}=1e^{-j45^o}\ A;$

напряжение $\underline{U}_{ab}=\underline{I}_1\underline{Z}_{ab}=1e^{-j45^o}\cdot5\sqrt{2}e^{-j45^o}=5\sqrt{2}e^{-j90^o}\ B;$

ток второй ветви $\underline{I}_2=\dfrac{\underline{U}_{ab}}{R}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-j90^o}\ A;$

ток третьей ветви: $\underline{I}_3=\dfrac{\underline{U}_{ab}}{-j10}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\ A.$

Проверяем баланс мощности.

Комплексная мощность источника напряжения:

$$\tilde{S}_{ист}=\underline{E}\underline{I}_1^*=\frac{10}{\sqrt{2}}\cdot1e^{+j45^o}=5+j5\ \text{ВА}.$$

Активная мощность потребителя выделяется в резисторе второй ветви:

$$\sum P_{потр}=I_2^2R=\frac{1}{2}\cdot10=5\,\text{Вт}.$$

Реактивная мощность в двухполюснике:

$$\sum Q_{потр}=I_1^2X_L-I_2^2X_C=1\cdot10-\frac{1}{2}\cdot10=5\ \text{Вар}.$$

Получили комплексную мощность потребителя

$$\tilde{S}_{потр}=P+jQ=5+j5=\tilde{S}_{ист}.$$

Баланс мощностей выполняется.

5.24. Согласование источников энергии с нагрузкой в цепи гармонического тока

На рис.5.37а активный двухполюсник А передает энергию в нагрузку – пассивный двухполюсник П. Требуется определить, при каких условиях в нагрузке выделяется наибольшая активная мощность.

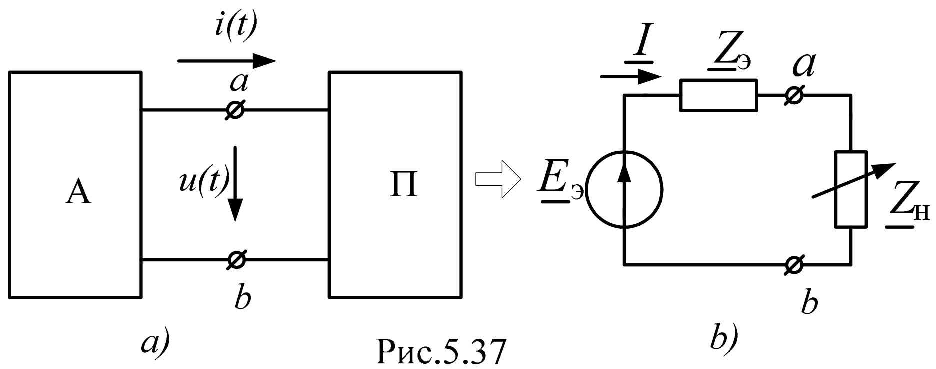


Рис.5.37

Заменим активный двухполюсник эквивалентным генератором с напряжением $\underline{E}_Э$ и внутренним сопротивлением $\underline{Z}_э$, а пассивный двухполюсник заменим его входным сопротивлением, которое служит нагрузкой генератора $\underline{Z}_н$ (рис.5.37б).

Определим, при каких значениях $\underline{Z}_н$ в ней выделяется наибольшая мощность.

Пусть $\underline{Z}_э = R_э + jX_э$, $\underline{Z}_н = R_н + jX_н$.

Найдем комплексное действующее значение тока:

$$\underline{I} = \frac{\underline{E}_Э}{\underline{Z}_э + \underline{Z}_н} = \frac{\underline{E}_Э}{R_э + jX_э + R_н + jX_н}$$

и «просто» действующее значение тока:

$$I = \frac{E_э}{\sqrt{(R_э + R_н)^2 + (X_э + X_н)^2}}.$$

Активная мощность в нагрузке:

$$P = I^2 R_н = \frac{E_Э^2 R_н}{(R_э + R_н)^2 + (X_э + X_н)^2}. \quad (5.96)$$

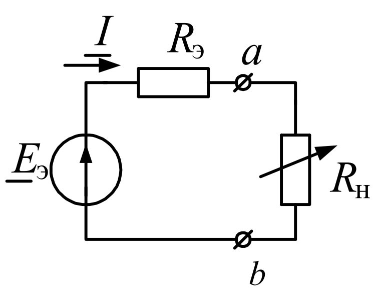


Рис.5.38

Мощность будет больше, если уменьшить знаменатель. Для этого выполним *первое условие согласования*:

$$X_э + X_н = 0; \; X_н = -X_э. \quad (5.97)$$

При этом в цепи рис.5.37б наступает последовательный резонанс напряжений, реактивные сопротивления генератора и нагрузки компенсируют друг друга и в цепи остаются только активные сопротивления (рис.5.38).

Мощность в цепь рис.5.38 мы уже изучали. Также как на постоянном токе, в нагрузке $R_н$ будет выделяться максимальная мощность, если выполнено *второе условие согласования:*

$$R_э = R_н. \tag{5.98}$$

Объединим условия (5.97) и (5.98) и получим *условие выделения наибольшей мощности в цепи гармонического тока:*

$$R_н + jX_н = R_э - jX_э \text{ и} \tag{5.99}$$

$$\underline{Z}_н = \underline{Z}_Э^* \tag{5.100}$$

П р а в и л о с о г л а с о в а н и я. ***Комплексное сопротивление нагрузки равно комплексно-сопряженному внутреннему сопротивлению источника.***

5.25. Повышение коэффициента мощности

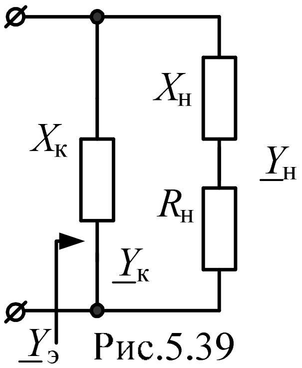


Рис.5.39

В цепи рис.5.39 нагрузка комплексная $\underline{Z}_н = R_н + jX_н$. Требуется скомпенсировать реактивную составляющую нагрузки и повысить коэффициент мощности *cos*φ. Для этого параллельно нагрузке подключают реактивный элемент $X_к$. Проводимость нагрузки:

$$\underline{Y}_н = g_н - jb_н = \frac{1}{R_н + jX_н} = \frac{R_н}{R_н{}^2 + X_н^2} - j\frac{X_н}{R_н{}^2 + X_н^2}.$$

Проводимость дополнительного реактивного элемента должна равняться $+jb_н$:

$$\underline{Y}_к = \frac{1}{jX_к} = +j\frac{X_н}{R_н{}^2 + X_н^2} = +jb_н.$$

Тогда эквивалентная входная проводимость становится активной и *cos*φ=1:

$$\underline{Y}_э = \underline{Y}_к + \underline{Y}_н = g_н - jb_н + jb_н = g_н = G_э.$$

5.26. Примеры расчета цепей гармонического тока

Пример 5.14

В цепи рис.5.40 задано: $e(t)=30\sqrt{2}\,\boldsymbol{sin}\left(10^3t+90^o\right)B$, $L=40\,мГн, C=100\,мкФ, R=30\,Ом$. Найти показания амперметра и построить векторную диаграмму тока и напряжений.

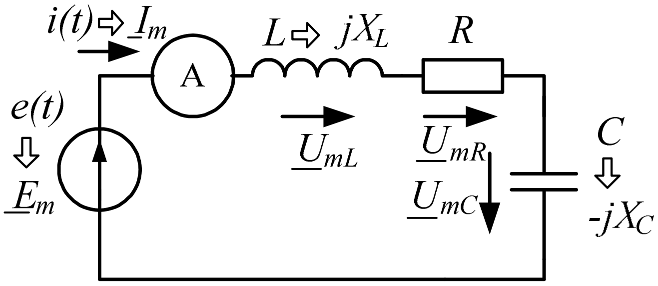


Рис.5.40

Решение

1. Находим комплексную амплитуду источника напряжения и комплексные сопротивления:

$$\underline{E}_m=30\sqrt{2}e^{j90^o}=j30\sqrt{2}\,B;$$

$$jX_L=j\omega L=j10^3\cdot 40\cdot 10^{-3}=j40\,Ом;$$

$$-jX_C=-j\frac{1}{\omega C}=-j\frac{1}{10^3\cdot 100\cdot 10^{-6}}=-j10\,Ом,$$

$$\underline{Z}=R+jX_L-jX_C=30+j40-j10=30+j30\,Ом.$$

2. Находим комплексную амплитуду тока:

$$\underline{I}_m=\frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}}=\frac{j30\sqrt{2}}{30+j30}=\frac{30\sqrt{2}e^{j90^o}}{30\sqrt{2}e^{j45^o}}=1\cdot e^{j45^o}=\frac{\sqrt{2}}{2}+j\frac{\sqrt{2}}{2}A.$$

3. Находим мгновенное значение тока:

$$i(t)=1\,\boldsymbol{sin}\left(10^3t+45^o\right)A.$$

4. Амплитуда тока $I_m=1A$. Амперметр показывает действующее значение тока: $I=\dfrac{I_m}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}=0{,}707\,A$.

5. Рассчитываем комплексные амплитуды напряжений на элементах цепи:

$$\underline{U}_{mR}=R\underline{I}_m=30e^{j45^o}B,\ \underline{U}_{mL}=j40\cdot 1\cdot e^{j45^o}=40e^{j135^o}B,$$

$$\underline{U}_{mC}=-j10\cdot 1\cdot e^{j45^o}=10e^{-j45^o}B.$$

6. Строим векторную диаграмму (рис.5.41):

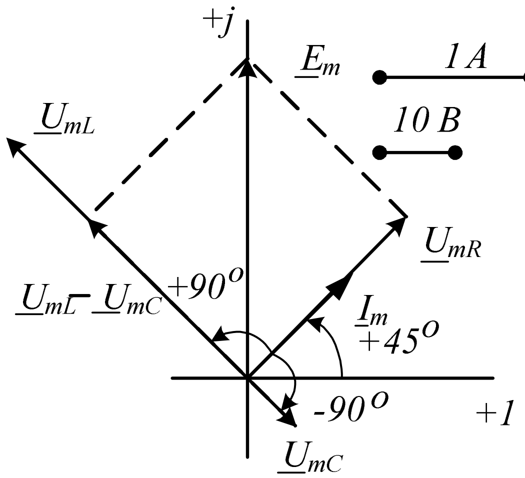


Рис.5.41

Пример 5.15

В цепи рис.5.42 задано: $e(t)=10\sin\left(10^3 t+60^o\right)B$,

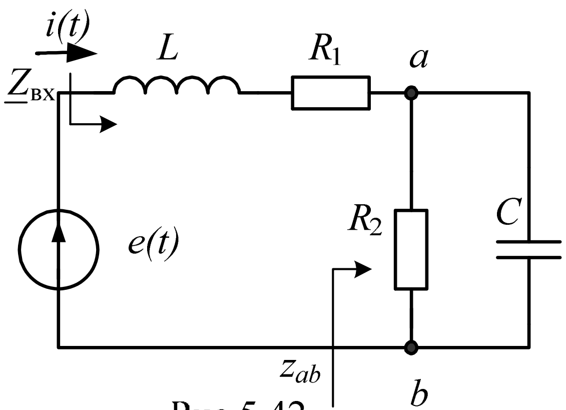


Рис.5.42

$L=1\,мГн, C=500\,мкФ$,

$R_1=1Ом, R_2=2Ом$.

Найти ток на входе цепи.

Решение

1. Находим комплексную амплитуду напряжения и комплексные сопротивления:

$\underline{E}_m=10e^{j60^o}B$,

$jX_L=j10^3\cdot 1\cdot 10^{-3}=j1Ом$,

$$-jX_C=-j\frac{1}{\omega C}=-j\frac{1}{1000\cdot 500\cdot 10^{-6}}=-j2\,Ом,$$

$$R_1=1Ом, R_2=2Ом.$$

2. Находим эквивалентное сопротивление $\underline{Z}вх$ и ток:

$$\underline{Z}_{вх}=jX_L+R_1+\frac{R_2\left(-jX_C\right)}{R_2-jX_C}=j1+1+\frac{2\cdot(-j2)}{2-j2}=$$

$$=1+j1+\frac{-j4\cdot(2+j2)}{(2-j2)(2+j2)}=1+j1+\frac{-j4\cdot(2+j2)}{4+4}=1+j1-j+1=2\,Ом$$

$$\underline{I}_m=\frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}_{вх}}=\frac{10e^{j60^o}}{2}=5e^{j60^o}A.$$

Мгновенное значение тока: $i(t) = 5\sin\left(10^3 t + 60^o\right) A$.

Амперметр покажет действующее значение:

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = 3{,}54\, A.$$

Пример 5.16

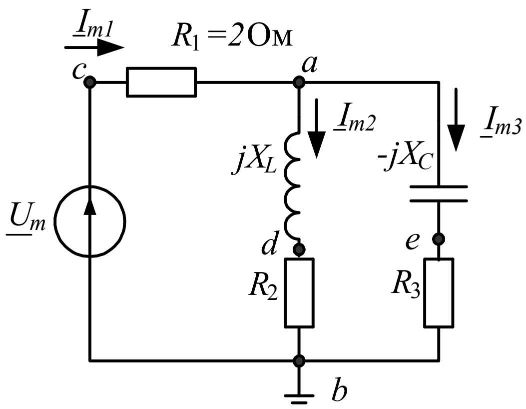


Рис.5.43

В символической схеме замещения цепи рис.5.43 заданы параметры:

$\underline{U}_m = 12e^{j45^o} B,$

$jX_L = j4 Ом, -jX_C = -j4 ОМ,$

$R_1 = 2 Ом,$

$R_2 = 4 Ом, R_3 = 4 Ом.$

Найти токи в ветвях и построить векторную топографическую диаграмму.

Р е ш е н и е

1. Находим комплексные сопротивления :

$\underline{Z}_1$=2 *Ом*, $\underline{Z}_2$=4+j4 *Ом*, $\underline{Z}_3$=4-j4*Ом*.

$$\underline{Z}_{ab} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{(4+j4)(4-j4)}{(4+j4)+(4-j4)} == \frac{16+16}{8} = 4\, Ом.$$

$$\underline{Z}_{вх} = R_1 + \underline{Z}_{ab} = 2 + 4 = 6 Ом.$$

2. Находим токи в ветвях:

$$\underline{I}_{m1} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}_{вх}} = \frac{12e^{j45^o}}{6} = 2e^{j45^o} A.$$

По правилу деления токов:

$$\underline{I}_{m2} = \frac{\underline{I}_{m1}(4-j4)}{(4+j4)+(4-j4)} = \frac{2e^{j45^o}(4-j4)}{(4+j4)+(4-j4)} =$$

$$= (1-j1)e^{j45^o} = \sqrt{2}e^{-j45^o} e^{j45^o} = \sqrt{2} A.$$

$$\underline{I}_{m3} = \frac{\underline{I}_{m1}(4+j4)}{(4+j4)+(4-j4)} = \sqrt{2}e^{j90^o} A.$$

3. Находим комплексные напряжения в точках схемы:

$$\underline{U}_{mb} = 0,\ \underline{U}_{ma} = \underline{I}_{m2}\underline{Z}_2 = \sqrt{2}(4 + j4) = \sqrt{2}\cdot 4\cdot\sqrt{2}\cdot e^{j45^o} = 8e^{j45^o}\ B,$$

$$\underline{U}_{md} = \underline{I}_{m2}R_2 = \sqrt{2}\cdot 4\cdot = 4\sqrt{2}\ B,$$

$$\underline{U}_{me} = \underline{I}_{m3}R_3 = \sqrt{2}\cdot 4\cdot e^{j90^o} = j4\sqrt{2}\ B,$$

$$\underline{U}_{mc} = \underline{U}_{ma} + \underline{U}_{mca} = 8e^{j45^o} + 4e^{j45^o} = 12e^{j45^o}\ B.$$

4. Строим топографическую диаграмму (рис.5.44).

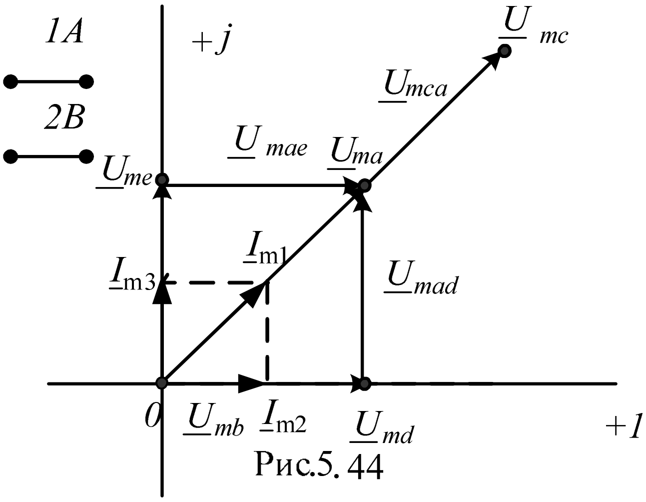


Рис.5. 44

Пример 5.17

В цепи рис.5.45 $e(t)$=8sin100t В, $J(t)$=4cos100t А, R_1=R_2=4Ом, L=40 мГн.

Определить при каком значении $Z_н$ в нем выделяется наибольшая активная мощность. Рассчитать в этом режиме токи в цепи, проверить баланс мощностей.

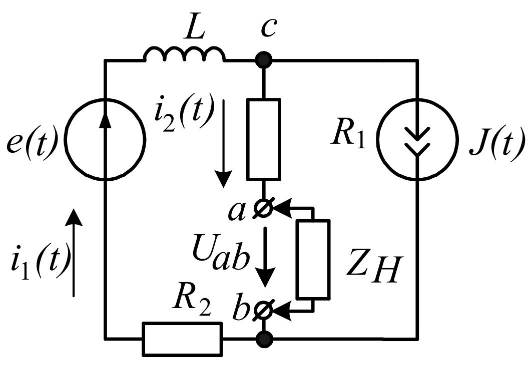


Рис.5.45

Решение

1. Преобразуем источник тока к функции синуса.

$$J(t) = 4\cos 100t = 4\sin(100t + 90^o)\ A.$$

2. Вычислим комплексные амплитуды источника напряжения и источника тока: $\underline{E} = 8B$, $\underline{J} = 4e^{j90^o}\ A$.

3. Вычислим комплексное сопротивление индуктивности:

$$jX_L = j100\cdot 40\cdot 10^{-3} = j4\,Ом.$$

4. Исключим сопротивление нагрузки. Получим одноконтурную цепь, в которой действует ток с комплексной амплитудой $\underline{I}_{m1} = \underline{J}_m = 4e^{j90^o}\ A$. Найдем напряжение холостого хода:

$$\underline{U}_{mabxx} = -\underline{I}_{m1} \cdot R_2 + \underline{E} - jX_L \cdot \underline{I}_{m1} = -j4 \cdot 4 + 8 - j4 \cdot j4 = 24 - j16\,B$$

5. Найдем входное сопротивление эквивалентного генератора:

$$\underline{Z}_{вхab} = R_1 + R_2 + jX_L = 8 + j4\ Ом.$$

Для согласования с генератором требуется: $\underline{Z}_н = \underline{Z}^*_{вхab} = 8 - j4\,Ом$.

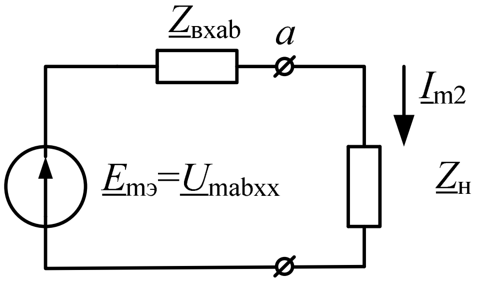


Рис.5.46

6. В схеме эквивалентного генератора (рис.5.46):

$$\underline{I}_{m2} = \frac{\underline{U}_{mabxx}}{\underline{Z}_н + \underline{Z}_{вхab}} = \frac{24 - j16}{16} = 1{,}5 - j\,A$$

По схеме рис.5.45 находим

$$\underline{I}_{m1} = \underline{I}_{m2} + \underline{J}_m = 1{,}5 + j3\,A.$$

7. Выполним расчет баланса мощности.

Комплексная мощность источников энергии:

$$\tilde{S}_{ист} = \tilde{S}_E + \tilde{S}_J = \frac{\underline{E}_m \cdot \underline{I}^*_{m1}}{2} + \frac{\underline{U}_{mbc} \cdot \underline{J}^*_m}{2} =$$

$$\frac{8 \cdot (1{,}5 - j3)}{2} + \frac{-\underline{I}_{m2} \cdot (R_1 + \underline{Z}_H) \cdot \underline{J}^*_m}{2} =$$

$$6 - j12 + \frac{(j - 1{,}5) \cdot (12 - j4) \cdot (-j4)}{2} = 42 + j16\,BA.$$

Мощность потребителей:

$$P_{потр} = \frac{I^2_{1m} R_2}{2} + \frac{I^2_{2m}(R_1 + R_н)}{2} = \frac{11{,}25 \cdot 4}{2} + \frac{3{,}25 \cdot 12}{2} = 22{,}5 + 19{,}5 = 42\,Вт$$

$$Q_{потр} = \frac{I^2_{1m}\left(jX_L\right)}{2} + \frac{I^2_{2m}(-4j)}{2} = j22{,}5 - j6{,}5 = j16\,Вар$$

Баланс мощности выполняется.

Пример 5.18

Электрическая цепь рис.5.47 имеет следующие параметры:

$$J_1(t) = 8\,\mathbf{sin}100t\ A, J_2(t) = 4\,\mathbf{cos}100t\ A, R_1 = R_2$$

$C = 2500\,мкФ$. Требуется найти токи.

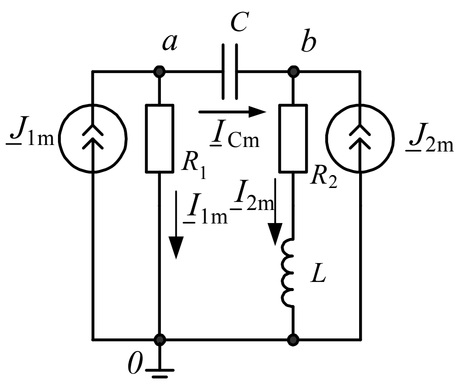


Рис.5.47

Решение

1. Находим комплексные амплитуды источников тока и комплексные сопротивления:

$$\underline{J}_{1m} = 8\,A, \underline{J}_{2m} = 4j\,A,$$

$$\underline{Z}_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{100\cdot 2500\cdot 10^{-6}} = -j4\,Ом$$

$$\underline{Z}_L = j\omega L = j100\cdot 40\cdot 10^{-3} = j4\,Ом.$$

2. Найдем ток I_{Cm} методом эквивалентного генератора. Отключаем C. Находим:

$$\underline{U}_{mao} = \underline{J}_{1m}R_1 = 8\cdot 4 = 32\,Ом,$$

$$\underline{U}_{mbo} = \underline{J}_{2m}\left(R_2 + j\omega L\right) = j4\left(4 + j4\right) = -16 + j16\,B.$$

Напряжение эквивалентного генератора:

$$\underline{E}_{mэ} = \underline{U}_{mabxx} = \underline{U}_{mao} - \underline{U}_{mbo} = 32 - \left(-16 + j16\right) = 48 - j16\,B.$$

Входное сопротивление $\underline{Z}_{abвх} = R_1 + R_1 + j\omega L = 8 + j4\;Ом.$

$$\underline{I}_{Cm} = \frac{\underline{U}_{mabxx}}{\underline{Z}_{abвх} - j\dfrac{1}{\omega C}} = \frac{48 - j16}{8 + j4 - j4} = 6 - j2\,A = 6{,}325e^{-j18.45^o}\,A.$$

3. По первому закону Кирхгофа находим комплексные амплитуды токов в ветвях:

$$\underline{I}_{1m} = \underline{J}_{1m} - \underline{I}_{Cm} = 2 + j2A;$$

$$\underline{I}_{2m} = \underline{J}_{2m} + \underline{I}_{Cm} = j4 + 6 - j2 = 6 + j2A.$$

$$\underline{I}_{1m} = \underline{J}_{1m} - \underline{I}_{Cm} = 2 + j2A = 2\sqrt{2}e^{j45^o}\,A;$$

$$\underline{I}_{2m} = \underline{J}_{2m} + \underline{I}_{Cm} = j4 + 6 - j2 = 6 + j2 =$$

$$= \sqrt{40}e^{j18.45^o} = 6{,}325e^{j18.45^o}\,A.$$

4. Находим мгновенные значения токов:

$$i_C(t) = 6{,}325\,\boldsymbol{sin(}100t - 18{,}45^o\boldsymbol{)}A,$$

$$i_1(t) = 2{,}82\,\boldsymbol{sin(}100t + 45^o\boldsymbol{)}A,$$

$$i_2(t) = 6{,}325\,\boldsymbol{sin(}100t + 18{,}45^o\boldsymbol{)}A.$$

Пример 5.19

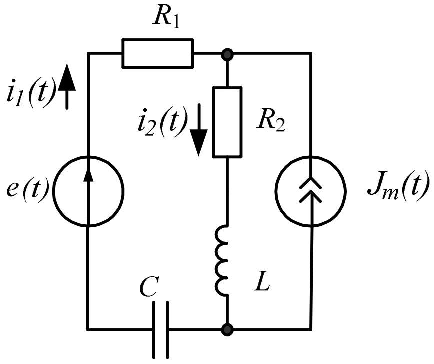


Рис.5.48

В цепи рис.5.48 дано:

$$e(t) = 4\,\boldsymbol{sin}100t\,B,\; J(t) = 2\,\boldsymbol{cos}100t\,A,$$

$$R_1 = R_2 = 2\,Ом,\; L = 20\,мГн,\; C = 5000\,мкФ.$$

Найти токи.

Р е ш е н и е

1. Переходим к комплексным амплитудам и комплексным сопротивлениям:

$$\underline{E}_m = 4B,\ \underline{J}_m = 2e^{j90^o}\ A,\ X_L = 2Ом,\ X_C = 2Ом.$$

2. Преобразуем источник тока в источник напряжения:

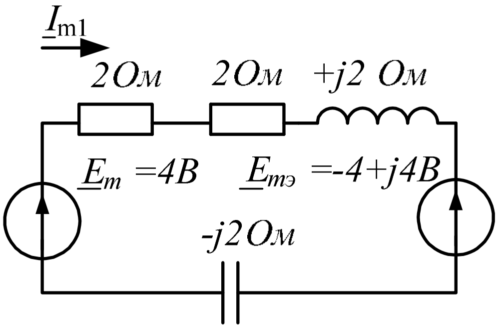


Рис.5.49

$$\underline{E}_{mэ} = \underline{J}_m\left(R_2 + j\omega L\right) = \underline{J}_m\left(2 + j2\right) =$$
$$= 2j\left(2 + j2\right) = \left(-4 + j4\right)B.$$

Получим одноконтурную схему рис.5.49:

3. Находим токи.

В схеме рис.5.49:

$$\underline{I}_{m1} = \frac{\underline{E}_m - \underline{E}_{mэ}}{2 + 2 + j2 - j2} = \frac{8 - j4}{4} = 2 - j1A.$$

В схеме рис.5.48:

$$\underline{I}_{m2} = \underline{I}_{m1} + \underline{J}_m = 2 - j1 + j2 = 2 + j1A.$$

3. Мгновенные значения токов:

$$i_1(t) = \sqrt{5}\,\mathbf{sin}(100t - 26^o)\,A,\ i_2(t) = \sqrt{5}\,\mathbf{sin}(100t + 26^o)\,A.$$

Пример 5.20

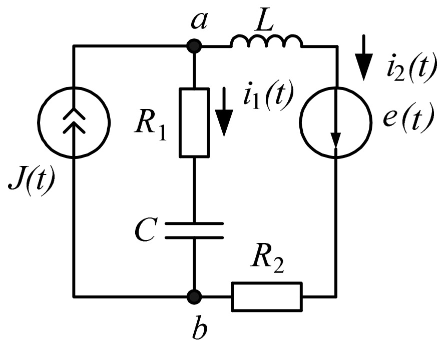


Рис.5.50

В цепи рис.5.50 задано:

$$J(t) = 4\,\mathbf{sin}1000t\ A,$$
$$e(t) = 4\,\mathbf{cos}1000t\ B.$$
$$L = 2\,мГн,\ C = 500\,мкФ,$$
$$R_1 = R_2 = 2Ом.$$

Найти токи $i_1(t)$ и $i_2(t)$.

Р е ш е н и е

1. Найдем комплексные амплитуды источников энергии и комплексные сопротивления:

$$\underline{J}_m = 4A,\ \underline{E}_m = j4B,\ jX_L = j2Ом,\ -jX_C = -j2Ом.$$

Получим символическую схему замещения рис.5.51:

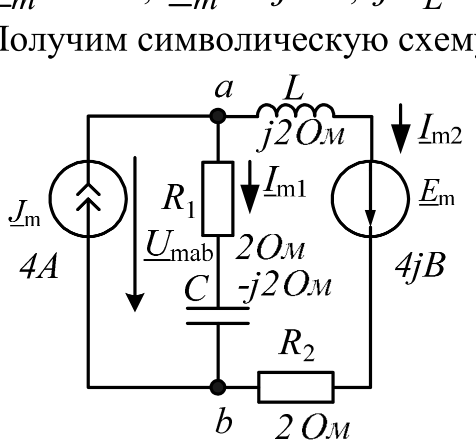


Рис.5.51

2. Методом двух узлов найдем напряжение $\underline{U}_{mab}$:

$$\underline{U}_{mab} = \frac{\underline{J}_m - \dfrac{\underline{E}_m}{R_2 + jX_L}}{\dfrac{1}{R_1 - jX_C} + \dfrac{1}{R_2 + jX_L}} =$$

$$=\frac{4-\dfrac{j4}{2+j2}}{\dfrac{1}{2-j2}+\dfrac{1}{2+j2}}=6-2j\,B.$$

3. Находим комплексные амплитуды токов:

$$\underline{I}_{1m}=\frac{\underline{U}_{mab}}{2-j2}=\frac{6-2j}{2-j2}=2+j1\,A=\sqrt{5}e^{j18.45^{o}}\,A;$$

$$\underline{I}_{2m}=\underline{J}_{m}-\underline{I}_{1m}=4-2-j1=2-j1A=\sqrt{5}e^{-j18.45^{o}}\,A.$$

4. Находим мгновенные значения токов в ветвях:

$$i_1(t)=\sqrt{5}\,\boldsymbol{sin}(1000t+18{,}45^{o})A,$$

$$i_2(t)=\sqrt{5}\,\boldsymbol{sin}(1000t-18{,}45^{o})A.$$

Глава 6. ЦЕПИ С ВЗАИМНОЙ ИНДУКЦИЕЙ

6.1. Определение взаимной индукции и взаимной индуктивности

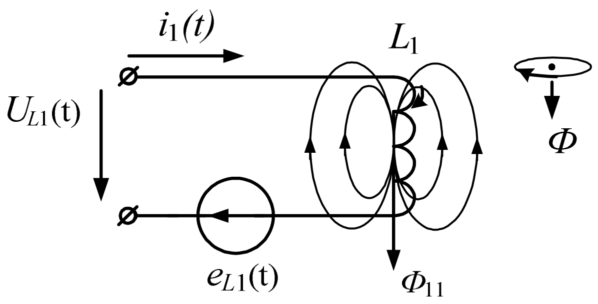


Рис.6.1

В катушке с током i_1 (рис.6.1) возникает *магнитный поток самоиндукции* Φ_{11}. Направление магнитного потока определяем по правилу буравчика.

Пусть число витков катушки N_1. Тогда:

потокосцепление самоиндукции

$$\psi_{11}=N_1\cdot\Phi_{11}. \qquad (6.1)$$

Напомним, что потокосцепление самоиндукции связано с индуктивностью катушки и током в ней по формуле:

$$\psi_{11}(t)=L_1 i_1(t) \qquad (6.2)$$

Индуктивность является коэффициентом пропорциональности между потокосцеплением и током: $L_1=\dfrac{\psi_{11}}{i_1}$ [Гн].

Если ток в катушке меняется $(\boldsymbol{i(t)=var})$, то по закону электромагнитной индукции (Закон Фарадея) возникает *ЭДС самоиндукции*:

$$e_L(t)=-\frac{d\psi_{11}(t)}{dt}=-L_1\frac{di_1}{dt}. \qquad (6.3)$$

Если ток уменьшается ($\frac{di_1}{dt} < 0$), то $-L_1 \frac{di_1}{dt} > 0$. Следовательно, $e_L(t) > 0$ и направлена согласно с током.

П р а в и л о

ЭДС самоиндукции препятствует изменению тока в катушке, направлена согласно с ним и поддерживает ток в катушке.

Напряжение на катушке (рис.6.1) совпадает по направлению с током:

$$u_L(t) = -e_L(t) = \frac{d\psi_{11}}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt}. \tag{6.4}$$

В з а и м н а я и н д у к ц и я

На рис.6.2 показаны две катушки с количеством витков N_1, N_2, которые имеют индуктивности L_1 и L_2.

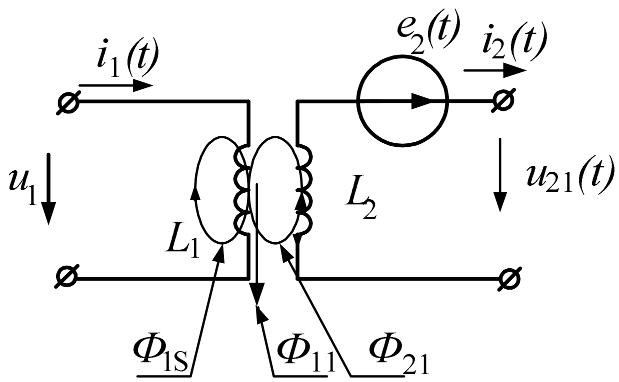


Рис.6.2

Пусть в первой катушке есть ток, а во второй катушке тока нет ($i_1 \neq 0, i_2 = 0$). Ток в первой катушке создает *магнитный поток самоиндукции* $\varPhi_{11}$. Причем одна часть этого потока рассеивается, а другая часть пронизывает вторую катушку:

$$\varPhi_{11} = \varPhi_{1S} + \varPhi_{21}, \tag{6.5}$$

$\varPhi_{11}$ - *магнитный поток самоиндукции* первой катушки;

$\varPhi_{1S}$ -*поток рассеяния*;

$\varPhi_{21}$ -*поток взаимной индукции*, вызываемый током первой катушки и пронизывающий вторую катушку.

Рассмотрим потокосцепления:

$$\psi_{11} = N_1\varPhi_{11} = L_1 i_1 \tag{6.6}$$

- *потокосцепление первой катушки*;

$$\psi_{1S} = N_1\varPhi_{1S} = L_{1S} i_1 \tag{6.7}$$

- *потокосцепление рассеяния 1ой катушки*;

$$\psi_{21} = N_2\varPhi_{21} = M_{21} i_1 \tag{6.8}$$

- *потокосцепление взаимной индукции* со второй катушкой, вызванное током первой катушки;

$$M_{21} = \frac{\psi_{21}}{i_1} \tag{6.9}$$

- *взаимная индуктивность.*

О п р е д е л е н и е

Взаимная индуктивность 1 - ой и 2 - ой катушек M_{21} является коэффициентом пропорциональности между потокосцеплением взаимной индукции второй катушки и током первой катушки.

Пусть потокосцепление взаимной индукции изменяется $\psi_{21}(t) = \boldsymbol{var}$.

Тогда во второй катушке возникает *ЭДС взаимной индукции*:

$$e_2(t) = -\frac{d\psi_{21}}{dt} = -M_{21}\frac{di_1}{dt}. \tag{6.10}$$

ЭДС взаимной индукции препятствует изменению потокосцепления. Если потокосцепление уменьшается ($\frac{d\psi_{21}}{dt} = M_{21}\frac{di_1}{dt} < 0$), то ЭДС взаимной индукции $e_2(t) > 0$ и возникнет ток $i_2(t) > 0$ (рис.6.2).

ЭДС взаимной индукции поддерживает постоянство потокосцепления взаимной индукции $\psi_{21} = const$.

Рассмотрим второй случай, когда $i_1 = 0$, а $i_2 \neq 0$. Ток второй катушки создает магнитный поток

$$\varPhi_{22} = \varPhi_{2S} + \varPhi_{21} \tag{6.11}$$

и потокосцепление

$$\psi_{22} = \psi_{2S} + \psi_{21}. \tag{6.12}$$

Здесь

$$\psi_{2S} = N_2\varPhi_{2S} \tag{6.13}$$

- потокосцепление рассеяния;

$$\psi_{12} = N_1\varPhi_{12} = M_{12}i_2 \tag{6.14}$$

- потокосцепление взаимной индукции с первой катушкой, вызванное током во второй катушке;

$$M_{12} = \frac{\psi_{12}}{i_2} \tag{6.15}$$

- взаимная индуктивность второй и первой катушек.

В линейных цепях по принципу обратимости: $M_{21} = M_{12} = M$.

6.2. Согласное и встречное включение катушек

На рис.6.3 показаны две катушки индуктивности, намотанные на общем сердечнике. Направления намотки видны на рисунке и имеют важное значение.

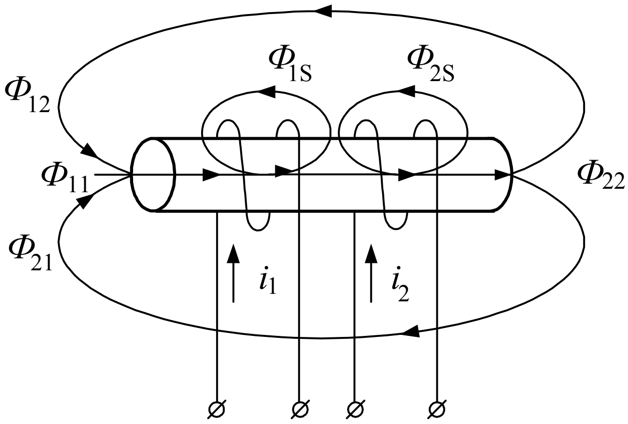


Рис.6.3

Ток i_1, проходящий в первой катушке, создает полный магнитный поток

$$\Phi_{11} = \Phi_{1S} + \Phi_{21}. \qquad (6.16)$$

Направление полного магнитного потока определяется по правилу буравчика.

Ток i_2, проходящий во второй катушке, создает магнитный поток самоиндукции второй катушки

$$\Phi_{22} = \Phi_{2S} + \Phi_{12}. \qquad (6.17)$$

В зависимости от направления намотки катушек и направления токов в них магнитный поток самоиндукции Φ_{11} может совпадать или не совпадать по направлению с магнитным потоком взаимной индукции Φ_{12}, вызванным током второй катушки. Поэтому различают два способа включения катушек.

Определение

Согласным называется включение катушек, при котором магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции совпадают.

Встречным включением называется включение, при котором магнитные потоки самоиндукции и взаимной индукции не совпадают.

Для согласного включения (рис.6.4а) токи должны быть одинаково направлены относительно *одноимённых зажимов*. *Одноимённые зажимы обозначены на схеме одинаковыми значками*. При встречном включении (рис.6.4б) токи направлены по-разному.

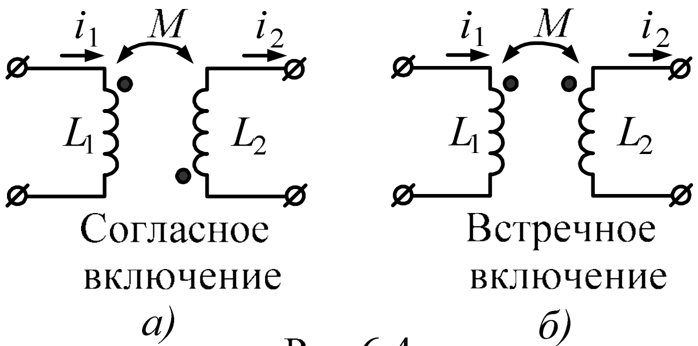


Рис.6.4

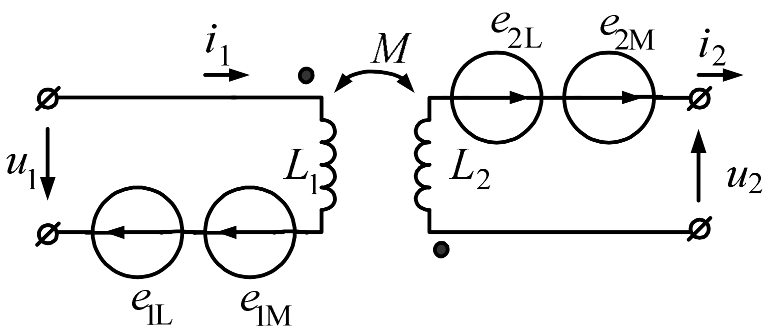


Рис.6.5

При согласованном включении (рис.6.5) ЭДС самоиндукции и взаимной индукции складываются:

$$e_1 = e_{1L} + e_{1M} = -\frac{d\psi_{11}}{dt} - \frac{d\psi_{12}}{dt} = -\left(L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}\right), \qquad (6.18)$$

$$e_2 = e_{2L} + e_{2M} = -\left(L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}\right). \qquad (6.19)$$

При встречном включении ЭДС самоиндукции и взаимной индукции вычитаются:

$$e_1 = e_{1L} - e_M = -\left(L_1\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt}\right), \qquad (6.20)$$

$$e_2 = e_{2L} - e_M = -\left(L_2\frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt}\right). \qquad (6.21)$$

Напряжения на катушках по направлению и знаку противоположны ЭДС и равны:

$$u_1(t) = -e_1(t) = L_1\frac{di_1}{dt} \pm M\frac{di_2}{dt}, \qquad (6.22)$$

$$u_2(t) = -e_2(t) = L_2\frac{di_2}{dt} \pm M\frac{di_1}{dt}. \qquad (6.23)$$

Знак (+) соответствует согласному включению, знак (-) – встречному катушек.

6.3. Комплексное сопротивление взаимной индуктивности

Пусть в катушках действуют гармонические токи:

$$i_1(t) = I_{m1}\,\boldsymbol{sin}(\omega t + \psi_1)$$
$$i_2(t) = I_{m2}\,\boldsymbol{sin}(\omega t + \psi_2).$$

Переходим к комплексным функциям времени для токов $\tilde{i}_1(t) = \underline{I}_{m1}e^{j\omega t}$ и $\tilde{i}_2(t) = \underline{I}_{m2}e^{j\omega t}$.

Перепишем (6.22) и (6.23) для комплексных функций времени от напряжений:

$$\underline{U}_{m1}e^{j\omega t} = j\omega L_1 \underline{I}_{m1}e^{j\omega t} \pm j\omega M \underline{I}_{m2}e^{j\omega t}, \qquad (6.24)$$

$$\underline{U}_{m2}e^{j\omega t} = j\omega L_2 \underline{I}_{m2}e^{j\omega t} \pm j\omega M \underline{I}_{m1}e^{j\omega t}. \qquad (6.25)$$

Теперь разделим (6.24) и (6.25) на $e^{j\omega t}$ и получим уравнения для комплексных амплитуд напряжений на катушках:

$$\underline{U}_{m1} = j\omega L_1 \underline{I}_{m1} \pm j\omega M \underline{I}_{m2}, \qquad (6.26)$$

$$\underline{U}_{m2} = j\omega L_2 \underline{I}_{m2} \pm j\omega M \underline{I}_{m1}. \qquad (6.27)$$

Здесь: $\omega M = X_{\text{м}}$ - *сопротивление взаимной индуктивности*;

$\underline{Z}_{\text{м}} = j\omega M$ - *комплексное сопротивление взаимной индуктивности*.

6.4. Экспериментальное определение одноимённых зажимов

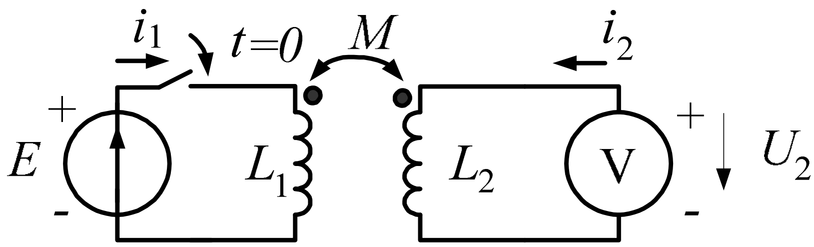


Рис.6.6

Схема эксперимента показана на рис.6.6. Пусть верхние зажимы катушек являются одноименными. Подключим к одноименному зажиму второй катушки вольтметр входом «плюс». Так как идеальный вольтметр имеет бесконечно большое входное сопротивление $(R_V = \infty)$ ток цепи второй катушки будет равен нулю ($i_2 = 0$).

Одноименный зажим первой катушки через ключ соединим с плюсом источника напряжения *E*. После замыкания ключа ток в первой катушке будет увеличиваться $\frac{di_1}{dt} > 0$. По формуле (6.23) напряжение на второй катушке при согласном включении будет положительно и равно:

$$u_2 = L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} = M\frac{di_1}{dt} > 0. \qquad (6.28)$$

П р а в и л о

Если при подключении постоянной ЭДС к первой катушке, скачок напряжения на зажимах второй катушки положительный, то зажимы, к которым подключён плюсом источник напряжения и плюсом вольтметр, является одноимёнными.

6.5. Коэффициент взаимной связи

Две катушки с индуктивностями L_1, L_2 и взаимной индуктивностью M имеют *коэффициент взаимной связи*

$$k = \frac{\omega M}{\sqrt{\omega L_1 \omega L_2}} = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}. \qquad (6.29)$$

$$0 < k < 1.$$

Если две катушки одинаковы $L_1 = L_2 = L$ и $N_1 = N_2$, то $k = \frac{M}{L} = \frac{\psi_{21}}{i_1}\frac{i_1}{\psi_{11}} = \frac{\psi_{21}}{\psi_{11}} = \frac{\Phi_{21}}{\Phi_{11}} < 1$, так как $\Phi_{11} = \Phi_{1S} + \Phi_{21} > \Phi_{21}$.

Коэффициент взаимной связи меняется в пределах $0 < k < 1$:

$k = 0$, если $\Phi_{21} = 0$ - катушки не связаны;

$k = 1$, если $\Phi_{11} = \Phi_{21}$ - поток рассеяния отсутствует.

6.6. Последовательное соединение магнитно-связанных катушек

Согласное включение

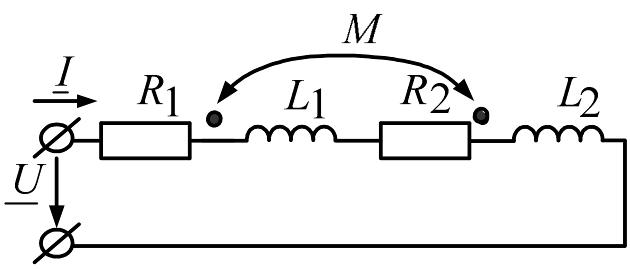


Рис.6.7

На рис.6.7 показано последовательное согласное включение двух катушек: M – взаимная индуктивность, $j\omega M$ – сопротивление взаимной индуктивности.

По второму закону Кирхгофа запишем уравнение для комплексных действующих значений напряжений в контуре:

$$\underline{U} = \underline{I}R_1 + j\omega L_1\underline{I} + j\omega M\underline{I} + \underline{I}R_2 + j\omega L_2\underline{I} + j\omega M\underline{I} =$$
$$= \underline{I}(R_1 + R_2) + j\omega(L_1 + L_2 + 2M)\underline{I}. \qquad (6.30)$$

В соответствии с формулами (6.26) и (6.27) на каждой катушке напряжение равно сумме напряжения самоиндукции и взаимной индукции. Причем в катушках проходит один и тот же ток $\underline{I}$.

Эквивалентная индуктивность при согласном включении:

$$L_{экв.согл.} = L_1 + L_2 + 2M. \qquad (6.31)$$

Встречное включение

На рис.6.8 две катушки включены последовательно и встречно. В этом случае в уравнение по второму закону Кирхгофа напряжения взаимной индукции входят со знаком минус:

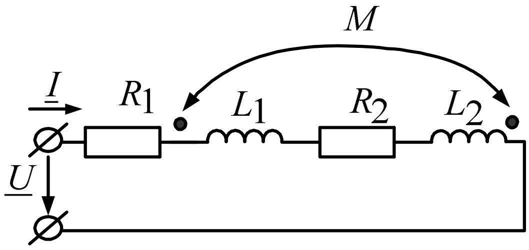


Рис.6.8

$$\underline{U} = \underline{I}R_1 + j\omega L_1\underline{I} - j\omega M\underline{I} + \underline{I}R_2 + j\omega L_2\underline{I} - j\omega M\underline{I}. \qquad (6.32)$$

Эквивалентная индуктивность при встречном включении:

$$L_{экв.встр.} = L_1 + L_2 - 2M. \qquad (6.33)$$

6.7. Линейный трансформатор

Трансформатором называется устройство для передачи энергии из одной части цепи в другую посредством электромагнитной индукции. Линейный трансформатор не имеет магнитного сердечника и называется еще воздушным трансформатором. Схема линейного трансформатора показана на рис.6.9. Первичная обмотка трансформатора содержит катушку с индуктивностью L_1. Резистор R_1 учитывает потери в первой катушке. Вторичная обмотка содержит катушку индуктивности L_2 с потерями R_2. К вторичной обмотке подключена комплексная нагрузка $\underline{Z}_H$. Первая и вторая катушки имеют магнитную связь с взаимной индуктивностью M.

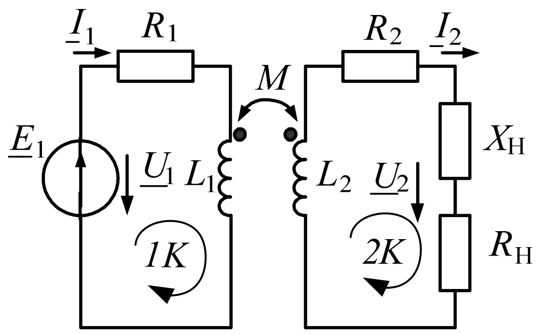


Рис.6.9

В схеме токи направлены встречно. Сопротивление нагрузки: $\underline{Z}_H = R_H + jX_H$.

Составляем уравнения по второму закону Кирхгофа:

Для 1-ой обмотки:

$$\underline{I}_1 R_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2 = \underline{E}_1. \qquad (6.34)$$

Для 2-ой обмотки:

$$\underline{I}_2 R_2 + \underline{I}_2 R_H + jX_H \underline{I}_2 + $$
$$+ j\omega L_2 \underline{I}_2 - j\omega M \underline{I}_1 = 0. \qquad (6.35)$$

Векторная диаграмма токов и напряжений трансформатора показана на рис. 6.36.

Векторную диаграмму надо строить в такой последовательности:

1. Задаемся током $\underline{I}_2$.

2. Строим напряжения на элементах цепи $R_H \underline{I}_2$, $jX_H I_2 \left(x_H = \omega L\right)$, $\underline{I}_2 R_2$, $j\omega L_2 \underline{I}_2$, $-j\omega M \underline{I}_1$.

Сумма векторов напряжений равна 0.

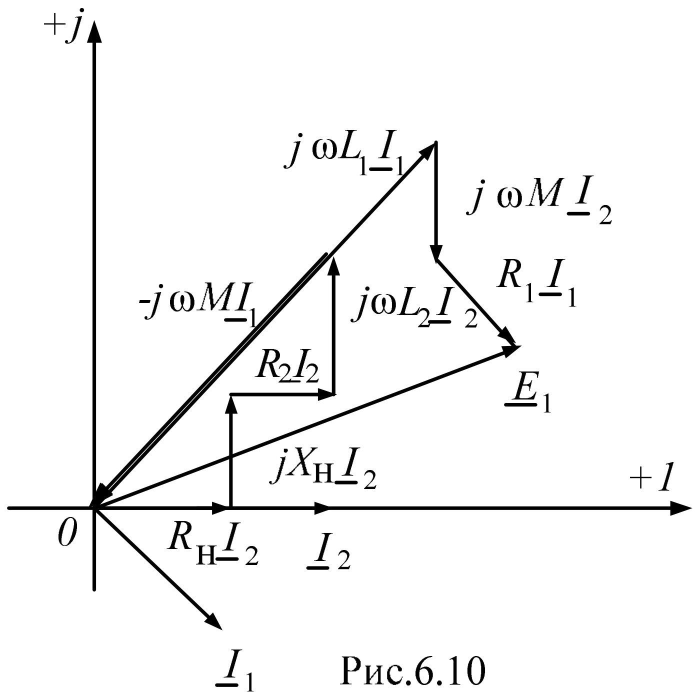


Рис.6.10

3. Найдем вектор тока $\underline{I}_1 = \dfrac{-j\omega M\underline{I}_1}{-j\omega M} = \left(\dfrac{-j\omega M I_1}{\omega M}\right) e^{+j90^0}$. (Вектор $-j\omega M\underline{I}_1$ надо повернуть на +90° и изменить масштаб).

4. Строим напряжения $j\omega L_1\underline{I}_1,\ -j\omega M\underline{I}_2,\ \underline{I}_1 R_1,\ \underline{E}_2$.

6.8. Коэффициенты трансформации

Важными параметрами трансформатора являются коэффициенты трансформации. Для анализа схемы рис.6.9 можно использовать:

коэффициент трансформации по напряжению: $\underline{n}_U = \dfrac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}$; (6.36)

коэффициент трансформации по току: $\underline{n}_I = \dfrac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}$; (6.37)

коэффициент трансформации по сопротивлению:

$$\underline{n}_Z = \frac{\underline{Z}_{2H}}{\underline{Z}_{вх}} = \frac{\underline{U}_2\underline{I}_1}{\underline{I}_2\underline{U}_1} = \underline{n}_U\underline{n}_I\,. \qquad (6.38)$$

6.9. Совершенный трансформатор

Совершенным называют трансформатор без потерь $(R_1 = R_2 = 0)$, у которого отсутствуют магнитные потоки рассеяния $(\Phi_{1S} = \Phi_{2S} = 0)$ и, следовательно, коэффициент связи $k=\dfrac{\Phi_{21}}{\Phi_{11}}=1$. Из формулы (6.29) получаем, что в совершенном трансформаторе $M=\sqrt{L_1 L_2}$.

Рассмотрим работу совершенного трансформатора в режиме холостого хода (рис.6.11), когда нагрузка отключена, ток $\underline{I}_2=0$. Вторичная обмотка в этом случае не влияет на первичную обмотку.

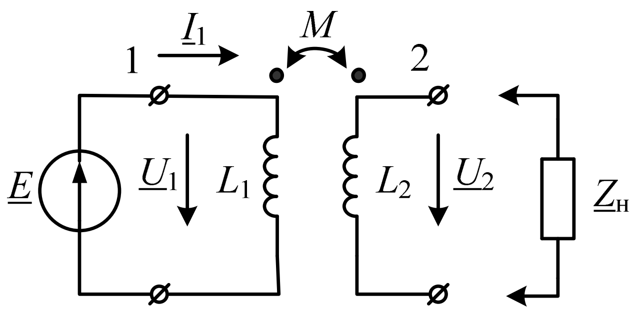


Рис.6.11

Для первичной обмотки найдем ток:

$$\underline{I}_1=\frac{\underline{U}_1}{j\omega L_1}. \qquad (6.39)$$

Из уравнения (6.27) при $\underline{I}_2=0$ получим:

$$\underline{U}_2=-\underline{E}_{2M}=j\omega M\underline{I}_1. \qquad (6.40)$$

Подставим сюда выражение для тока из (6.39):

$$\underline{U}_2=\frac{M}{L_1}\underline{U}_1=\frac{\sqrt{L_1L_2}}{L_1}\underline{U}_1=\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\underline{U}_1. \qquad (6.41)$$

Из (6.41) получим коэффициент трансформации совершенного трансформатора в режиме холостого хода:

$$n=\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1}=\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}=\frac{N_2}{N_1}, \qquad (6.42)$$

где N_1 и N_2 - число витков первой и второй катушек.

Рассмотрим второй случай работы совершенного трансформатора, когда к зажимам 2-2’ подключена нагрузка $\underline{Z}_н$ и $\underline{I}_2\neq 0$.

Из уравнения (6.35) выразим ток в первой катушке:

$$\underline{I}_1=\frac{1}{j\omega M}(\,j\omega L_2\underline{I}_2+\underline{Z}_н\underline{I}_2\,)=\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}\underline{I}_2+\frac{\underline{Z}_н}{j\omega L_1}\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}\underline{I}_2=$$

$$=n\underline{I}_2+\frac{\underline{U}_1}{j\omega L_1}, \qquad (6.43)$$

так как

$$\frac{\underline{Z}_н\underline{I}_2}{n}=\frac{\underline{U}_2}{n}=\underline{U}_1.$$

По уравнениям (6.43) и (6.42) построим схему замещения совершенного трансформатора (рис.6.12).

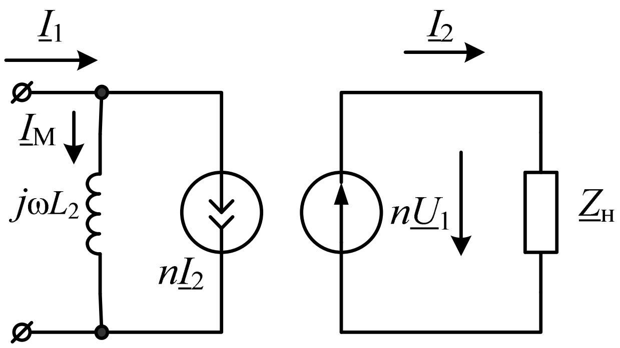


Рис.6.12

В режиме холостого хода входной ток $\underline{I}_1 = \underline{I}_M$ *определяется индуктивным сопротивлением первичной обмотки и мал по величине.*

6.10. Идеальный трансформатор

Идеальным трансформатором называют трансформатор без потерь $(R_1 = R_2 = 0)$, у которого коэффициент связи $k = 1$ и индуктивности катушек стремятся к бесконечности ($L_1, L_2 \to \infty$).

В идеальном трансформаторе n – действительное число,

входное напряжение:

$$\underline{U}_1 = \frac{1}{n}\underline{U}_2, \tag{6.44}$$

входной ток:

$$\underline{I}_1 = n\underline{I}_2. \tag{6.45}$$

Напряжения первичной и вторичной обмоток совпадают по фазе и отличаются только по амплитуде. Токи первичной и вторичной обмоток также совпадают по фазе и отличаются по амплитуде.

Рассмотрим соотношение комплексных мощностей в идеальном трансформаторе:

$$\tilde{S}_1 = \underline{U}_1 \underline{I}_1^* = \frac{1}{n}\underline{U}_2 \cdot n\underline{I}_2^* = \tilde{S}_2. \tag{6.46}$$

Мы получили равенство комплексных мощностей первичной и вторичной обмоток. Следовательно, КПД идеального трансформатора равен 1.

6.11. Согласующие свойства трансформатора

Выразим входное сопротивление трансформатора, использую формулы (6.44) и (6.45):

$$\underline{Z}_{BX} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_2}{n \cdot n\underline{I}_2} = \frac{\underline{Z}_H}{n^2}. \qquad (6.47)$$

Входное сопротивление идеального трансформатора имеет такой же характер, что нагрузка, но отличается по величине в n^2 раз.

Трансформатор используют для согласования сопротивлений.

Пусть нагрузка имеет небольшое сопротивление $R_H = 4\,Ом$ (например, это сопротивление звуковой катушки динамика), а генератор (например, усилитель звуковой частоты) имеет большое сопротивление, $R_{ГЕН} = 10\,кОм$. Для выделения наибольшей мощности в нагрузке подключим нагрузку через идеальный трансформатор так, чтобы входное сопротивление трансформатора равнялось сопротивлению генератора: $R_{BX} = \frac{R_H}{n^2} = R_{ген}$. Вычислим нужный коэффициент трансформации:

$$n^2 = \frac{R_H}{R_{ген}} \frac{4}{10 \cdot 10^3} = 4 \cdot 10^{-4},\ n = 2 \cdot 10^{-2} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{50}.$$

6.12. Схема замещения воздушного трансформатора

Для трансформатора (рис.6.9) были получены уравнения (6.34) и (6.35):

$$\begin{cases} \underline{I}_1 R_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2 = \underline{E}_1 \\ \underline{I}_2 R_2 + \underline{I}_2 R_H + jX_H \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 - j\omega M \underline{I}_1 = 0 \end{cases}$$

Перепишем уравнения трансформатора в таком виде:

$$\begin{cases} \left[R_1 + j\omega\left(L_1 - M\right) + j\omega M\right]\underline{I}_1 - j\omega M\,\underline{I}_2 = \underline{E}_1 \\ -j\omega M\,\underline{I}_1 + \left[R_2 + R_н + jX_н + j\omega\left(L_2 - M\right) + j\omega M\right]\underline{I}_2 = 0 \end{cases} \qquad (6.48)$$

Убедимся в том, что уравнениям (6.48) соответствует схема (рис.6.13), составив по второму закону Кирхгофа уравнения для первого и второго контура.

Получили *схему замещения трансформатора* при встречном включении катушек. В схеме отсутствует магнитная связь. Контуры связанны электрически через сопротивление общей ветви $j\omega M$.

Если в трансформаторе включение катушек согласное (рис.6.14а), то схема замещения имеет вид, показанный на рис.6.14б:

В поперечной ветви схемы рис.6.14б индуктивность равна $-M$ и имеет расчетное значение. Схемы замещения позволяют упростить расчёт цепей с взаимной индуктивностью.

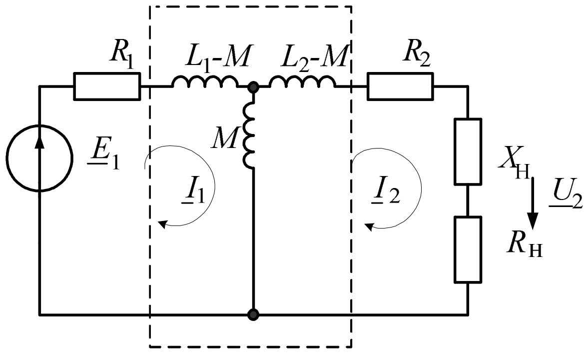


Рис.6.13

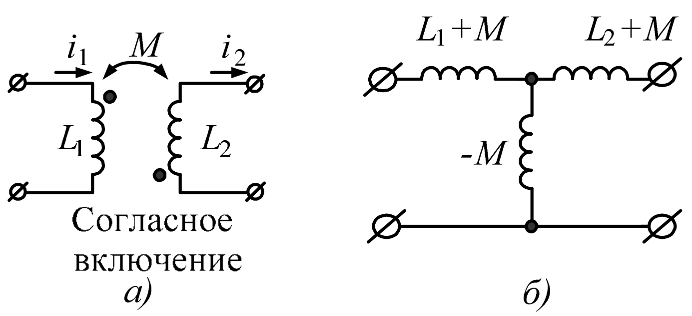


Рис.6.14

6.13. Развязка магнитно-связанных цепей

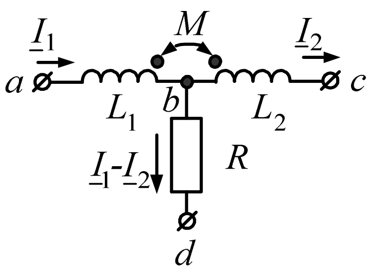


Рис.6.15

Развязкой называется замена магнитно-связанных цепей эквивалентными цепями без магнитных связей. На схеме рис.6.15 к узлу b подключены одноимённые зажимы.

Для учёта магнитной связи введем в схему наводимые напряжения взаимной индукции (рис.6.16) и запишем выражения для напряжений на ветвях *ab* и *bc*:

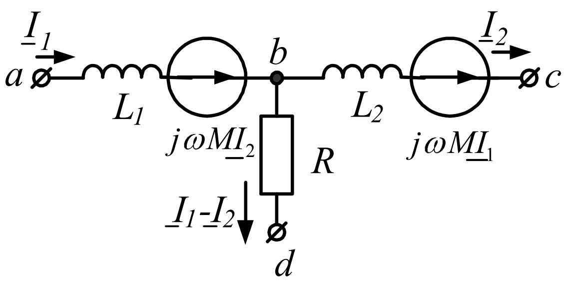


Рис.6.16

$$\underline{U}_{ав} = j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2 \quad (6.49)$$

$$\underline{U}_{вс} = j\omega L_2 \underline{I}_2 - j\omega M \underline{I}_1 \quad (6.50)$$

Переносим ЭДС взаимной индукции через узел b и переходим к схеме рис.6.17. В ней:

$$\underline{U}_{ав} = j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_1 \quad (6.51)$$

$$\underline{U}_{вс} = j\omega L_2 \underline{I}_2 - j\omega M \underline{I}_2 \quad (6.52)$$

В схеме рис.6.17 заменяем в верхних и нижних ветвях ЭДС эквивалентными индуктивностями по теореме компенсации так, чтобы на них были те же падения напряжения.

В результате мы выполнили развязку и получили эквивалентную схему без магнитных связей (рис.6.18):

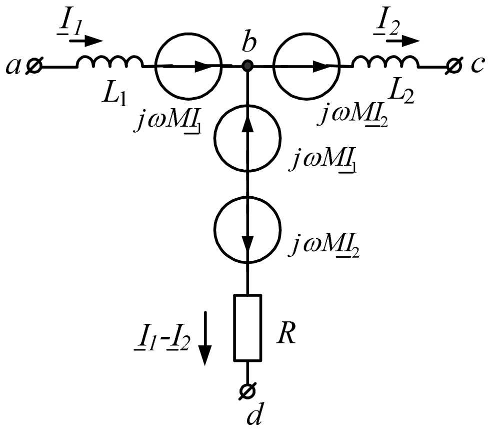


Рис.6.17

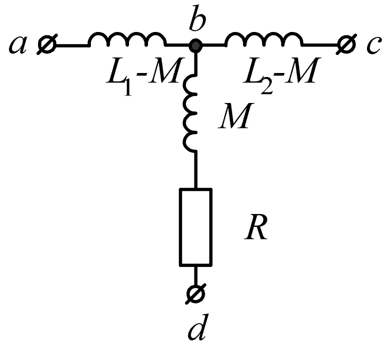


Рис.6.18

П р а в и л а   р а з в я з к и

При развязке магнитно-связанных цепей надо различать два случая подключения катушек и общему узлу. Эквивалентные схемы без магнитных связей показаны на рис.6.19 и 6.20.

1 - й   с л у ч а й . *К узлу подключены одноимённые зажимы.*

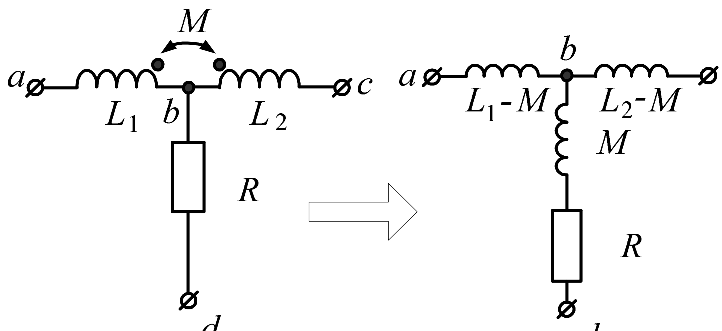


Рис.6.19

2 - й   с л у ч а й . *К узлу подключены разноимённые зажимы.*

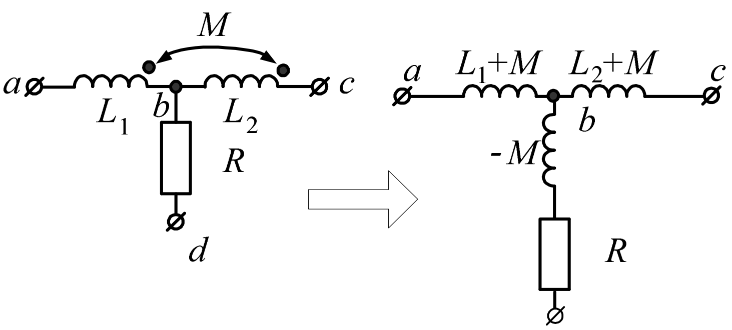


Рис.6.20

6.14. Расчёт сложных цепей, содержащих взаимные индуктивности

Расчет сложных цепей с взаимными индуктивностями проводят по законам Кирхгофа или по методу контурных токов. Метод узловых напряжений менее удобен, т.к. ЭДС взаимной индукции выражается через токи.

Нельзя применять метод эквивалентного генератора, если есть магнитная связь внутренней и внешней цепи. Нельзя применять преобразование треугольник – звезда и обратно без развязки и перехода к эквивалентным схемам без взаимных индуктивностей.

Правило составления уравнений

На рис.6.21 показаны два индуктивных элемента сложной цепи. Индуктивность L_k находится в контуре с направлением обхода O_k. В индуктивности L_s проходит ток $\underline{I}_s$. Для определения знаков напряжений взаимной индукции надо пользоваться следующим правилом:

Напряжение $\underline{U}_{ks}$, *наводимое на индуктивность* L_k, *равно* $+j\omega M_{ks}\underline{I}_s$, *если направление обхода индуктивности* L_k *и ток* $\underline{I}_s$ *одинаково направлены относительно одноимённых зажимов.*

Если направление обхода индуктивности L_k *и ток* $\underline{I}_s$ *неодинаково направлены относительно одноимённых зажимов, напряжение* $\underline{U}_{ks}$, *наводимое на индуктивность* L_k, *равно* $-j\omega M_{ks}\underline{I}_s$.

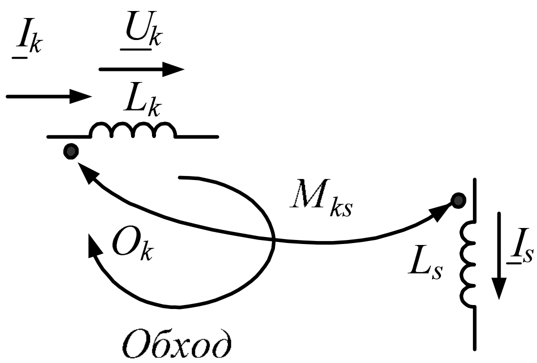


Рис.6.21

Пример 6.1

На рис.6.22 показана сложная цепь с тремя взаимно-связанными индуктивностями. Составить уравнения для расчета цепи.

Решение

Составляем уравнения для токов по первому закону Кирхгофа:

$$\underline{I}_1 - \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0. \tag{6.53}$$

Составляем уравнения для напряжений по второму закону Кирхгофа:

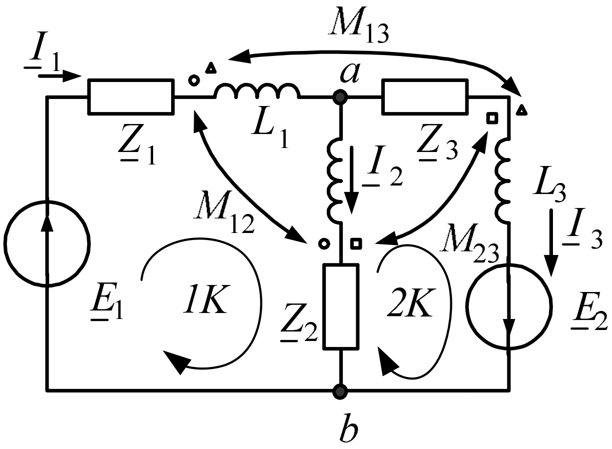


Рис.6.22

1-й контур:

$$\underline{I}_1\underline{z}_1 + j\omega L_1\underline{I}_1 - j\omega M_{12}\underline{I}_2 + j\omega M_{13}\underline{I}_3 + j\omega L_2\underline{I}_2 - j\omega M_{12}\underline{I}_1 -$$
$$- j\omega M_{23}\underline{I}_3 + \underline{z}_2\underline{I}_2 = \underline{E}_1 \qquad (6.54)$$

2-й контур:

$$\underline{I}_3\underline{z}_3 + j\omega L_3\underline{I}_3 + j\omega M_{13}\underline{I}_1 + j\omega L_3\underline{I}_3 - j\omega M_{23}\underline{I}_2 - \underline{I}_2\underline{z}_2 -$$
$$- j\omega L_2\underline{I}_2 + j\omega M_{12}\underline{I}_1 + j\omega M_{23}\underline{I}_3 = \underline{E}_2 \qquad (6.55)$$

6.15. Примеры расчета цепей с взаимными индуктивностями

Пример 6.2

В цепи рис.6.23 задано: R_1=60 Ом, R_2=10 Ом, L_1=0,8 мГн, L_2=0,4 мГн, М=0,1 мГн, ω=10^6 1/с. При каком значении емкости C в цепи наступит резонанс?

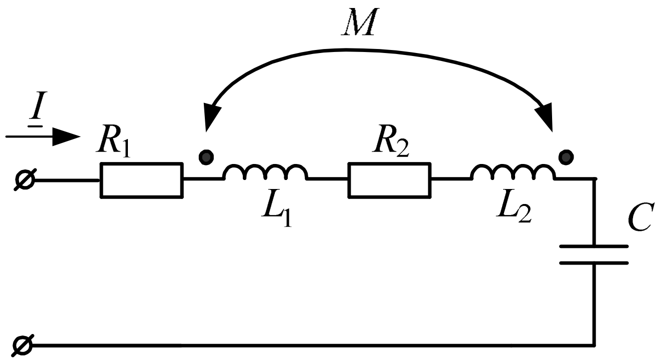


Рис.6.23

Решение

1. Катушки индуктивности включены встречно. Находим эквивалентную индуктивность:

$$L_{экв} = L_1 + L_2 - 2M =$$
$$= 0{,}8 + 0{,}4 - 0{,}2 = 1\,мГн.$$

2. При резонансе на заданной частоте X_C=$X_{Lэкв}$:

$$\frac{1}{\omega C} = \omega L_{экв}.$$

Отсюда находим:

$$C = \frac{1}{\omega^2 L_{экв}} = \frac{1}{\omega^2 L_{экв}} = \frac{1}{10^{12}\cdot 10^{-3}} = 10^{-9} = 1\,нФ.$$

Пример 6.3

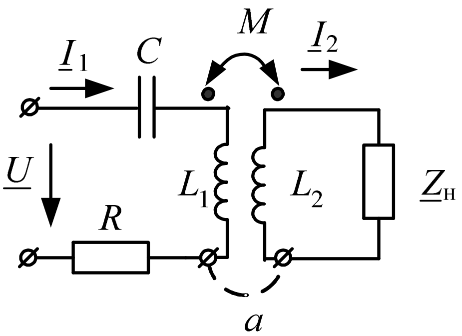


Рис.6.24

На рис.6.24 комплексная нагрузка подключена к вторичной обмотке трансформатора. Заданы параметры цепи: U_1=10 В, X_{L1}=4 Ом, X_{L2}=6 Ом, X_C=4 Ом, X_M=2 Ом, R=2 Ом. При каком значении $\underline{Z}_н$ в нем выделяется максимальная мощность? Рассчитать токи I_1 и I_2 и мощность $P_Н$.

Решение

1. Нижние выводы катушек индуктивности можно соединить. При этом токи в цепи не изменятся. Заменим трансформатор схемой замещения. Так как одноименные выводы катушек одинаково расположены относительно нижнего узла a получим эквивалентную схему рис.6.25:

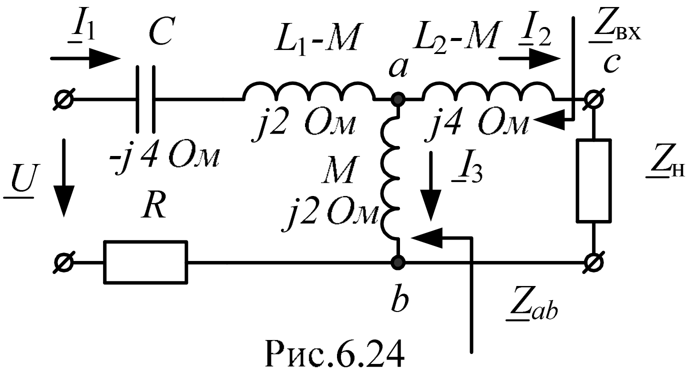


Рис.6.24

2. Оптимальное сопротивление нагрузки равно комплексно-сопряженному сопротивлению эквивалентного генератора, заменяющего основную схему слева от зажимов cb.

Найдем при отключенной нагрузке и закороченных входных зажимах:

$$\underline{Z}_{ab} = \frac{j2(2-j2)}{2+j2-j2} = \frac{4+j4}{2} = 2+j2\,Ом,$$

$$\underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_{ab} + j4 = 2+j6\,Ом,\ \underline{Z}_{н\,опт} = \underline{Z}^{*}_{вх} = 2-j6\,Ом\ .$$

3. Выполним расчет токов при включенной оптимальной нагрузке (рис.6.25).

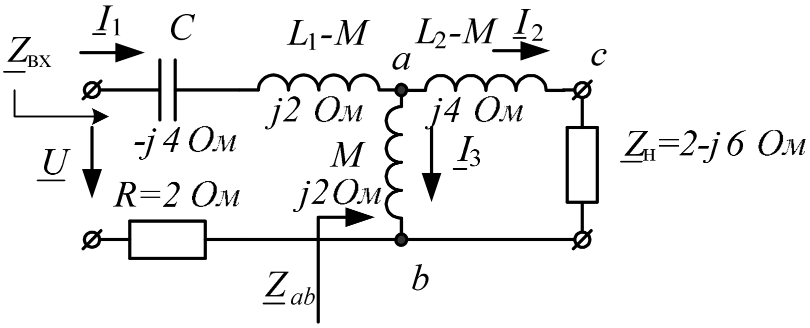


Рис.6.25

Вычислим сопротивление $\underline{Z}_{ab}$:

$$\underline{Z}_{ab} = \frac{j2(2-j6+j4)}{2-j6+j4+j2} = \frac{(2-j2)j2}{2} = 2+j2\,Ом$$

.

Входное сопротивление: $\underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_{ab} - j4 + j2 + 2 = 4\,Ом$.

Далее вычислим:

входной ток:

$$\underline{I}_1 = \frac{10}{2-j2+2+j2} = \frac{10}{4} = 2{,}5\,A$$

напряжение $\underline{U}_{ав}$:

$$\underline{U}_{ab} = \underline{I}_1(2+j2) = 5+j5\,B,$$

токи $\underline{I}_3$ и $\underline{I}_2$:

$$\underline{I}_3 = \frac{5+j5}{j2} = 2{,}5 - j2{,}5\,A;$$

$$\underline{I}_2 = \frac{5+j5}{2-j2} = \frac{5}{2}\cdot\frac{1+j}{1-j} = \frac{5}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}e^{j45^o}}{\sqrt{2}e^{-j45^o}} = 2{,}5j\,A.$$

4. Выполним расчет мощность в нагрузке:

$$P_н = I_2^2 R_н = (2{,}5)^2 2 = 12{,}5\,Вт.$$

Пример 6.4

Параметры цепи заданы на символической схеме замещения (рис.6.26а). Найти входной ток.

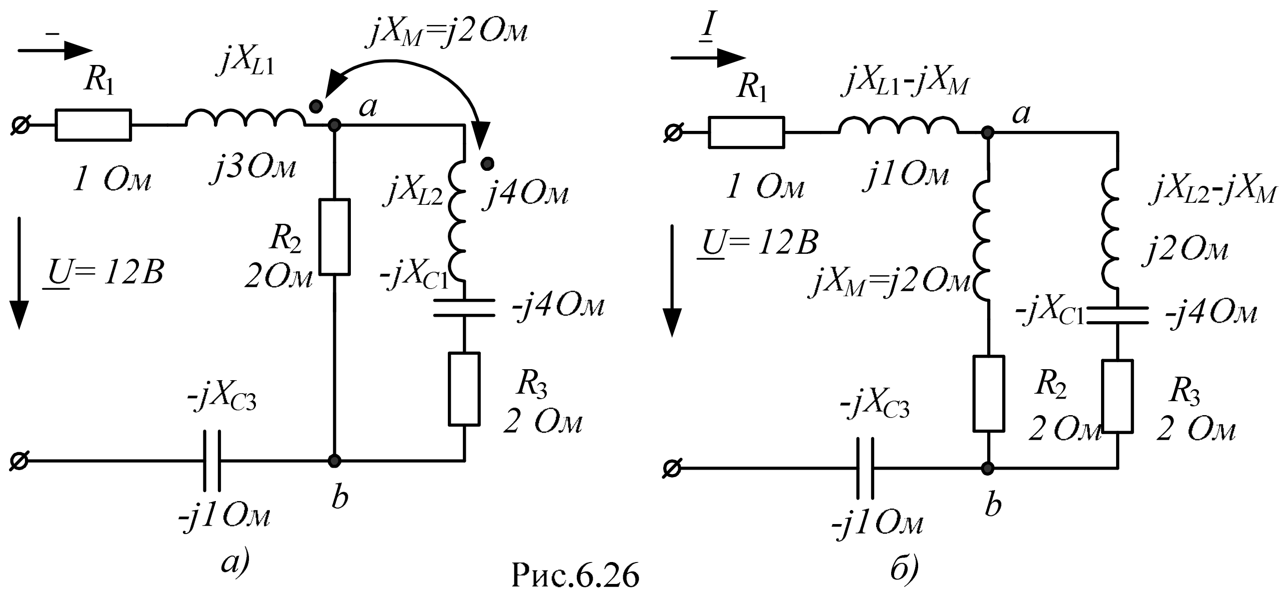


Рис.6.26

Р е ш е н и е

1. Выполним развязку магнитно-связанных катушек. Одноименные зажимы катушек одинаково расположены относительно узла «*a*». Поэтому после развязки получим схему рис.6.26б:

2. Найдем эквивалентное сопротивление параллельных ветвей:

$$\underline{Z}_{ab} = \frac{(2+j2)(2-j2)}{2+j2+2-j2} = \frac{4+4}{4} = 2Ом.$$

Входное сопротивление: $\underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_{ab} + 1 + j1 + 2 - j1 = 3Ом$.

Входной ток: $\underline{I} = \dfrac{\underline{U}}{\underline{Z}_{вх}} = \dfrac{12}{3} = 4A$.

П р и м е р 6.5

Заданы параметры цепи рис.6.27: ω=$10^4$1/с, L_1=1,2 мГн, L_2=1,6 мГн, С=2,5 мкФ, R_1=R_2=5 Ом, R_3=40 Ом.

При каком значении *M* в цепи наступит резонанс?

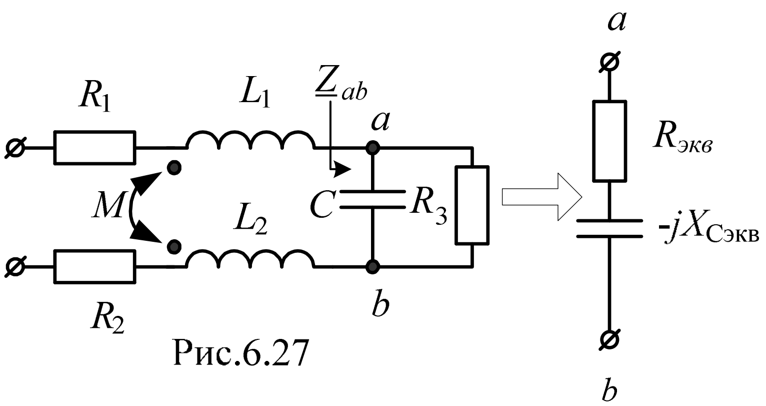


Рис.6.27

Р е ш е н и е

1. Найдем эквивалентное сопротивление $\underline{Z}_{ab}$ параллельного соединения емкости и резистора R_3.

Реактивное сопротивление емкости:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{10^4 \cdot 2{,}5 \cdot 10^{-6}} = 40\,Ом$$

$$\underline{Z}_{ab} = \frac{-jX_C R_3}{R_3 - jX_C} = \frac{-j40 \cdot 40}{40 - j40} = 20 - j20 = R_Э - jX_{CЭ}.$$

В результате мы преобразовали параллельное соединение емкости и резистора к эквивалентному последовательному соединению.

2. Условие резонанса: $\omega L_{экв} = X_{CЭ} = 20\,Ом$;

$$L_{экв} = \frac{20}{\omega} = \frac{20}{10^4} = 2 \cdot 10^{-3}\,Гн.$$

3. Находим М:

Эквивалентная индуктивность при встречном включении двух катушек: $L_{экв} = L_1 + L_2 - 2M = 2\,мГн$.

Находим M:

$$M = \frac{L_1 + L_2 - L_{экв}}{2} = \frac{(1{,}2 + 1{,}6 - 2) \cdot 10^{-3}}{2} = 0{,}4\,мГн.$$

Пример 6.6

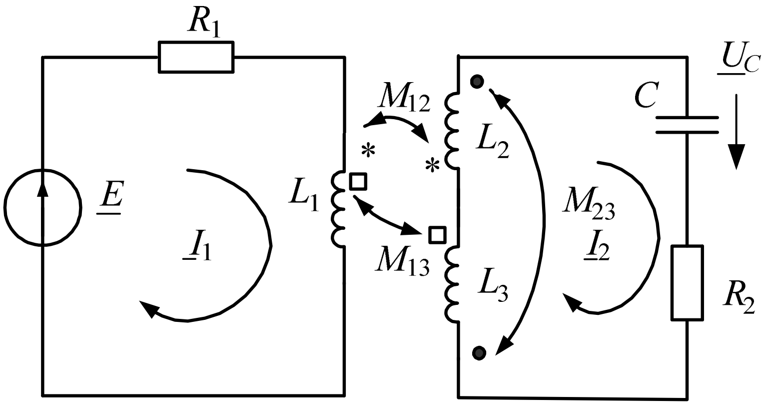


Рис.6.27

В сложной цепи с тремя магнитно-связанными индуктивностями заданы параметры: E=45 В, R_1=10 Ом, R_2=10 Ом, X_{L1}=10 Ом, X_{L2}=20 Ом, X_{L3}=30 Ом, X_C=40 Ом, X_{M12}=15 Ом, X_{M13}=10 Ом, X_{M23}= Ом. Найти токи в катушках и напряжение на емкости.

Р е ш е н и е

1. Выбираем направления обхода контуров и составляем уравнения по второму закону Кирхгофа. Если направление обхода катушки i и ток в катушке k одинаково направлены относительно одноименных зажимов, напряжение взаимной индукции входит в уравнения Кирхгофа со знаком плюс. В противном случае – со знаком минус.

1-й контур:

$$R_1\underline{I}_1 + jX_{L1}\underline{I}_1 + jX_{M12}\underline{I}_2 - jX_{M13}\underline{I}_2 = \underline{E};$$

2-й контур:

$$R_2\underline{I}_2 - jX_{C2}\underline{I}_2 + jX_{L3}\underline{I}_2 - jX_{M23}\underline{I}_2 - jX_{M13}\underline{I}_1 +$$
$$+jX_{L2}\underline{I}_2 + jX_{M12}\underline{I}_1 - jX_{M23}\underline{I}_2 = 0.$$

Подставим значения параметров и получим систему уравнений:

$$\begin{cases}(10 + j10)\underline{I}_1 + j5\underline{I}_2 = 45 \\ j5\underline{I}_1 + (10 - j10)\underline{I}_2 = 0\end{cases}$$

Из второго уравнения: $\underline{I}_2 = -\dfrac{j5\underline{I}_1}{(10 - j10)}$.

Подставим в первое уравнение:

$$(10 + j10)\underline{I}_1 + j5(-\frac{j5\underline{I}_1}{(10 - j10)}) = 45;$$

$$225\underline{I}_1 = 450 - j450.$$

Получим ответы:

$$\underline{I}_1 = 2 - j2\,A,\;\; \underline{I}_2 = -j1A,\, U_C = X_C I_2 = 40\,B.$$

Пример 6.7

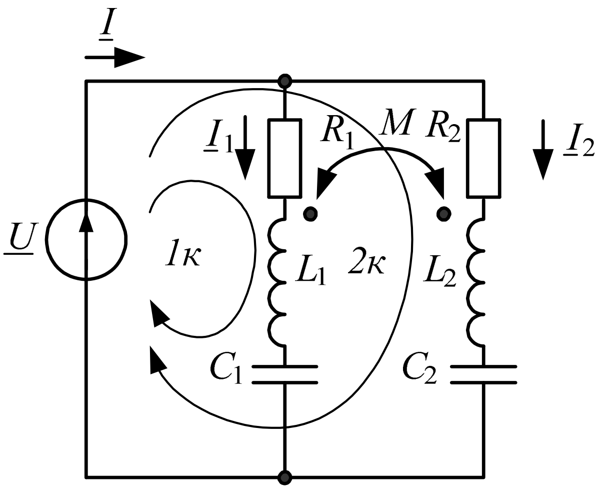


Рис.6.28

Заданы параметры цепи рис.6.28: $\underline{U}$=150 В, X_{L1}=8 Ом, X_{L2}= 15 Ом, X_{C1}=8 Ом, X_{C2}=15 Ом, X_M= 10 Ом, R_1=5 Ом, R_2=10 Ом. Найти токи и рассчитать баланс активной мощности.

Р е ш е н и е

1. Составляем уравнения по второму закону Кирхгофа для расчета токов:

1-й контур:

$$R_1\underline{I}_1 + jX_{L1}\underline{I}_1 + jX_M\underline{I}_2 - jX_{C1}\underline{I}_1 = \underline{U};$$

2-й контур:

$$R_2\underline{I}_2 + jX_{L2}\underline{I}_2 + jX_M\underline{I}_1 - jX_{C2}\underline{I}_2 = \underline{U}.$$

Подставим значения параметров:

$$\begin{cases} 5\underline{I}_1 + j10\underline{I}_2 = 150 \\ j10\underline{I}_1 + 10\underline{I}_2 = 150 \end{cases}.$$

Умножим первое уравнение на $j2$ и вычтем из него второе уравнение. Получим:

$$30\underline{I}_2 = 150 - j300\,A\,,\ \underline{I}_2 = 5 - j10\,A = 11{,}2e^{-j63^o}\,A.$$

Умножим второе уравнение на j и вычтем из первого:

$$\underline{I}_1 = 150 - j150,\ \ \underline{I}_1 = 10 - j10\,A = 10\sqrt{2}e^{j45^o}\,A.$$

Находим ток в источнике напряжения:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 15 - j20\,A.$$

2. Находим активные мощности в ветвях цепи:

$$P_1 = \boldsymbol{Re}\left[\underline{U}\cdot\overset{*}{\underline{I}_1}\right] = \boldsymbol{Re}\left[150(10 + j10)\right] = 1500\,Вт\,,$$

$$P_2 = \boldsymbol{Re}\left[\underline{U}\cdot\overset{*}{\underline{I}_2}\right] = \boldsymbol{Re}\left[150(5 + j10)\right] = 750\,Вт.$$

3. Находим активную мощность источника:

$$P_U = \boldsymbol{Re}\left[\underline{U}\cdot\overset{*}{\underline{I}}\right] = \boldsymbol{Re}\left[150(15 + j20)\right] = 2250 = P_1 + P_2.$$

4. Найдем мощность, выделяемую в виде тепла в ветвях:

$$P_{R1} = I_1^2 R_1 = 5\cdot\left(10\sqrt{2}\right)^2 = 5\cdot 200 = 1000\,Вт.$$

$$P_{R2} = I_2^2 R_2 = 10\cdot(11{,}2)^2 = 1250\,Вт.$$

5. Обратим внимание на то, что активная мощность первой ветви P_1 на 500 Вт больше, чем мощность P_{R1}, выделяемая в первой ветви в виде тепла. Это означает, что часть активной мощности передается из первой катушки во вторую через магнитное поле. Передаваемая во вторую катушку комплексная мощность равна:

$$\tilde{S}_{2M} = \underline{E}_{2M}\cdot\overset{*}{\underline{I}_2} = \left(jX_M\underline{I}_1\right)\cdot(5 + j10) = j10(10 - j10)(5 + j10) =$$
$$= (100 + j100)(5 + j10) = 500 + j500 + j1000 - 1000 = -500 + j1500\,ВА.$$

Активная мощность $P_{M2} = -500\,Вт$ отрицательна. Следовательно, эта мощность подводится во вторую катушку из первой через магнитное поле. Активная мощность, отдаваемая первой катушкой во вторую $P_{M1} = - P_{M2} = 500\,Bm$.

В результате получаем:

$$P_1 = P_{R1} + P_{M1} = 1000 + 500 = 1500\,Bm,$$
$$P_2 = P_{R2} + P_{M2} = 1250 - 500 = 750\,Bm.$$

Глава 7. ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

7.1. Определение четырехполюсника

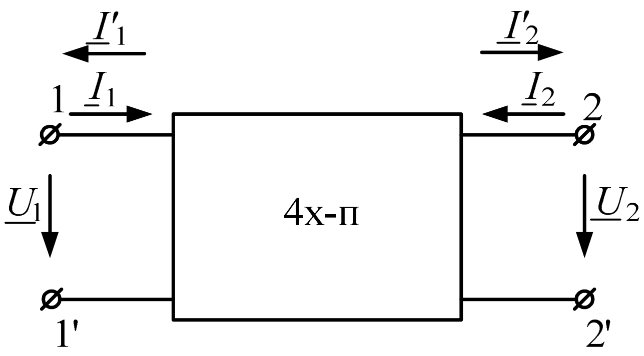


Рис.7.1

Четырехполюсником называется электрическая цепь, которая имеет 2 входных и 2 выходных зажима. На рис.7.1 показан четырехполюсник (4х-п). Входные (первичные) зажимы обозначены $1-1'$. Выходные (вторичные) зажимы обозначены $2-2'$. Будем считать, что четырехполюсник включен в цепь гармонического синусоидального тока. На схеме обозначены комплексные действующие значения токов и напряжений на входах и выходах четырехполюсника. Причем, для токов нам понадобятся разные направления.

Внутри четырехполюсника могут быть различные пассивные или активные цепи, соединенные с внешней цепью двумя парами зажимов.

7.2. Классификация четырехполюсников

Четырехполюсники бывают:

1. *Пассивные* (без источников энергии).

2. *Активные* (содержат источники энергии).

3. *Линейные* (содержат только линейные элементы).

4. *Нелинейные* (содержат один или несколько нелинейных элементов).

5. *Симметричные,* в которых при перемене местами входных и выходных зажимов токи и напряжения во внешней цепи не меняются.

6. *Несимметричные*, которые не обладают свойствами симметричных.

7. *Обратимые*, в которых взаимная проводимость входного и выходного контура не зависит от того, какая из двух пар зажимов является первичной, а какая вторичной.

Все линейные пассивные четырехполюсники обратимы !!!

8. *Необратимые* – это несимметричные активные четырехполюсники.

Задачи теории четырехполюсников

1. Нахождение токов и напряжений на входе и выходе четырехполюсника по его обобщённым параметрам, без расчета режима внутри четырехполюсника.

2. Вычисление параметров сложных четырехполюсников, образованных, включением более простых.

В этой главе мы будем изучать *теорию линейных пассивных четырехполюсников*.

7.3. Основные уравнения и параметры четырехполюсников

Для исследования четырехполюсников применяют 6 систем параметров. Они отличаются тем, какие величины в четырехполюснике заданы и какие подлежат определению. Для четырехполюсника (рис.7.1) возможные комбинации известных и неизвестных величин напряжений и токов представлены в таблице 7.1.

Таблица 7.1

Дано	$\underline{U}_1,\underline{U}_2$	$\underline{I}_1,\underline{I}_2$	$\underline{U}_2,\underline{I}_2$`	$\underline{I}_1,\underline{U}_2$	$\underline{U}_1,\underline{I}_2$`	$\underline{U}_1,\underline{I}_1$`
Определить	$\underline{I}_1,\underline{I}_2$	$\underline{U}_1,\underline{U}_2$	$\underline{U}_1,\underline{I}_1$	$\underline{U}_1,\underline{I}_2$	$\underline{I}_1,\underline{U}_2$	$\underline{U}_2,\underline{I}_2$
Параметры	Y	Z	A	H	G	B

В линейных цепях заданные и определяемые токи и напряжения связаны системами 2-х линейных уравнений. *Коэффициенты этих уравнений называют параметрами четырехполюсника*.

В каждом столбце таблицы 7.1 указаны обозначения параметров четырехполюсников, соответствующих заданной комбинации известных и неизвестных напряжений и токов.

7.4. Система Y-параметров

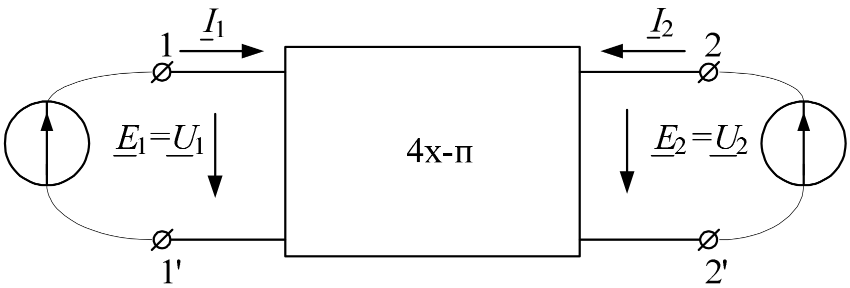


Рис.7.2

В четырехполюснике (рис.7.2) заданы напряжения: $\underline{U}_1,\underline{U}_2$.

Требуется найти токи: $\underline{I}_1,\underline{I}_2$.

Считаем, что к четырехполюснику подключены два источника напряжения: $\underline{E}_1=\underline{U}_1,\underline{E}_2=\underline{U}_2$. Каждый источник напряжения будет создавать свой частичный ток.

По методу наложения полные токи находим так:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{I}_1' + \underline{I}_1'' = \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 &= \underline{I}_2' + \underline{I}_2'' = \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2 \end{aligned} \qquad (7.1)$$

Составляющие тока обусловлены действием каждого напряжения по отдельности. Коэффициенты при напряжениях являются проводимостями и называются Y- параметры.

Получили систему уравнений четырехполюсника в Y-параметрах.

Физический смысл и непосредственное определение Y-параметров

Из уравнений (7.1) видно, что для того, чтобы найти $\underline{Y}_{11}$, надо сделать $\underline{U}_2 = 0$ (короткое замыкание на выходе), измерить $\underline{I}_1$ и $\underline{U}_1$:

$\underline{Y}_{11} = \dfrac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\left(\underline{U}_2 = 0\right)$ - *входная проводимость при КЗ на выходе.*

Далее получим:

$\underline{Y}_{22} = \dfrac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2}\left(\underline{U}_1 = 0\right)$- *входная проводимость со стороны выходных зажимов при КЗ на входе (выходная проводимость)*;

$\underline{Y}_{21} = \dfrac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1}\left(\underline{U}_2 = 0\right)$- *прямая передаточная проводимость при КЗ на выходе;*

$\underline{Y}_{12} = \dfrac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\left(\underline{U}_1 = 0\right)$- *обратная передаточная проводимость при КЗ на входе.*

Свойства Y - параметров

1. В обратимом четырехполюснике всегда выполняется равенство: $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}$. Следовательно, *линейный пассивный четырехполюсник имеет 3 независимых Y-параметра.*

2. В симметричном обратимом четырехполюснике $\underline{Y}_{12} = \underline{Y}_{21}$, $\underline{Y}_{11} = \underline{Y}_{22}$. Следовательно, *симметричный обратимый четырехполюсник имеет 2 независимых Y-параметра*.

Матричная форма уравнений

Запишем уравнения (7.1) в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}. \qquad (7.2)$$

Определитель матрицы *Y*-параметров:

$$\left|\underline{Y}\right| = \underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}. \qquad (7.3)$$

7.5. Система Z –параметров

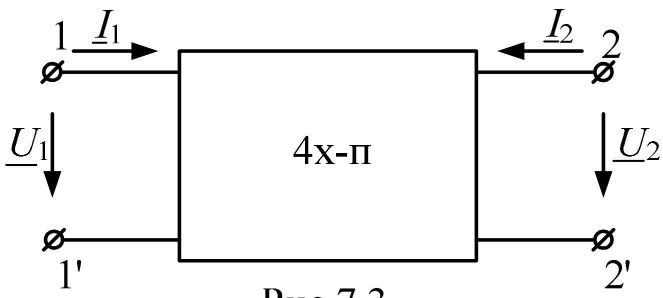


Рис.7.3

В четырехполюснике рис.7.3 заданы токи: $\underline{I}_1, \underline{I}_2$.

Найти напряжения: $\underline{U}_1, \underline{U}_2$.

В этом случае применяют систему Z-параметров:

$$\begin{matrix} \underline{U}_1 = \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 = \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2 \end{matrix}. \qquad (7.4)$$

Физический смысл и непосредственное определение Z-параметров

Для определения параметра $\underline{Z}_{11}$ надо в первом уравнении (7.4) сделать $\underline{I}_2$ (холостой ход на выходе) и вычислить:

$\underline{Z}_{11} = \dfrac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\left(\underline{I}_2 = 0\right)$ - входное сопротивление четырехполюсника при холостом ходе вторичных зажимов (ХХ2).

Далее находим:

$\underline{Z}_{22} = \dfrac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\left(\underline{I}_1 = 0\right)$- *входное сопротивление со стороны выходных зажимов при ХХ1 первичных зажимов (выходное сопротивление)*;

$\underline{Z}_{21} = \dfrac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1}\left(\underline{I}_2 = 0\right)$- *прямое передаточное сопротивление при ХХ2*;

$\underline{Z}_{12} = \dfrac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\left(\underline{I}_1 = 0\right)$- *обратное передаточное сопротивление при ХХ1.*

В обратимом четырехполюснике: $\underline{Z}_{12}$=$\underline{Z}_{21}$ – имеем 3 независимых Z - параметра.

В симметричных обратимых четырехполюсниках: $\underline{Z}_{12}=\underline{Z}_{21}$; $\underline{Z}_{11}=\underline{Z}_{22}$ – имеем 2 независимых Z – параметра.

Связь Y и Z параметров

Запишем уравнения в Y параметрах:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 &= \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2 \end{aligned}. \tag{7.5}$$

Решим эти уравнения относительно $\underline{U}_1$ и $\underline{U}_2$:

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Y}_{11} & \underline{Y}_{12} \\ \underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{|Y|} \begin{pmatrix} \underline{Y}_{22} & -\underline{Y}_{21} \\ -\underline{Y}_{12} & \underline{Y}_{11} \end{pmatrix}^{T} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{|Y|} \begin{pmatrix} \underline{Y}_{22} & -\underline{Y}_{12} \\ -\underline{Y}_{21} & \underline{Y}_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} \tag{7.6}$$

Получили решение, подобное системе Z-параметров:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \frac{\underline{Y}_{22}}{|Y|}\underline{I}_1 - \frac{\underline{Y}_{12}}{|Y|}\underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 &= -\frac{\underline{Y}_{21}}{|Y|}\underline{I}_1 + \frac{\underline{Y}_{11}}{|Y|}\underline{I}_2 \end{aligned}. \tag{7.7}$$

Сравнивая уравнения (7.4) и (7.7), находим связь *Z*- и *Y*- параметров:

$$\begin{pmatrix} \underline{Z}_{11} & \underline{Z}_{12} \\ \underline{Z}_{21} & \underline{Z}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{Y}_{22}/|Y| & -\underline{Y}_{12}/|Y| \\ -\underline{Y}_{21}/|Y| & \underline{Y}_{11}/|Y| \end{pmatrix}. \tag{7.8}$$

7.6. Система А – параметров

А-параметры применяют при анализе передачи энергии от входных зажимов к выходным зажимам и при каскадном соединении четырехполюсников. Направление токов и напряжений в четырехполюснике при использовании А-параметров показано на рис.7.4. Направление тока $\underline{I}_2$ изменилось.

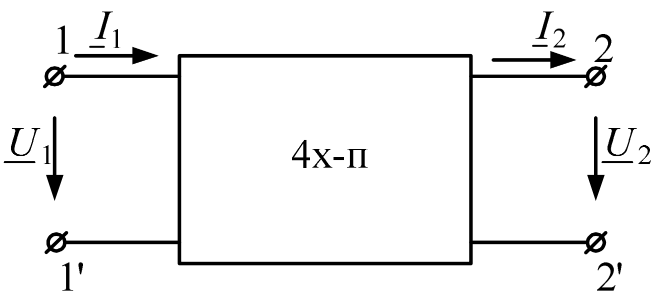


Рис.7.4

Заданы напряжение и ток на выходе четырехполюсника: $\underline{U}_2, \underline{I}_2$.

Требуется найти напряжение и ток на входе: $\underline{U}_1, \underline{I}_1$.

Уравнения четырехполюсника в А-параметрах записывают так:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 &= \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2 \end{aligned}. \qquad (7.9)$$

Связь А- и Y-параметров

Для вывода формул, связывающих А- и Y- параметры в уравнениях (7.1) поменяем знак направление тока $\underline{I}_2$:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2 \; (1) \\ -\underline{I}_2 &= \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2 \; (2) \end{aligned}. \qquad (7.10)$$

Из уравнения (2) выразим $\underline{U}_1$:

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}}\underline{U}_2 - \frac{1}{\underline{Y}_{21}}\underline{I}_2 \,. \qquad (7.11)$$

Подставим (7.11) в (1) из (7.10) и получим после преобразования:

$$\underline{I}_1 = -\frac{|Y|}{\underline{Y}_{21}}\underline{U}_2 - \frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}}\underline{I}_2 . \qquad (7.12)$$

Теперь сравним уравнения (7.9) и (7.11)-(7.12). Получим выражения А-параметров через Y - параметры:

$$\underline{A}_{11} = -\frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}}, \underline{A}_{12} = -\frac{1}{\underline{Y}_{21}}, \underline{A}_{21} = -\frac{|Y|}{\underline{Y}_{21}}, \underline{A}_{22} = -\frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}}. \qquad (7.13)$$

Найдем определитель системы А-параметров:

$$\begin{aligned} |A| &= \underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{21}\underline{A}_{12} = \frac{\underline{Y}_{22}}{\underline{Y}_{21}}\frac{\underline{Y}_{11}}{\underline{Y}_{21}} - \frac{1}{\underline{Y}_{21}}\frac{|Y|}{\underline{Y}_{21}} = \\ &= \frac{\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} + \underline{Y}_{12}\underline{Y}_{21}}{\underline{Y}_{21}^2} = \frac{\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{21}} \end{aligned}. \qquad (7.14)$$

Мы знаем, что в любом обратимом четырехполюснике $\dfrac{\underline{Y}_{12}}{\underline{Y}_{21}} = 1$.

Следовательно, определитель системы А-параметров равен 1:

$$|\underline{A}| = 1. \qquad (7.15)$$

Поэтому обратимый четырехполюсник имеет 3 независимых А-параметра.

В симметричном обратимом четырехполюснике $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$. Следовательно, имеем 2 независимых А – параметра.

Физический смысл и непосредственное определение А-параметров

Для определения А-параметров по уравнениям (7.9) надо на выходе создавать режим холостого хода $\left(\underline{I}_2 = 0\right)$ или короткого замыкания $\left(\underline{U}_2 = 0\right)$. А-параметры определяются по следующим формулам:

$\underline{A}_{11} = \dfrac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\left(\underline{I}_2 = 0\right)$- *коэффициент трансформации по напряжению* (при ХХ2);

$\underline{A}_{22} = \dfrac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}\left(\underline{U}_2 = 0\right)$ - *коэффициент трансформации тока* (при КЗ2);

$\underline{A}_{12} = \dfrac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}$ (U_2=0) - *величина, обратная передаточной проводимости* при (КЗ2);

$\underline{A}_{21} = \dfrac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\left(\underline{I}_2 = 0\right)$ - *величина, обратная передаточному сопротивлению* (при ХХ2).

7.7. Система В-параметров

В системе В-параметров направление передачи энергии противоположно тому, которое принято в системе А-параметров (рис.7.5).

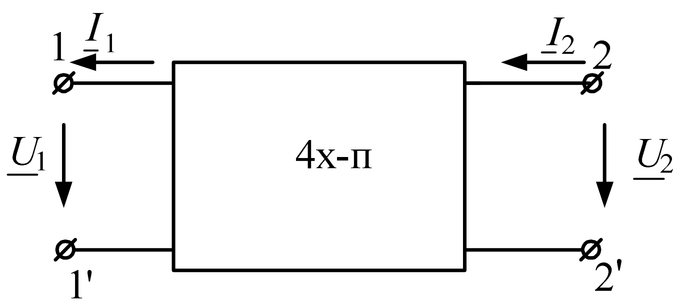


Рис.7.5

Заданы напряжение и ток на первичных зажимах: $\underline{U}_1, \underline{I}_1$.

Требуется найти: $\underline{U}_2, \underline{I}_2$.

Для решения надо в уравнения четырехполюсника с А-параметрами (7.9) подставить $-\underline{I}_1$ и $-\underline{I}_2$ и решить их относительно $\underline{U}_2$ и $\underline{I}_2$. В результате получим уравнения в системе В-параметров:

$$\begin{aligned}\underline{U}_2 &= \underline{A}_{22}\underline{U}_1 + \underline{A}_{12}\underline{I}_1\\ \underline{I}_2 &= \underline{A}_{21}\underline{U}_1 + \underline{A}_{11}\underline{I}_1\end{aligned}. \qquad (7.16)$$

П р а в и л о :

При перемене направления передачи энергии коэффициенты $\underline{A}_{11}$ и $\underline{A}_{22}$ в обратимых четырехполюсниках меняются местами.

7.8. Система Н-параметров

В системе Н-параметров направления токов и напряжений такие же, как в Y- и Z- параметрах (рис.7.6).

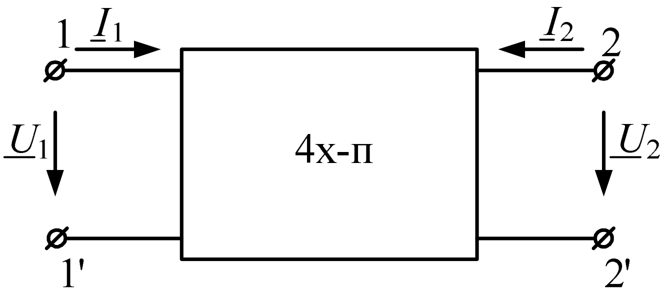


Рис.7.6

Заданы: $\underline{I}_1, \underline{U}_2$.

Требуется найти: $\underline{U}_1, \underline{I}_2$.

Уравнения в Н-параметрах:

$$\begin{aligned}\underline{U}_1 &= \underline{H}_{11}\underline{I}_1 + \underline{H}_{12}\underline{U}_2\\ \underline{I}_2 &= \underline{H}_{21}\underline{I}_1 + \underline{H}_{22}\underline{U}_2\end{aligned}. \qquad (7.17)$$

Ф и з и ч е с к и й с м ы с л и н е п о с р е д с т в е н н о е
о п р е д е л е н и е Н - п а р а м е т р о в

$$\underline{H}_{11} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right)_{\underline{U}_2=0} = \frac{1}{\underline{Y}_{11}}$$ - *входное сопротивление* при КЗ выхода;

$$\underline{H}_{12} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{I}_1=0} = \frac{1}{\underline{A}_{22}}$$ - *коэффициент обратной связи по напряжению* при ХХ входа;

$$\underline{H}_{21} = \left(\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1}\right)_{\underline{U}_2=0}$$ - *коэффициент передачи тока* при КЗ выхода;

$$\underline{H}_{22} = \left(\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{I}_1=0} = \frac{1}{\underline{Z}_{22}}$$ - *выходная проводимость* при ХХ входа.

Н-параметры широко применяются при расчете схем с биполярными транзисторами.

7.9. Входное сопротивление четырехполюсника

К зажимам $2-2'$ четырехполюсника (рис.7.7) подключено сопротивление нагрузки $\underline{Z}_2$. Находим *входное сопротивление со стороны зажимов* $1-1'$ *:*

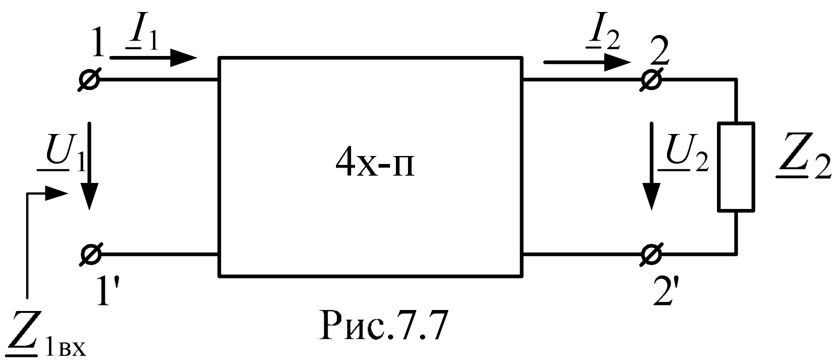


Рис.7.7

$$\underline{Z}_{1вх} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_2\underline{A}_{11} + \underline{I}_2\underline{A}_{12}}{\underline{U}_2\underline{A}_{21} + \underline{I}_2\underline{A}_{22}} = \frac{\dfrac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\underline{A}_{11} + \underline{A}_{12}}{\dfrac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\underline{A}_{21} + \underline{A}_{22}} = \frac{\underline{Z}_2\underline{A}_{11} + \underline{A}_{12}}{\underline{Z}_2\underline{A}_{21} + \underline{A}_{22}}. \quad (7.18)$$

Частные случаи

1. Короткое замыкание на выходе ($\underline{Z}_2 = 0$).

При этом:

$$\underline{Z}_{1вх} = \underline{Z}_{1k} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}}. \quad (7.19)$$

2. Холостой ход на выходе ($\underline{Z}_2 = \infty$).

В этом случае:

$$\underline{Z}_{1вх} = \underline{Z}_{1x} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}}. \quad (7.20)$$

Найдем теперь *входное сопротивление со стороны вторичных зажимов* $2-2'$ (рис.7.8).

Направление передачи энергии изменилось на противоположное. Поэтому, записываем уравнения в В-параметрах:

$$\begin{aligned} \underline{U}_2 &= \underline{U}_1\underline{A}_{22} + \underline{I}_1\underline{A}_{12} \\ \underline{I}_2 &= \underline{U}_1\underline{A}_{21} + \underline{I}_1\underline{A}_{11} \end{aligned}. \quad (7.21)$$

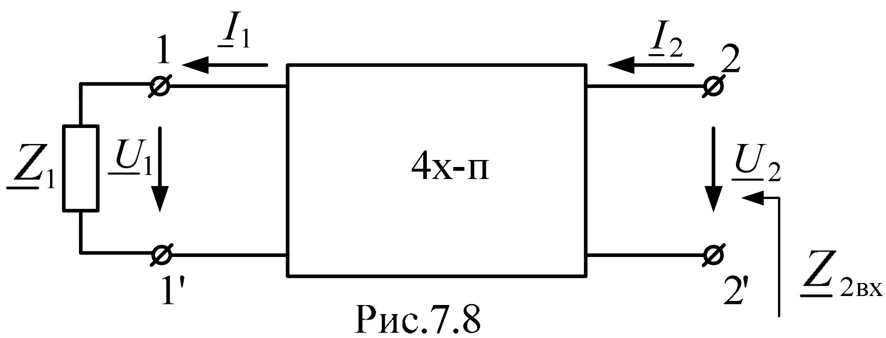


Рис.7.8

Находим входное сопротивление со стороны вторичных зажимов:

$$\underline{Z}_{2вх} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} = \frac{\underline{U}_1\underline{A}_{22} + \underline{I}_1\underline{A}_{12}}{\underline{U}_1\underline{A}_{21} + \underline{I}_1\underline{A}_{11}} = \frac{\underline{Z}_1\underline{A}_{22} + \underline{A}_{12}}{\underline{Z}_1\underline{A}_{21} + \underline{A}_{11}}. \tag{7.22}$$

Частные случаи

1. Короткое замыкание на входе ($\underline{Z}_1 = 0$).

При этом:

$$\underline{Z}_{2вх} = \underline{Z}_{2k} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}}. \tag{7.23}$$

2. Холостой ход на выходе ($\underline{Z}_1 = \infty$).

В этом случае:

$$\underline{Z}_{2вх} = \underline{Z}_{2x} = \frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}}. \tag{7.24}$$

Свойство четырехполюсника

Четырехполюсник преобразует сопротивление нагрузки. Входное сопротивление четырехполюсника определяется его параметрами и сопротивлением нагрузки.

7.10. Параметры холостого хода и короткого замыкания

Сопротивления $Z_{1k}, Z_{2k}, Z_{1x}, Z_{2x}$ *называют параметрами холостого хода и короткого замыкания.*

Свойства параметров ХХ и КЗ

Из формул (7.19), (7.20), (7.23), (7.24) получаем следующие пропорции:

$$\frac{\underline{Z}_{1k}}{\underline{Z}_{1x}} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}}\frac{\underline{A}_{21}}{\underline{A}_{11}}\,, \tag{7.25}$$

$$\frac{\underline{Z}_{2k}}{\underline{Z}_{2x}} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}}\frac{\underline{A}_{21}}{\underline{A}_{22}}. \tag{7.26}$$

Получаем пропорцию для сопротивлений холостого хода и короткого замыкания:

$$\frac{\underline{Z}_{1k}}{\underline{Z}_{1x}} = \frac{\underline{Z}_{2k}}{\underline{Z}_{2x}}. \tag{7.27}$$

Это соотношение можно использовать для проверки измерений и расчетов.

В симметричных четырехполюсниках: $\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}$. При этом получим:

$$\underline{Z}_{1k} = \underline{Z}_{2k} = \underline{Z}_k, \qquad \underline{Z}_{1x} = \underline{Z}_{2x} = \underline{Z}_x. \tag{7.28}$$

7.11. Вычисление А-параметров через параметры холостого хода и короткого замыкания

В обратимом четырехполюснике определитель А-параметров равен единице:

$$|A| = \underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1. \tag{7.29}$$

Подставляем значения А-параметров, выраженные через параметры холостого хода и короткого замыкания:

$$\underline{A}_{21} = \underline{A}_{11}/\underline{Z}_{1x}, \quad \underline{A}_{22} = \underline{Z}_{2x}\underline{A}_{21} = \left(\frac{\underline{Z}_{2x}}{\underline{Z}_{1x}}\right)\underline{A}_{11}, \quad \underline{A}_{12} = \underline{A}_{11}\underline{Z}_{2k}. \tag{7.30}$$

Получим уравнение:

$$|A| = \underline{A}_{11}\underline{A}_{11}\frac{\underline{Z}_{2x}}{\underline{Z}_{1x}} - \underline{A}_{11}\underline{Z}_{2k}\,\underline{A}_{11}/\underline{Z}_{1x} = 1. \tag{7.31}$$

Преобразуем это уравнение для вычисления $\underline{A}_{11}$:

$$\underline{A}_{11}^2\left(\frac{\underline{Z}_{2x} - \underline{Z}_{2k}}{\underline{Z}_{1x}}\right) = 1.$$

Находим:

$$\underline{A}_{11} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1x}}{\underline{Z}_{2x} - \underline{Z}_{2k}}} \tag{7.32}$$

Вычислив $\underline{A}_{11}$, остальные А-параметры находим по формулам:

$$\underline{A}_{12} = \underline{A}_{11}\underline{Z}_{2k}, \quad \underline{A}_{21} = \underline{A}_{11}/\underline{Z}_{1x}, \quad \underline{A}_{22} = \left(\frac{\underline{Z}_{2x}}{\underline{Z}_{1x}}\right)\underline{A}_{11}. \tag{7.33}$$

Отметим, что требуется дополнительная проверка аргумента $\underline{A}_{11}$, так как корень квадратный извлекается неоднозначно.

7.12. Схемы замещения четырехполюсника

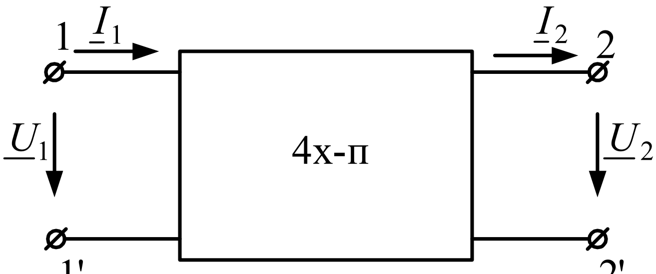


Рис.7.9

Представим себе, что внутренняя структура пассивного четырехполюсника (рис.7.9) неизвестна, но были измерены на заданной частоте А-параметры четырехполюсника и составлены его уравнения:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2\underline{A}_{11} + \underline{I}_2\underline{A}_{12}$$
$$\underline{I}_1 = \underline{U}_2\underline{A}_{21} + \underline{I}_2\underline{A}_{22}$$
(7.34)

Требуется сделать еще один четырехполюсник с такими же А-параметрами.

Для этого надо найти *схему замещения* из пассивных сопротивлений, которая имеет ту же матрицу А-параметров.

Т- образная схема замещения

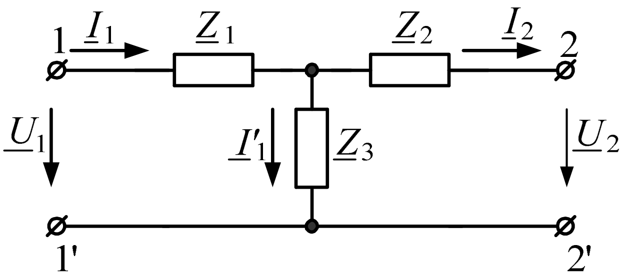


Рис.7.10

Будем искать сначала Т-образную схему замещения четырехполюсника (рис.7.10). Требуется найти $\underline{Z}_1, \underline{Z}_2, \underline{Z}_3$, которые дают ту же матрицу А-параметров. Составляем уравнения для тока $\underline{I}_1$ и напряжения $\underline{U}_1$ в схеме (рис.7.10):

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}' = \underline{I}_2 + \frac{\underline{U}_2 + \underline{I}_2\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3} = \overset{\underline{A}_{21}}{\frac{1}{\underline{Z}_3}}\underline{U}_2 + \overset{\underline{A}_{22}}{\left(1 + \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_3}\right)}\underline{I}_2. \qquad (7.34)$$

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_2 + \underline{I}_2\underline{Z}_2 + \underline{I}_1\underline{Z}_1 = \underline{U}_2\overset{\underline{A}_{11}}{\left(1 + \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3}\right)} + \underline{I}_2\overset{\underline{A}_{12}}{\left(\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_2\underline{Z}_1}{\underline{Z}_3}\right)}. \qquad (7.35)$$

Из этих уравнений выражаем сопротивления Т-образной схемы замещения через А-параметры:

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{A}_{11} - 1}{\underline{A}_{21}}, \qquad (7.35)$$

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{A}_{22} - 1}{\underline{A}_{21}}, \tag{7.36}$$

$$\underline{Z}_3 = \frac{1}{\underline{A}_{21}} . \tag{7.37}$$

Схема замещения справедлива на той частоте, для которой определены А-параметры в исходном четырехполюснике.

П-образная схема замещения

Применяют также П-образную схему замещения (рис.7.11), в которой сопротивления вычисляют по формулам:

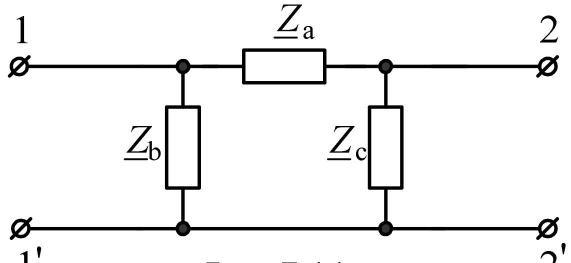


Рис.7.11

$$\underline{Z}_a = \underline{A}_{12},$$

$$\underline{Z}_b = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22} - 1}, \tag{7.38}$$

$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11} - 1}.$$

7.13. Соединения четырехполюсников

Последовательное соединение

При последовательном соединении входные и выходные зажимы четырехполюсников «a» и «b» включены последовательно (рис.7.12).

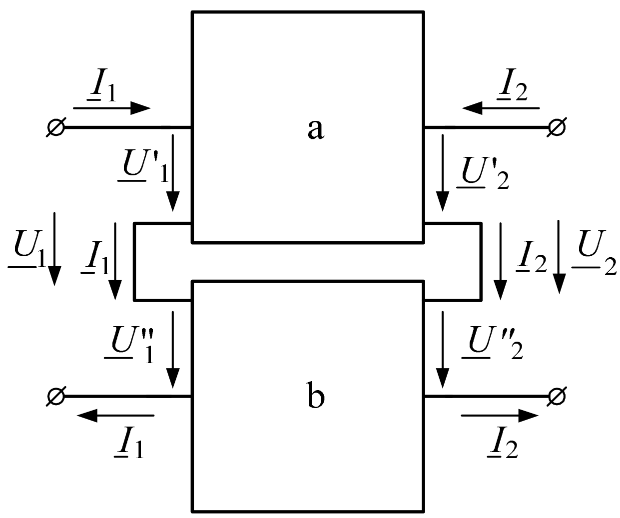


Рис.7.12

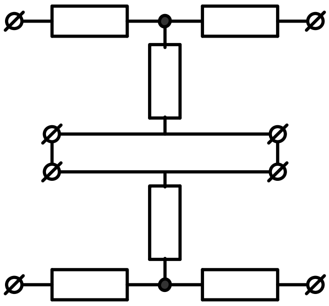
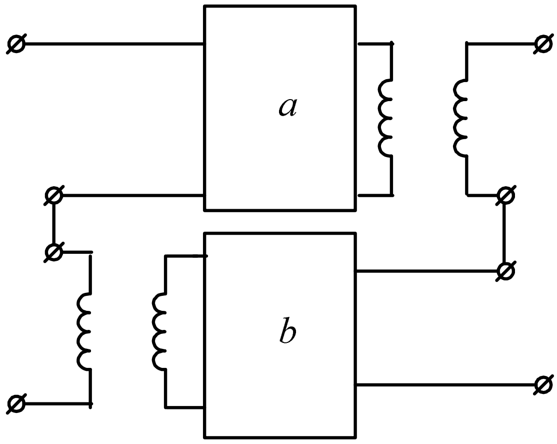
Определение

Соединения четырехполюсников называют *регулярным*, если сохраняется равенство токов подтекающих к верхнему зажиму и вытекающих из нижнего зажима каждого четырехполюсника.

В этом случае матрица параметров каждого четырехполюсника не меняется.

Примеры некоторых регулярных соединений показаны в таблице 7.2.

Таблица 7.2

Трехполюсники, соединенные общими зажимами	Четырехполюсники с трансформаторами
	

Вывод формулы последовательного соединения

Для четырехполюсника «a» в схеме (рис.7.12) запишем уравнения в системе Z-параметров:

$$\begin{pmatrix}\underline{U}_1'\\ \underline{U}_2'\end{pmatrix}=(\underline{Z}_a)\begin{pmatrix}\underline{I}_1\\ \underline{I}_2\end{pmatrix}. \qquad (7.39$$

Для четырехполюсника «b» имеем:

$$\begin{pmatrix}\underline{U}_1''\\ \underline{U}_2''\end{pmatrix}=(\underline{Z}_b)\begin{pmatrix}\underline{I}_1\\ \underline{I}_2\end{pmatrix}. \qquad (7.40)$$

В последовательном соединении (рис.7.12) складываются напряжения на входе и выходе:

$$\begin{aligned}\underline{U}_1&=\underline{U}_1'+\underline{U}_1''\\ \underline{U}_2&=\underline{U}_2'+\underline{U}_2''\end{aligned}. \qquad (7.41)$$

Подставим в (7.41) выражения для столбцов напряжений из (7.39) и (7.40) и получим:

$$\begin{pmatrix}\underline{U}_1\\ \underline{U}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\underline{U}_1'\\ \underline{U}_2'\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\underline{U}_1''\\ \underline{U}_2''\end{pmatrix}=\left(\underline{Z}_a+\underline{Z}_b\right)\begin{pmatrix}\underline{I}_1\\ \underline{I}_2\end{pmatrix}=\underline{Z}\begin{pmatrix}\underline{I}_1\\ \underline{I}_2\end{pmatrix}. \qquad (7.42)$$

Правило: *При последовательном регулярном соединении суммируются матрицы Z - параметров:* $\underline{Z}=\underline{Z}_a+\underline{Z}_b$.

Параллельное соединение

В параллельном соединении входные и выходные зажимы четырехполюсников включены параллельно (рис.7.13).

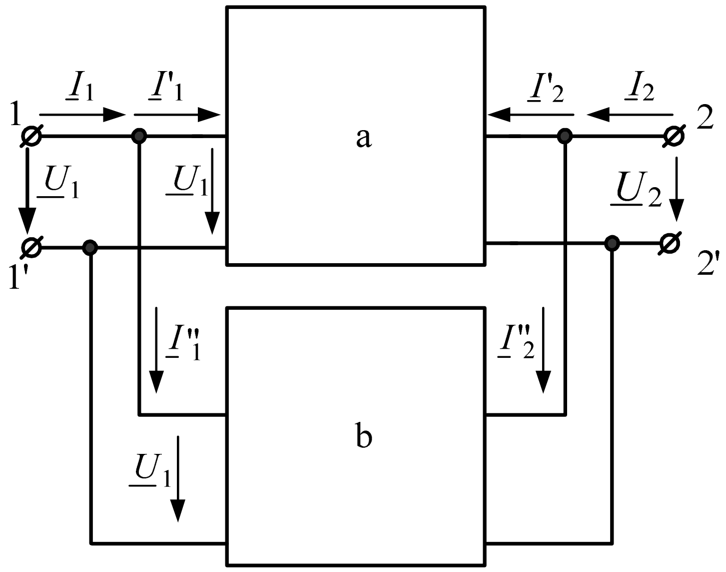


Рис.7.13

Для «a» запишем уравнения в системе Y-параметров:

$$\begin{pmatrix} \underline{I}'_1 \\ \underline{I}'_2 \end{pmatrix} = \underline{Y}_a \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}. \qquad (7.43)$$

Аналогично для «b»:

$$\begin{pmatrix} \underline{I}''_1 \\ \underline{I}''_2 \end{pmatrix} = \underline{Y}_b \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}. \qquad (7.44)$$

При параллельном соединении суммируются входные и выходные токи четырехполюсников:

$$\begin{pmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{I}'_1 \\ \underline{I}'_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \underline{I}''_1 \\ \underline{I}''_2 \end{pmatrix} = \left(\underline{Y}_a + \underline{Y}_b\right) \begin{pmatrix} \underline{U}_1 \\ \underline{U}_2 \end{pmatrix}. \qquad (7.45)$$

П р а в и л о : *При параллельном регулярном соединении суммируются матрицы Y-параметров:* $\left(\underline{Y}\right) = \left(\underline{Y}_a + \underline{Y}_b\right)$.

К а с к а д н о е   с о е д и н е н и е

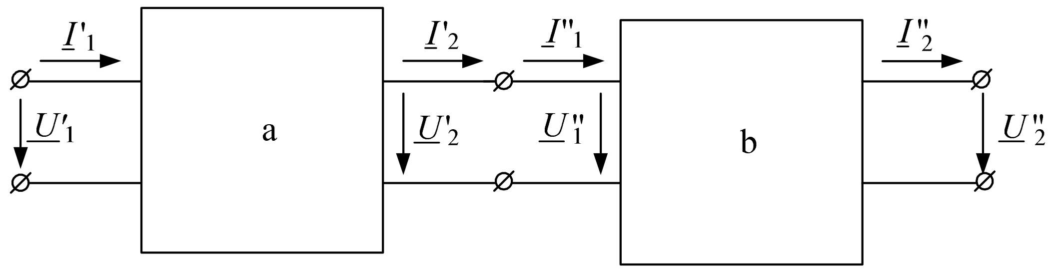


Рис.7.14

При каскадном соединении входные зажимы последующего четырехполюсника соединяются с выходными зажимами предыдущего. Условие регулярности выполняется всегда.

Для четырехполюсника «a» запишем уравнения в A – параметрах:

$$\begin{pmatrix} \underline{U}'_1 \\ \underline{I}'_1 \end{pmatrix} = \left(\underline{A}_a\right) \begin{pmatrix} \underline{U}'_2 \\ \underline{I}'_2 \end{pmatrix}. \qquad (7.46)$$

Аналогично для четырехполюсника «b»:

$$\begin{pmatrix} \underline{U}''_1 \\ \underline{I}''_1 \end{pmatrix} = \left(\underline{A}_b\right) \begin{pmatrix} \underline{U}''_2 \\ \underline{I}''_2 \end{pmatrix}. \qquad (7.47)$$

Так как в схеме (рис.7.14):

$$\begin{pmatrix} \underline{U}_2' \\ \underline{I}_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{U}_1'' \\ \underline{I}_1'' \end{pmatrix}, \text{ получим: } \begin{pmatrix} \underline{U}_1' \\ \underline{I}_1' \end{pmatrix} = \left(\underline{A}_a\right)\left(\underline{A}_b\right)\begin{pmatrix} \underline{U}_2'' \\ \underline{I}_2'' \end{pmatrix}. \qquad (7.48)$$

П р а в и л о : *При каскадном соединении перемножаются матрицы А-параметров:* $\left(\underline{A}\right) = \left(\underline{A}_a\right)\left(\underline{A}_b\right)$.

7.14. Расчет А-параметров простых четырехполюсников

Запишем еще раз уравнения в А – параметрах:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 &= \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2 \end{aligned}. \qquad (7.49)$$

П р я м о е с о е д и н е н и е

Входные и выходные зажимы соединены проводниками без сопротивления.

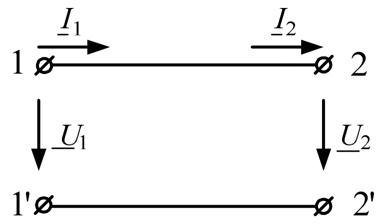


Рис.7.15

Имеем равенства напряжений $\underline{U}_1 = \underline{U}_2$ и токов $\underline{I}_1 = \underline{I}_2$.

Этим условиям удовлетворяет единичная матрица А-параметров:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (7.50)$$

П р о д о л ь н о е с о п р о т и в л е н и е

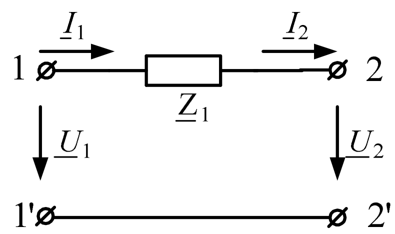


Рис.7.16

С о с т а в л я е м у р а в н е н и я:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{U}_2 + \underline{I}_2\underline{Z}_1 \\ \underline{I}_1 &= \underline{I}_2 \end{aligned}. \qquad (7.51)$$

Сравним (7.51) и (7.49) и получим:

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & \underline{Z} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (7.52)$$

П а р а л л е л ь н о е с о п р о т и в л е н и е

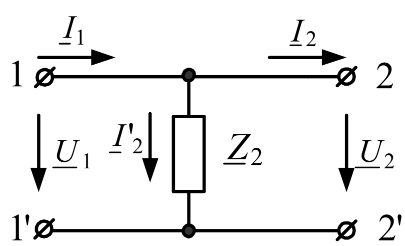


Рис.7.17

Уравнения четырехполюсника (рис.7.17) имеют вид:

$$\begin{aligned} &\underline{U}_1 = \underline{U}_2 \\ &\underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_2' = \frac{1}{\underline{Z}_2}\underline{U}_2 + \underline{I}_2 \end{aligned}. \qquad (7.53)$$

Получаем матрицу А-параметров:

$$\underline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/\underline{Z}_2 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (7.54)$$

Г-образный 4х-полюсник

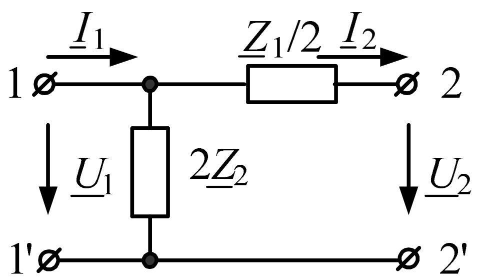


Рис.7.18

Четырехполюсник (рис.7.18) можно рассматривать как каскадное соединение четырехполюсников рис.7.17 и рис.7.16. Перемножим матрицы А-параметров (7.54) и (7.52):

$$\underline{A}_{Г1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2\underline{Z}_2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \underline{Z}_1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}= \begin{pmatrix} 1 & \underline{Z}_1/2 \\ 1/2\underline{Z}_2 & \left(1+\dfrac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}\right) \end{pmatrix}. \qquad (7.55)$$

Во втором варианте Г-образного четырехполюсника (рис.7.19) поменялись местами входные и выходные зажимы и изменилось направление передачи энергии. В этом случае в матрице А-параметров меняются местами $\underline{A}_{11}$ и $\underline{A}_{22}$.

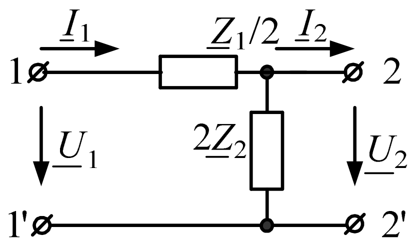


Рис.7.19

$$\underline{A}_{Г2}=\begin{pmatrix} \left(1+\dfrac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}\right) & \underline{Z}_1/2 \\ 1/2\underline{Z}_2 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (7.56)$$

Симметричный Т-образный четырехполюсник

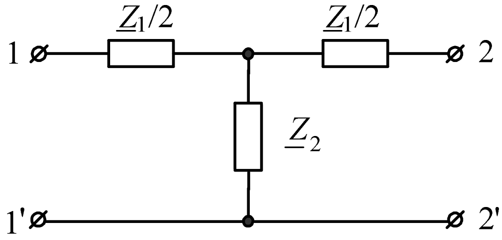


Рис.7.20

Т-образный четырехполюсник (рис.7.20) можно рассматривать как каскадное соединение двух Г-образных четырехполюсников в последовательности (слева-направо): Г2-Г1.

Перемножая матрицы, получим:

$$\underline{A}_T = \left(\underline{A}_{Г2}\right)\left(\underline{A}_{Г1}\right) = \begin{pmatrix} 1+{}^{\underline{Z}_1}\!/_{2\underline{Z}_2} & \underline{Z}_1\left(1+\dfrac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}\right) \\ {}^{1}\!/_{\underline{Z}_2} & 1+{}^{\underline{Z}_1}\!/_{2\underline{Z}_2} \end{pmatrix}. \qquad (7.57)$$

С и м м е т р и ч н ы й   П - о б р а з н ы й   ч е т ы р е х п о л ю с н и к

П-образный четырехполюсник (рис.7.21) можно рассматривать как каскадное соединение двух Г-образных четырехполюсников в последовательности (слева-направо): Г1-Г2. Перемножая матрицы, получим:

$$\underline{A}_П = \left(\underline{A}_{Г1}\right)\left(\underline{A}_{Г2}\right) = \begin{pmatrix} 1+{}^{\underline{Z}_1}\!/_{2\underline{Z}_2} & \underline{Z}_1 \\ {}^{1}\!/_{\underline{Z}_2}\left(1+\dfrac{\underline{Z}_1}{4\underline{Z}_2}\right) & 1+{}^{\underline{Z}_1}\!/_{2\underline{Z}_2} \end{pmatrix}. \qquad (7.58)$$

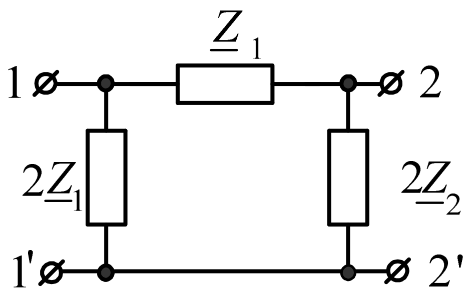


Рис.7.21

7.15. Характеристические сопротивления

Характеристическими сопротивлениями пассивного четырехполюсника $\underline{Z}_{1c}$ *и* $\underline{Z}_{2c}$ *называются два сопротивления, удовлетворяющие условию полного взаимного согласования*, а именно:

1. Если в схеме (рис.7.22а) к вторичным зажимам подключено сопротивление $\underline{Z}_2 = \underline{Z}_{2c}$, то входное сопротивление со стороны первичных зажимов будет равно $\underline{Z}_{1c}$:

$$\underline{Z}_{вх1} = \frac{\underline{A}_{11}\underline{Z}_{2c} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_{2c} + \underline{A}_{22}} = \underline{Z}_{1c}. \qquad (7.59)$$

2. Если в схеме (рис.7.22б) к первичным зажимам подключено сопротивление $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{1c}$, то входное сопротивление со стороны вторичных зажимов будет равно $\underline{Z}_{2c}$:

$$\underline{Z}_{вх2} = \frac{\underline{A}_{22}\underline{Z}_{1c} + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_{1c} + \underline{A}_{11}} = \underline{Z}_{2c}. \qquad (7.60)$$

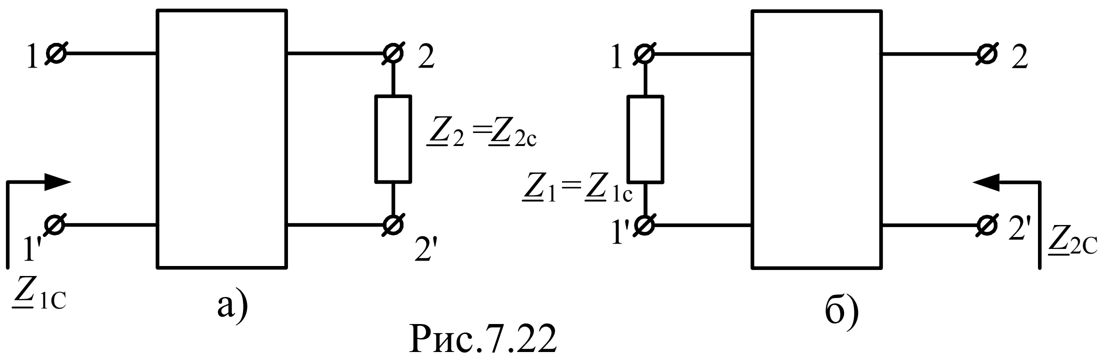


Рис.7.22

О п р е д е л е н и е. *Четырехполюсник, нагруженный на характеристическое сопротивление, называется согласованным с нагрузкой.*

Решая два уравнения (7.59) и (7.60), получим выражения для $\underline{Z}_{1c}$ и $\underline{Z}_{2c}$:

$$\underline{Z}_{1c} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11}\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{A}_{22}}}, \tag{7.61}$$

$$\underline{Z}_{2c} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{22}\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{A}_{11}}}. \tag{7.62}$$

Из выражений (7.61) и (7.62) можно найти следующие свойства характеристических сопротивлений:

$$\sqrt{\underline{Z}_{1c}\underline{Z}_{2c}} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}}, \tag{7.63}$$

$$\sqrt{\frac{\underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{2c}}} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{22}}}. \tag{7.64}$$

Используем формулы (7.19), (7.20), (7.23), (7.24), выражающие сопротивления холостого хода и короткого замыкания через А-параметры:

$$\underline{Z}_{1k} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}},\ \underline{Z}_{1x} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{21}},\ \underline{Z}_{2k} = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11}},\ \underline{Z}_{2x} = \frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{21}}.$$

Подставим эти выражения в (7.61) и (7.62):

$$\underline{Z}_{1c} = \sqrt{\underline{Z}_{1x}\underline{Z}_{1k}}, \quad \underline{Z}_{2c} = \sqrt{\underline{Z}_{2x}\underline{Z}_{2k}}. \tag{7.65}$$

Получили выражения характеристических сопротивлений через сопротивления холостого хода и короткого замыкания.

7.16. Характеристическая постоянная передачи (мера передачи)

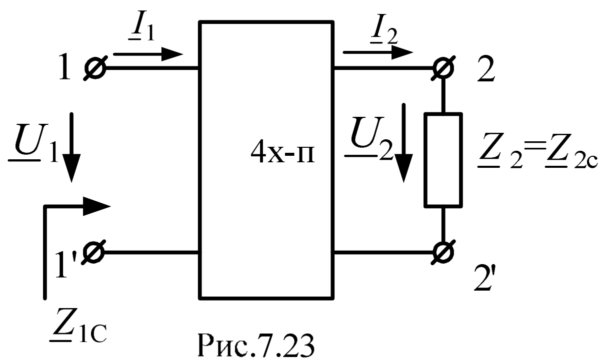


Рис.7.23

Рассмотрим четырехполюсник (рис.7.23), нагруженный на характеристическое сопротивление $\underline{Z}_{2c}$. Такой четырехполюсник согласован с нагрузкой.

Выразим ток и напряжение на выходе четырехполюсника через характеристическое сопротивление

$$\underline{Z}_{2c}=\sqrt{\frac{\underline{A}_{22}\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{A}_{11}}}:$$

$$\underline{I}_2=\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{2c}},\ \underline{U}_2=\underline{I}_2\underline{Z}_{2c}.$$

Подставим эти выражения для выражения для тока и напряжения в уравнения четырехполюсника в А-параметрах:

$$\underline{U}_1=\underline{A}_{11}\underline{U}_2+\underline{A}_{12}\underline{U}_2\sqrt{\frac{\underline{A}_{21}\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{22}\underline{A}_{12}}},\tag{7.67}$$

$$\underline{I}_1=\underline{A}_{21}\underline{I}_2\sqrt{\frac{\underline{A}_{22}\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\underline{A}_{11}}}+\underline{A}_{22}\underline{I}_2.\tag{7.68}$$

Выносим в правой части уравнения (7.67) за скобки $\sqrt{\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{22}}}\underline{U}_2$, а в уравнении (7.68) выносим за скобки $\sqrt{\frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{11}}}\underline{I}_2$:

$$\begin{aligned}\underline{U}_1&=\sqrt{\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{22}}}\underline{U}_2\left(\sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}}+\sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}\right)\\ \underline{I}_1&=\sqrt{\frac{\underline{A}_{22}}{\underline{A}_{11}}}\underline{I}_2\left(\sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}}+\sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}\right)\end{aligned}.\tag{7.69}$$

В полученных уравнениях обозначим:

$$\sqrt{\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{22}}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{2c}}} = \underline{m}_T \qquad (7.70)$$

- *коэффициент трансформации четырехполюсника*;

$$e^{\underline{g}} = \sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}\,; \qquad (7.71)$$

$$\underline{g} = \boldsymbol{ln}\left(\sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}\right) = a + jb \qquad (7.72)$$

- *характеристическая постоянная передачи, мера передачи*;

a – характеристическое затухание;

b - характеристическая фаза, фазовая постоянная.

Поясним смысл характеристических параметров для симметричного четырехполюсника в согласованном режиме. В этом случае имеем:

$$\underline{A}_{11} = \underline{A}_{22}, \quad m_T = 1, \quad \underline{U}_1 = \underline{U}_2 e^{\underline{g}},$$

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = e^{\underline{g}} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}. \qquad (7.73)$$

Далее получим:

$$e^{\underline{g}} = e^{a+jb} = e^a e^{jb} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \left(\frac{U_1}{U_2}\right) e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}, \qquad (7.74)$$

$$e^a = \frac{U_1}{U_2}; \;\; a = \boldsymbol{ln}\frac{U_1}{U_2}. \qquad (7.75)$$

Характеристическое затухание симметричного четырехполюсника равно логарифму отношения амплитуд напряжений или токов на входе и выходе.

Затухание измеряют в неперах (1 неп. равен затуханию в *e* раз) и в децибелах (1дб = 20 lg (U_1/U_2), 1 дб = 0.115 неп. 1 неп.= 8.66 дб).

Характеристическая фаза равна сдвигу фазы между входным и выходным напряжением согласованных четырехполюсников:

$$b = \varphi_1 - \varphi_2. \qquad (7.76)$$

В согласованном режиме четырехполюсник рассчитывают по формулам с характеристическими параметрами:

$$\underline{U}_1 = \underline{m}_T \underline{U}_2 e^{\underline{g}}, \qquad (7.77)$$

$$\underline{I}_1 = \frac{1}{\underline{m}_T} \underline{I}_2 e^{\underline{g}}. \qquad (7.78)$$

7.17. Уравнения четырехполюсника в гиперболической форме

Рассматриваем работу четырехполюсника в согласованном режиме при нагрузке на сопротивлении $\underline{Z}_{2c}$.

Запишем еще раз формулу (7.71):

$$e^{\underline{g}} = \sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}\,.$$

Находим обратную величину:

$$e^{-\underline{g}} = \frac{1}{\sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}} = \frac{\sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} - \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}}{(\underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21})_{=1}} =$$

$$\sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}} - \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}\,. \tag{7.79}$$

Через экспоненты (7.71) и (7.79) выразим гиперболические функции:

$$\frac{e^{\underline{g}} + e^{-\underline{g}}}{2} = ch\underline{g} = \sqrt{\underline{A}_{11}\underline{A}_{22}}\,, \tag{7.80}$$

$$\frac{e^{\underline{g}} - e^{-\underline{g}}}{2} = sh\underline{g} = \sqrt{\underline{A}_{12}\underline{A}_{21}}\,. \tag{7.81}$$

Ранее было найдено:

$$\sqrt{\underline{Z}_{1c}\underline{Z}_{2c}} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}}}\,, \tag{7.63}$$

$$\sqrt{\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{A}_{22}}} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{2c}}}\,. \tag{7.64}$$

Решая уравнения (7.80), (7.81), (7.63) и (7.64) относительно А-параметров, находим выражения А-параметров через характеристические параметры:

$$\underline{A}_{11} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{2c}}}ch\underline{g}\,, \qquad \underline{A}_{12} = \sqrt{\underline{Z}_{1c}\underline{Z}_{2c}}sh\underline{g}\,,$$

$$\underline{A}_{21} = \frac{1}{\sqrt{\underline{Z}_{1c}\underline{Z}_{2c}}}sh\underline{g}\,, \qquad \underline{A}_{22} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{2c}}{\underline{Z}_{1c}}}ch\underline{g}\,.$$

Подставим эти выражения в уравнения четырехполюсника в А-параметрах и учтем, что $\underline{I}_2\underline{Z}_2 = \underline{U}_2$:

$$\underline{U}_1 = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{2c}}}ch\underline{g}\underline{U}_2 + \sqrt{\underline{Z}_{1c}\underline{Z}_{2c}}sh\underline{g}\underline{I}_2 = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{2c}}}\boldsymbol{(}\underline{U}_2 ch\underline{g} + \underline{I}_2\underline{Z}_{2c}sh\underline{g}\boldsymbol{)} =$$

$$=\underline{m}_T\left(\underline{U}_2 ch\underline{g}+\underline{I}_2\underline{Z}_2 sh\underline{g}\right)=\underline{m}_T(\underline{U}_2 ch\underline{g}+\underline{U}_2 sh\underline{g})=\underline{m}_T\underline{U}_2 e^{\underline{g}}. \quad (7.82)$$

$$\underline{I}_1=\frac{1}{\sqrt{\underline{Z}_{1c}\underline{Z}_{2c}}}sh\underline{g}\underline{U}_2+\sqrt{\frac{\underline{Z}_{2c}}{\underline{Z}_{1c}}}ch\underline{g}\,\underline{I}_2=\sqrt{\frac{\underline{Z}_{2c}}{\underline{Z}_{1c}}}\left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2}sh\underline{g}+\underline{I}_2 ch\underline{g}\right)=$$

$$=\frac{1}{\underline{m}_T}\left(\underline{I}_2 ch\underline{g}+\frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_2}sh\underline{g}\right)=\frac{1}{\underline{m}_T}(\underline{I}_2 ch\underline{g}+\underline{I}_2 sh\underline{g})=\frac{1}{\underline{m}_T}\underline{I}_2 e^{\underline{g}}. \quad (7.83)$$

Для согласованного режима справедливы компактные уравнения в гиперболической форме:

$$\underline{U}_1=\underline{m}_T\underline{U}_2 e^{\underline{g}}, \quad (7.84)$$

$$\underline{I}_1=\frac{1}{\underline{m}_T}\underline{I}_2 e^{\underline{g}}. \quad (7.85)$$

7.18. Каскадное соединение согласованных четырехполюсников

На рис.7.24 показаны два четырехполюсника, включенные каскадно. Четырехполюсник «a» имеет характеристические сопротивления $\underline{Z}_{1c}$ и $\underline{Z}_{2c}$. Четырехполюсник «b» со стороны выходных зажимов имеет характеристическое сопротивление $\underline{Z}_{3c}$.

Для согласованного каскадного включения требуется выполнения следующих условий:

$$\underline{Z}_H=\underline{Z}_{3c},\ \underline{Z}_{\text{вх.b}}=\underline{Z}_{2c},\ \underline{Z}_{вх.a}=\underline{Z}_{1c}. \quad (7.86)$$

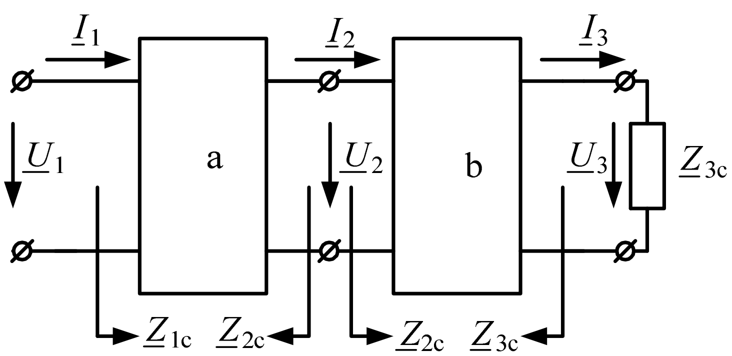


Рис.7.24

Тогда запишем уравнения четырехполюсников в согласованном режиме:

$$\underline{U}_1 = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{2c}}} e^{\underline{g}_a} \underline{U}_2, \quad \underline{U}_1 = \underline{m}_{T_a} \underline{U}_2 e^{\underline{g}_a};$$
$$\underline{U}_2 = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{2c}}{\underline{Z}_{3c}}} e^{\underline{g}_b} \underline{U}_3, \underline{U}_2 = \underline{m}_{T_б} \underline{U}_3 e^{\underline{g}_b}. \qquad (7.87)$$

Учтем то, что напряжение $\underline{U}_2$ одинаково для двух четырехполюсников и получим:

$$\underline{Z}_H = \underline{Z}_{3c}, \underline{Z}_{\text{вх.b}} = \underline{Z}_{2c}, \underline{Z}_{вх.a} = \underline{Z}_{1c};$$
$$\underline{U}_1 = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{2c}}} e^{\underline{g}_a} \underline{U}_2, \quad \underline{U}_1 = \underline{m}_{T_a} \underline{U}_2 e^{\underline{g}_a};$$
$$\underline{U}_2 = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{2c}}{\underline{Z}_{3c}}} e^{\underline{g}_b} \underline{U}_3, \underline{U}_2 = \underline{m}_{T_б} \underline{U}_3 e^{\underline{g}_b};$$
$$\underline{U}_1 = \underline{m}_{T_a} e^{\underline{g}_a} \underline{m}_{T_б} \underline{U}_3 e^{\underline{g}_b} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{2c}}} \sqrt{\frac{\underline{Z}_{2c}}{\underline{Z}_{3c}}} e^{\underline{g}_a + \underline{g}_b} \underline{U}_3 =$$
$$= \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1c}}{\underline{Z}_{3c}}} e^{\underline{g}_a + \underline{g}_b} \underline{U}_3. \qquad (7.88)$$

П р а в и л о . *При согласованном каскадном включении результирующий четырехполюсник имеет характеристические сопротивления* $\underline{Z}_{1c}$ *и* $\underline{Z}_{3c}$ *и меру передачи* $g_a + g_b$.

С и м м е т р и ч н ы й   ч е т ы р е х п о л ю с н и к

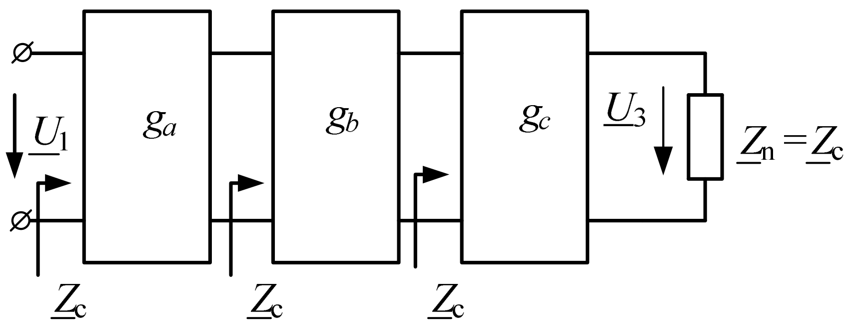


Рис.7.25

В симметричном четырехполюснике характеристические сопротивления одинаковы: $\underline{Z}_{1c} = \underline{Z}_{2c} = \underline{Z}_c$, коэффициент трансформации $\underline{m}_T = 1$ и входное сопротивление в любом сечении соединения всегда равно $\underline{Z}_c$

Меры передачи при каскадном соединении суммируются: $g_э = g_a + g_b + g_c$.

Формула (7.88) для симметричных согласованных четырехполюсников (рис.7.25) имеет вид:

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_3 e^{g_a + g_b}. \tag{7.89}$$

7.19. Комплексные передаточные функции четырехполюсника

Рассмотрим четырехполюсник (рис.7.7), нагруженный на сопротивление $\underline{Z}_2$.

Комплексной передаточной функцией по напряжению называют отношение комплексных амплитуд выходного и входного напряжения:

$$\underline{K}_U(j\omega) = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2} = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{A}_{11}\underline{Z}_2 + \underline{A}_{12}}. \tag{7.90}$$

Амплитудно-частотная характеристика (АЧХ) по напряжению:

$$\left|K_U(j\omega)\right| = K_U(\omega) = \left|\frac{\underline{Z}_2}{\underline{A}_{11}\underline{Z}_2 + \underline{A}_{12}}\right|. \tag{7.91}$$

Фазо-частотная характеристика по напряжению (ФЧХ):

$$\Psi_U(j\omega) = Arg\frac{\underline{Z}_2}{\underline{A}_{11}\underline{Z}_2 + \underline{A}_{12}}. \tag{7.92}$$

В частном случае, когда $\underline{Z}_2 = \infty$,

$$K_{Uxx}(j\omega) = \frac{1}{\underline{A}_{11}}. \tag{7.93}$$

Это соотношение используется для проверки расчёта $\underline{A}_{11}$.

Комплексной передаточной функцией по току называют отношение комплексной амплитуды выходного тока к комплексной амплитуде входного тока:

$$\underline{K}_I(j\omega) = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2} = \frac{1}{\underline{A}_{21}\underline{Z}_2 + \underline{A}_{22}}. \tag{7.94}$$

В частном случае, когда $\underline{Z}_2 = 0$,

$$\underline{K}_{Iкз}(j\omega) = \frac{1}{\underline{A}_{22}}. \tag{7.95}$$

7.20. Примеры расчета четырехполюсников

Пример 7.1

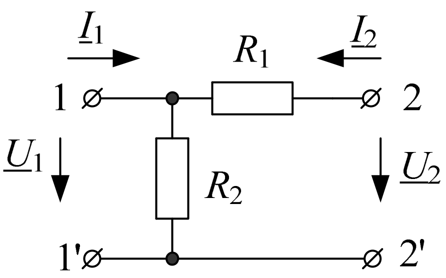


Рис.7.26

Пользуясь уравнениями четырехполюсника, найти: Y, Z и A - параметры Г-образной схемы (рис.7.26), если R_1=2Ом, R_2=2Ом.

Решение

1. Запишем уравнения четырехполюсника в системе Y- параметров

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 = \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2 \end{cases}.$$

В режиме короткого замыкания выходных зажимов ($\underline{U}_2 = 0$) определим $\underline{Y}_{11}$ и $\underline{Y}_{21}$:

$$\underline{Y}_{11} = \left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1}\right)_{\dot{U}_2=0} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_1 \dfrac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}} = 1\,См,$$

$$\underline{Y}_{21} = \left(\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1}\right)_{\underline{U}_2=0} = -\left(\frac{\dfrac{\underline{U}_1}{R_1}}{\underline{U}_1}\right) = -\frac{1}{R_1} = -0{,}5\,См.$$

В режиме короткого замыкания входных зажимов ($\underline{U}_1 = 0$) определим $\underline{Y}_{12}$ и $\underline{Y}_{22}$:

$$\underline{Y}_{12} = \left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{U}_1=0} = -\frac{\dfrac{\underline{U}_2}{R_1}}{\underline{U}_2} = -\frac{1}{R_1} = -0{,}5\,См = \underline{Y}_{21},$$

$$\underline{Y}_{22} = \left(\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{U}_1=0} = \frac{\dfrac{\underline{U}_2}{R_1}}{\underline{U}_2} = \frac{1}{R_1} = 0{,}5\,См.$$

1. Запишем уравнения четырехполюсника в системе $\underline{Z}$- параметров.

Токи и напряжения соответствуют схеме (рис.7.26).

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 = \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2 \end{cases}.$$

В режиме холостого хода на выходных зажимах ($\underline{I}_2 = 0$) определим $\underline{Z}_{11}$ и $\underline{Z}_{21}$:

$$\underline{Z}_{11} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1}\right)_{\underline{I}_2=0} = \frac{\underline{U}_1}{\left(\frac{\underline{U}_1}{R_2}\right)} = R_2 = 2 Ом,$$

$$\underline{Z}_{21} = \left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1}\right)_{\underline{I}_2=0} = \frac{\underline{I}_1 R_2}{\underline{I}_1} = R_2 = 2\,Ом.$$

В режиме холостого хода на входных зажимах ($\underline{I}_1$=0) определим $\underline{Z}_{11}$ и $\underline{Z}_{22}$:

$$\underline{Z}_{12} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right)_{\underline{I}_1=0} = \frac{\underline{I}_2 \cdot R_2}{\underline{I}_2} = R_2 = 2 Ом,$$

$$\underline{Z}_{22} = \left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2}\right)_{\dot{I}_1=0} = \frac{\underline{I}_2\left(R_1 + R_2\right)}{\underline{I}_2} = \left(R_1 + R_2\right) = 4\,Ом.$$

Используя связь между $\underline{Z}$ и $\underline{Y}$ параметрами, проверим правильность расчета:

$$\underline{Z}_{11} = \frac{\underline{Y}_{22}}{\left|\underline{Y}\right|} = \frac{0,5}{\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{21}\underline{Y}_{12}} = \frac{0,5}{0,25} = 2\,Ом.$$

1. Запишем уравнения четырехполюсника в системе $\underline{A}$- параметров. Токи и напряжения показаны на рис.7.27.

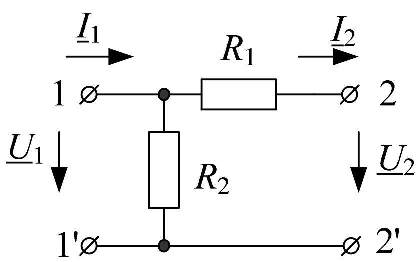


Рис.7.27

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2 \end{cases}.$$

В режиме холостого хода на выходных зажимах ($\underline{I}_2 = 0$) определим $\underline{A}_{11}$ и $\underline{A}_{21}$:

$$\underline{A}_{11} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{I}_2=0} = 1;$$

$$\underline{A}_{21} = \left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{I}_2=0} = \frac{1}{R_2} = 0{,}5\,См$$

В режиме короткого замыкания выходных зажимов ($\underline{U}_2 = 0$) определим $\underline{A}_{12}$ и $\underline{A}_{22}$:

$$\underline{A}_{12} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right)_{\underline{U}_2=0} = \frac{\underline{U}_1}{\frac{\underline{U}_1}{R_1}} = 2\,Ом,$$

$$\underline{A}_{22} = \left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}\right)_{\underline{U}_2=0} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_1 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}} = 2.$$

Вычислим определитель A- параметров:

$$\left|A\right| = \underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1 \cdot 2 - 0{,}5 \cdot 2 = 1.$$

Пример 7.2

В схеме (рис.7.27) заданы: $\underline{U}_2 = 10B$, $\underline{I}_2 = -2A$. Определить $\underline{U}_1$ и $\underline{I}_1$.

Решение

Подставим в систему уравнений четырехполюсника найденные в примере 7.1 A- параметры и заданные $\underline{U}_2$, $\underline{I}_2$. Получим:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2 = 1 \cdot 10 - 2 \cdot 2 = 6B \\ \underline{I}_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2 = 0{,}5 \cdot 10 - 2 \cdot 2 = 1A \end{cases}.$$

Пример 7.3.

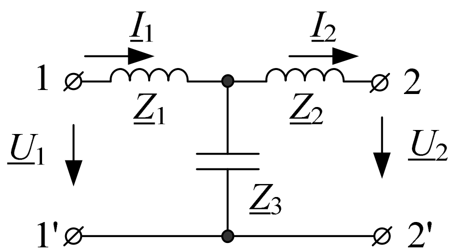


Рис.7.28

В четырехполюснике (рис.7.28) заданы комплексные сопротивления:
$\underline{Z}_1$=4j Ом, $\underline{Z}_2$=+j3 Ом, $\underline{Z}_3$= -j6 Ом.

Рассчитать A - параметры двумя способами: 1) непосредственно по уравнениям; 2) через сопротивления холостого хода и короткого замыкания.

Р е ш е н и е

1. Непосредственный расчет по уравнениям четырехполюсника.

В режиме холостого хода на выходных зажимах ($\underline{I}_2 = 0$) определяем:

$$\underline{A}_{11} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{I}_2=0} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_1 \dfrac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_3}} = \frac{\underline{Z}_1+\underline{Z}_3}{\underline{Z}_3} = \frac{-2j}{-6j} = \frac{1}{3},$$

$$\underline{A}_{21} = \left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2}\right)_{\underline{I}_2=0} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_3} = \frac{1}{\underline{Z}_3} = \frac{1}{-6j} = \frac{1}{6} j\,См.$$

В режиме короткого замыкания на выходных зажимах ($\underline{U}_2 = 0$) находим:

$$\underline{A}_{22} = \left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2}\right)_{\underline{U}_2=0} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_1 \dfrac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3}} = \frac{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3}{\underline{Z}_3} = \frac{-6j+3j}{-6j} = 0{,}5,$$

$$\underline{A}_{12} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2}\right)_{\underline{U}_2=0} = \frac{\underline{U}_1}{2\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_1}{2\dfrac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1+\dfrac{\underline{Z}_2\cdot\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3}}} = \frac{4j+\dfrac{3j(-6j)}{-3j}}{2} = 5j\,Ом.$$

Выполним проверку:

$$\underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = \frac{1}{3}\cdot 0{,}5 - 5j\cdot\frac{1}{6}j = \frac{1}{6}+\frac{5}{6} = 1.$$

2. Расчет А- параметров через параметры холостого хода и короткого замыкания.

Вычисляем сопротивления холостого хода и короткого замыкания:

$$\underline{Z}_{1X} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 = 4j - 6j = -2j\,Ом,$$

$$\underline{Z}_{1K} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2\cdot\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2+\underline{Z}_3} = 4j + \frac{3j(-6j)}{3j-6j} = 10j\,Ом,$$

$$\underline{Z}_{2X} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 = 3j - 6j = -3j\,Ом,$$

$$\underline{Z}_{2K} = \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1\cdot\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_3} = 3j + \frac{4j(-6j)}{4j-6j} = 3j + 12j = 15j\,Ом.$$

Находим А- параметры по формулам (7.32)-(7.33):

$$\underline{A}_{11}=\sqrt{\frac{\underline{Z}_{1X}}{\underline{Z}_{2X}-\underline{Z}_{2K}}}=\sqrt{\frac{-2j}{-3j-15j}}=\sqrt{\frac{-2j}{-18j}}=\frac{1}{3},$$

$$\underline{A}_{12}=\underline{A}_{11}\cdot\underline{Z}_{2K}=\frac{1}{3}\cdot 15j=5j\,Ом,$$

$$\underline{A}_{21}=\frac{\underline{A}_{11}}{\underline{Z}_{1X}}=\frac{1}{3(-2j)}=j\frac{1}{6}\;См,$$

$$\underline{A}_{22}=\underline{A}_{11}\frac{\underline{Z}_{2X}}{\underline{Z}_{1X}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{(-3j)}{(-2j)}=\frac{1}{2}.$$

Пример 7.4

Рассчитать элементы *Т*- образной и *П*- образной схем замещения четырехполюсника с А- параметрами:

$$\underline{A}_{11}=\frac{1}{3};\;\underline{A}_{12}=5j\,Ом;\;\underline{A}_{21}=\frac{1}{6}j\,См;\;\underline{A}_{22}=\frac{1}{2}.$$

Построить эти схемы замещения.

Решение

1. Рассчитываем элементы Т - образной схемы замещения по формулам (7.35) - (7.37):

$$\underline{Z}_1=\frac{\underline{A}_{11}-1}{\underline{A}_{21}}=\frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{6}j}=4j\,Ом,\;\underline{Z}_2=\frac{\underline{A}_{22}-1}{\underline{A}_{21}}=\frac{\frac{1}{2}-1}{\frac{1}{6}j}=3j\,Ом,$$

$$\underline{Z}_3=\frac{1}{\underline{A}_{21}}=\frac{1}{\frac{1}{6}j}=-6j\,Ом.$$

Мы видим, что сопротивления Т – образной схемы замещения совпадают с заданными в исходной схеме четырехполюсника (рис.7.28).

2. Рассчитываем элементы П- образной схемы замещения по формулам (7.38).

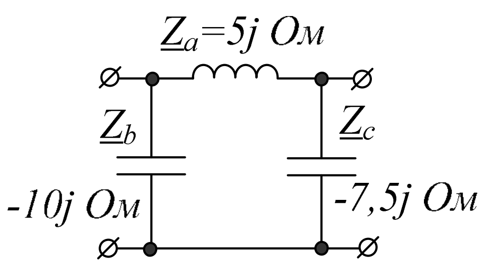


Рис.7.29

$$\underline{Z}_a=\underline{A}_{12}=5j\,Ом,$$

$$\underline{Z}_b=\frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22}-1}=\frac{5j}{0{,}5-1}=-10j\,Ом,$$

$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11} - 1} = \frac{5j}{\frac{1}{3} - 1} = -\frac{15}{2} j = -7{,}5j \ Ом$$

.

П- образная схеме замещения показана на рис.7.29. В ней использована одна индуктивность и две емкости. На низких частотах, когда индуктивности имеют большие номиналы и размеры, это будет преимуществом П – образной схемы в сравнении с Т – образной.

Пример 7.5

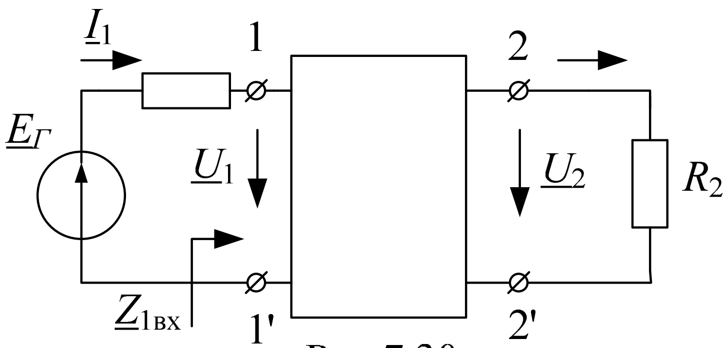


Рис.7.30

Четырехполюсник (рис.7.30) подключен к генератору гармонического напряжения с действующим значением $E_Г = 10\,В$, внутренним сопротивлением $\underline{Z}_Г = 4 - 4j\,Ом$ и нагружен на сопротивление $R_2 = 3\,Ом$. На частоте генератора четырехполюсник имеет А- параметры:

$$\underline{A}_{11} = \frac{1}{3};\ \underline{A}_{12} = 5j, Ом;\ \underline{A}_{21} = \frac{1}{6} j, Ом;\ \underline{A}_{22} = \frac{1}{2}.$$

Найти напряжения и токи на входе и выходе четырехполюсника.

Решение

1. Находим входное сопротивление четырехполюсника:

$$\underline{Z}_{1вх} = \frac{\underline{A}_{11} R_2 + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21} R_2 + \underline{A}_{22}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 3 + 5j}{\frac{1}{6} j \cdot 3 + 0{,}5} = \frac{1 + 5j}{0{,}5(1 + j)} = 6 + 4j\,Ом.$$

2. Вычислим ток $\underline{I}_1$ и напряжение $\underline{U}_1$:

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{E}_Г}{\underline{Z}_{1вх} + \underline{Z}_Г} = \frac{10}{6 + 4j + 4 - 4j} = 1A,$$

$$\underline{U}_1 = \underline{I}_1 \underline{Z}_{1вх} = 6 + 4j\,B.$$

3. Определим $\underline{U}_2$ и $\underline{I}_2$, пользуясь B - параметрами. При этом учтем, что в схеме с B-параметрами направления токов меняются на противоположные. Поэтому в расчетных формулах надо взять токи со знаками минус.

$$\underline{U}_2 = A_{22}\underline{U}_1 + A_{12}\left(-\underline{I}_1\right) = 0{,}5\left(6+4j\right) - 1\cdot 5j = 3-3j\,B$$

$$-\underline{I}_2 = A_{22}\underline{U}_1 + A_{11}\left(-\underline{I}_1\right) = \frac{1}{6}j\left(6+4j\right) - \frac{1}{3}\cdot 1 = j-1\,A \quad .$$

Ответ: $\underline{I}_2 = 1 - j\,A$.

Пример 7.6

Найти характеристические параметры четырехполюсника, заданного в примере 7.3, считая известными A-параметры:

$$A_{11} = \frac{1}{3};\, A_{12} = 5j\,Ом;\, A_{21} = \frac{1}{6}j\,См;\, A_{22} = 0{,}5 \;.$$

Решение

Вычисляем характеристические параметры, используя A - параметры четырехполюсника:

$$\underline{Z}_{1C} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{11}\cdot\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\cdot\underline{A}_{22}}} = \sqrt{\frac{1\cdot 5j}{3\cdot\frac{1}{6}j\cdot\frac{1}{2}}} = \sqrt{20}\,Ом,$$

$$\underline{Z}_{2C} = \sqrt{\frac{\underline{A}_{22}\cdot\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}\cdot\underline{A}_{11}}} = \sqrt{\frac{1\cdot 5j}{2\cdot\frac{1}{6}j\cdot\frac{1}{3}}} = \sqrt{45}\,Ом,$$

$$\ell^{g} = \sqrt{\underline{A}_{11}\cdot\underline{A}_{22}} + \sqrt{\underline{A}_{21}\cdot\underline{A}_{12}} =$$
$$= \sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} + \sqrt{5j\cdot\frac{1}{6}j} = \sqrt{\frac{1}{6}} + \sqrt{-\frac{5}{6}} = 0{,}41 + j0{,}915 = 1\cdot e^{j66^0} = e^{a}\cdot e^{jb}.$$

Ответ:

$$\underline{Z}_{1C} = \sqrt{20}\,Ом,\quad \underline{Z}_{2C} = \sqrt{45}\,Ом,\quad a = 0,\quad b = 66^\circ = 1{,}14\,рад.$$

Пример 7.7

Четырехполюсник (рис.7.31) нагружен на согласованное сопротивление и имеет характеристические параметры $\underline{Z}_{1C}$=10 Ом, $\underline{Z}_{2C}$=40 Ом, a=0, b=45^0. Входное напряжение U_1=100 В. Найти $\underline{U}_2$, $\underline{I}_1$, $\underline{I}_2$.

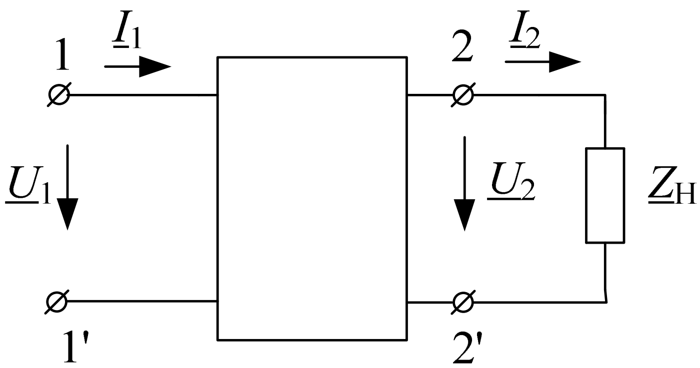


Рис.7.31

Р е ш е н и е

1. Так как нагрузка четырехполюсника согласованная, его входное сопротивление

$$\underline{Z}_{1вх} = \underline{Z}_{1C} = 10\,Ом.$$

2. Находим ток $\underline{I}_1 = \dfrac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{1вх}} = 10\,A.$

3. В согласованном четырехполюснике справедлива формула:

$$\underline{U}_1 = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1C}}{\underline{Z}_{2C}}}\underline{U}_2 e^{g}.$$

Определяем из этой формулы:

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{U}_1}{\sqrt{\dfrac{\underline{Z}_{1C}}{\underline{Z}_{2C}}e^{g}}} = \frac{100}{\sqrt{\dfrac{10}{40}e^{j45^\circ}}} = 200e^{-j45^\circ}\;B.$$

4.Находим ток:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_H} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{2C}} = 5e^{-j45^\circ}\;A.$$

Ток I_2 можно также определить по формуле:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{I}_1}{\sqrt{\dfrac{\underline{Z}_{2C}}{\underline{Z}_{1C}}e^{g}}} = 5e^{-j45^\circ}\;A.$$

Глава 8. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

8.1. Определение установившегося и переходного процесса

Установившимся (стационарным) процессом называется начавшийся бесконечно давно процесс, при котором напряжения и токи в цепи остаются постоянными или изменяются по периодическому закону.

Стационарный процесс это математическая абстракция. Включения источников энергии, переключения в схемах нарушают стационарность и приводят к возникновению переходного процесса.

Переходным процессом называется неустановившийся, нестационарный процесс, возникший при переходе из одного режима работы к другому.

Всякие изменения и переключения в схеме называют *коммутацией.* В схеме рис.8.1 в момент $t=0$ происходит коммутация (в данном случае замыкание ключа). Режим работы цепи изменяется и возникает переходный процесс.

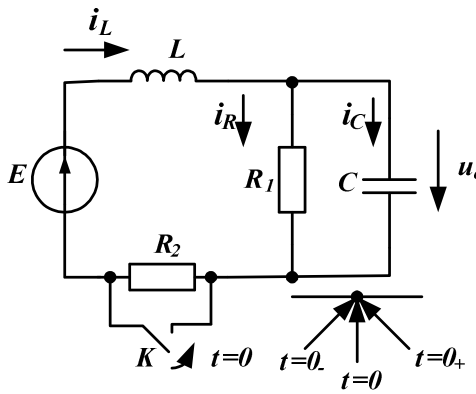


Рис. 8.1

Считается, что *коммутация происходит мгновенно* в момент времени $t=0$. Принято обозначать (рис. 8.1):

$t=0$ - момент коммутации;

$t=0\_$ - момент времени, предшествующий коммутации;

$t=0_+$ - момент времени, следующий сразу после коммутации.

Пример 8.1.

Параметры цепи рис.8.1 следующие:

$E=120\,В, L=10\,мГн, C=68\,нФ,\ R_1=R_2=1\,кОм$. Ключ замыкается в момент $t=0$. Качественно построить график изменения напряжения на конденсаторе.

Решение

До коммутации в цепи длительное время существует установившийся процесс, действует постоянный источник ЭДС $E=120\,В$. Индуктивность для постоянного тока эквивалентна короткому замыканию, емкость эквивалентна разрыву. Поэтому ток в цепи $i_L = i_R = \dfrac{E}{R_1 + R_2} = 60\,мА$, напряжение на конденсаторе $u_c = i_R \cdot R_1 = 60\,В$ (рис.8.2).

В момент коммутации замыкается резистор R_2, в цепи происходит переходной процесс от первого установившегося режима ко второму, увеличивается ток, конденсатор заряжается, напряжение $u_c(t)$ увеличивается.

После окончания переходного процесса в цепи будет новый установившийся процесс и напряжение на конденсаторе будет $u_{c\,уст} = E = 120\,В$.

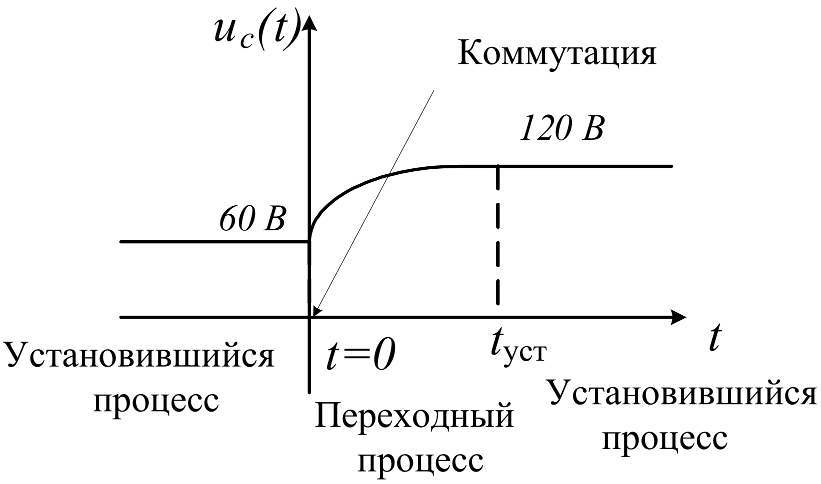


Рис. 8.2

8.2. Первый закон коммутации

Рассмотрим ток в индуктивности (рис.8.1).

В момент $t = 0\_$ имеем $i_L(0\_) = \dfrac{E}{R_1 + R_2} = \dfrac{120}{2 \cdot 10^3} = 60\,мА$ - ток в индуктивности до коммутации.

Найдем $i_L(0_+)$ - ток в индуктивности сразу после коммутации и его связь с током $i_1(0\_)$.

Напряжение самоиндукции не может равняться бесконечности: $u_L(t) = \dfrac{d\psi}{dt} = L\dfrac{di_L}{dt} \neq \infty$!!!

Следовательно, при неизменной индуктивности $\dfrac{di_L}{dt} \neq \infty$. Значит, ток в индуктивности не может меняться скачком.

Ф о р м у л и р о в к а   п е р в о г о   з а к о н а   к о м м у т а ц и и:

Ток в индуктивности до коммутации равен току в индуктивности в начальный момент после коммутации:

$$i_L(0_-) = i_L(0_+). \tag{8.1}$$

Если при коммутации изменяется индуктивность (рис.8.3), действует *обобщенный первый закон коммутации постоянства потокосцепления*:

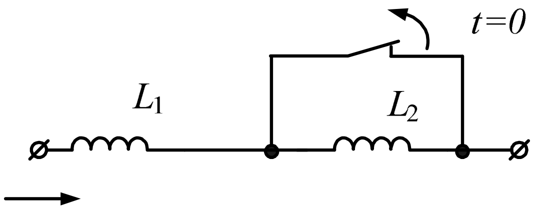


Рис. 8.3

$$\psi(0_-) = \psi(0_+).$$

$$\psi(0_-) = i_{L1}(0_-) \cdot L_1,$$

$$\psi(0_+) = i_L(0_+)(L_1 + L_2),$$

$$i_L(0_+) = \frac{i_{L1}(0_-)L_1}{L_1 + L_2} \ldots \quad .(8.2)$$

В индуктивности накоплена магнитная энергия $W_M(0_-) = \dfrac{L \cdot i_1^2(0_-)}{2}$. Энергия не может измениться мгновенно, так как мощность всегда ограничена ($p(t) = \dfrac{dW}{dt} \neq \infty$). Но после коммутации:

$$W_M(0_+) = \frac{L \cdot i_2^2(0_+)}{2} = \frac{(L_1 + L_2)i_{L1}^2(0_-)L_1^2}{2(L_1 + L_2)^2} =$$

$$= \frac{L_1}{L_1 + L_2} \cdot \frac{L_1 i_{L1}^2(0_-)}{2} = \frac{L_1}{L_1 + L_2} W_M(0_-) < W_M(0_-). \tag{8.3}$$

При коммутации индуктивностей избыточная часть магнитной энергии выделяется в искре.

8.3. Второй закон коммутации

В цепи (рис.8.1) до коммутации в момент $t = 0_-$ напряжение на емкости:

$$u_C(0_-) = \frac{E \cdot R_1}{R_1 + R_2} = 60\,B.$$

Найдем напряжение на емкости сразу после коммутации $u_C(0_+)$.

Ток в емкости не может быть бесконечно большим:

$$i_C(t) = \frac{dq}{dt} = C\frac{du_C}{dt} \neq \infty \ \text{!!!}$$

Следовательно, напряжение на емкости не может меняться скачком.

Формулировка второго закона коммутации:

Напряжение на емкости до коммутации равно напряжению на емкости в начальный момент после коммутации:

$$u_C(0_-)=u_C(0_+).$$

Если при коммутации изменяется емкость (рис.8.4), действует *обобщенный второй закон коммутации для постоянства зарядов*:

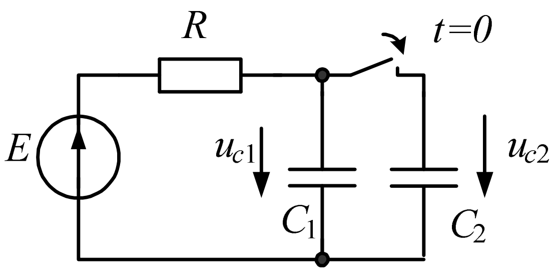


Рис. 8.4

$$q(0_-)=q(0+).$$

$$q_1(0_-)+q_2(0_-)=q_1(0_+)+q_2(0_+).$$

$$q_1(0_-)=u_{C1}(0_-)\cdot C_1,$$

$$q_2(0_-)=u_{C2}(0_-)\cdot C_2,$$

$$u_C(0_+)=\frac{q_1(0_-)+q_2(0_-)}{C_1+C_2}.$$

При коммутации емкости избыточная часть электрической энергии выделяется в искре.

Расчет переходных процессов основан на использовании первого и второго закона коммутации.

8.4. Начальные условия (НУ)

В расчетах переходных процессов используют несколько видов начальных условий:

Независимые начальные условия - это значения токов через индуктивности и напряжений на емкостях, неизменяющиеся при коммутации и определяющие запас энергии в цепи ($i_{L1}.....i_{Ln}$, $u_{C1}.....u_{Cn}$).

Зависимые начальные условия - это значения остальных токов и напряжений, которые могут изменяться при коммутации

($u_{L1},..i_{C1},...u_R...i_R...$).

Докоммутационные НУ – это начальные условия при $t=0_-$.

Послекоммутационные НУ- это начальные условия при $t=0_+$.

Нулевые начальные условия – это равные нулю независимые начальные условия.

На рис.8.5 показана индуктивность, в которой ток перед коммутацией равнялся нулю. В момент $t=0_+$ по первому закону коммутации ток в индуктивности также будет равен нулю. Следовательно, индуктивность в нулевым начальным током $i_L(0_-)$ в момент $t=0_+$ эквивалентна холостому ходу.

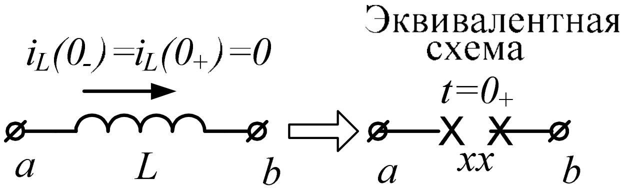


Рис. 8.5

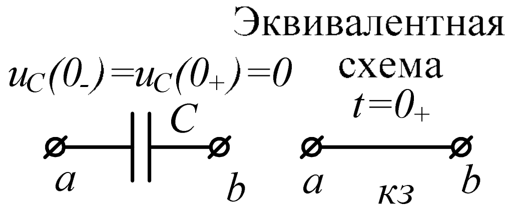


Рис. 8.6

На рис.8.6 показана емкость, на которой в момент $t=0_-$ напряжение равно нулю. По второму закону коммутации в момент $t=0_+$ напряжение не может измениться и останется равным нулю ($u_C(0_+)=0$. Если между точками a и b напряжение равно нулю, то эти точки можно соединить проводником. Следовательно, емкость с нулевым начальным напряжением $u_C(0_-)=0$ в момент $t=0_+$ эквивалентна короткому замыканию.

Ненулевые начальные условия - это неравные нулю независимые начальные условия.

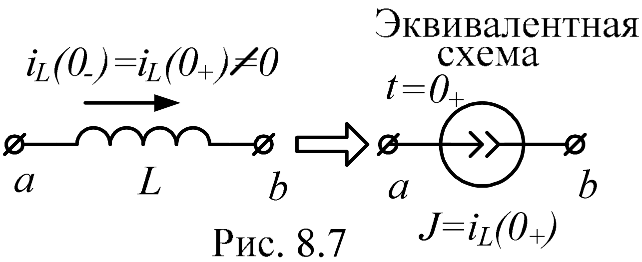


Рис. 8.7

Рис. 8.8

На рис.8.7 показана индуктивность с ненулевым начальным током $i_L(0_-)=i_L(0_+)\neq 0$. В момент $t=0_+$ такая индуктивность эквивалентна идеальному источнику тока $i_L(0_+)$.

На рис.8.8 показана емкость с ненулевым начальным напряжением $u_C(0_-)=u_C(0_+)\neq 0$. В момент $t=0_+$ такая емкость эквивалентна идеальному источнику напряжения $E=u_C(0_+)$.

Эквивалентные схемы индуктивности и емкости можно использовать для расчета зависимых НУ при $t=0_+$.

8.5. Классический метод расчета переходного процесса

На рис.8.9 показана цепь, содержащая резистор R, индуктивность L и емкость C . Такую цепь мы будем называть RLC - цепь. В момент $t=0$ ключ *K* подключает к цепи источник напряжения $e(t)$.

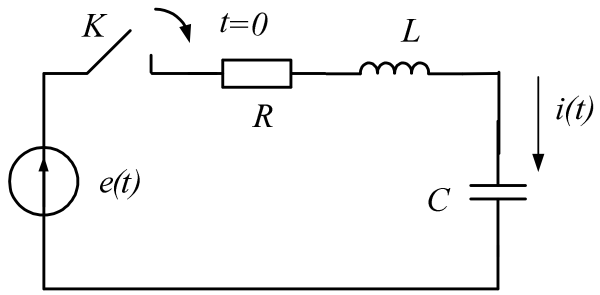


Рис. 8.7

Составим для послекоммутационной схемы $(t \geq 0)$ уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt = e(t). \qquad (8.4)$$

В уравнении (8.4) $i(t)$ - полный переходной ток.

Когда после коммутации пройдет достаточно много времени $(t \to \infty)$, в цепи установится установившийся, принужденный режим (например, гармонический).

В принужденном режиме действует уравнение:

$$i_{np}R + L\frac{di_{np}}{dt} + \frac{1}{C}\int i_{np}dt = e(t) \qquad (8.5).$$

Введем понятие свободного тока. Обозначим $i_{своб}(t) = i(t) - i_{np}(t)$ - свободный ток.

Из (8.4) вычитаем (8.5):

$$(i - i_{np})R + L\frac{d(i - i_{np})}{dt} + \frac{1}{C}\int (i - i_{np})dt = e(t) - e(t), \qquad (8.6)$$

$$i_{св}R + L\frac{di_{св}}{dt} + \frac{1}{C}\int i_{св}dt = 0, \qquad (8.7)$$

или

$$U_{Rсв} + U_{Lсв} + U_{Cсв} = 0. \qquad (8.8)$$

По уравнениям (8.7), (8.5), (8.4) можно построить соответствующие схемы (рис.8.8а, б, в), которые показываю следующее:

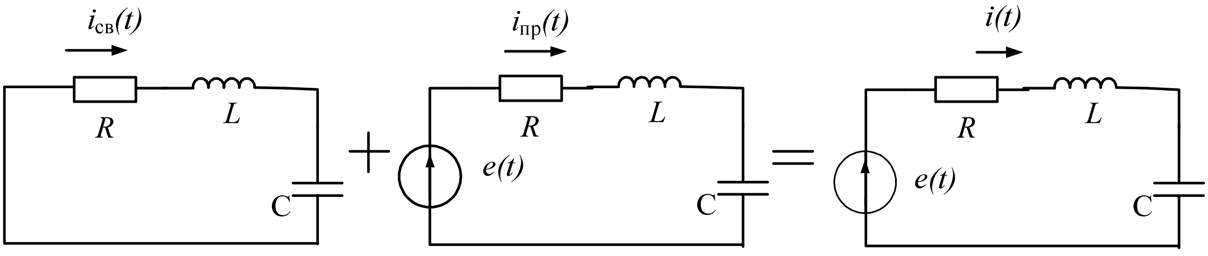
Полный переходный процесс складывается из принужденного процесса, начавшегося бесконечно давно, и затухающего свободного процесса. Свободный процесс компенсирует неравенство энергии полной и принужденной схемы в момент $t = 0$. *Свободный процесс обязательно затухает, так как в схеме нет источников.*

Полный переходной процесс всегда есть сумма свободного процесса и принужденного.

$$i_L(t) = i_{Lсв}(t) + i_{Lnp}(t),\ u_C(t) = u_{Cсв}(t) + u_{Cnp}(t),$$

$$u_R(t) = u_{Rсв}(t) + u_{Rnp}(t). \qquad (8.9)$$

Принужденный процесс это частное решение неоднородного дифференциального уравнения (8.5) при $t \to \infty$. Для постоянного или гармонического источника энергии принужденный процесс рассчитывают методами расчета цепей постоянного и переменного тока.



а) Свободный процесс

$t \to \infty$
б) Принужденный процесс

$t>0$
в) Полный переходной процесс

Рис. 8.8

Свободный процесс это общее решение однородного дифференциального уравнения (8.7):

$$Ri_{св}(t) + L\frac{di_{св}}{dt} + \frac{1}{C}\int i_{св}dt = 0.$$

Решение для свободного тока имеет вид:

$$i_{св}(t) = A_1e^{p_1t} + A_2e^{p_2t} .... + A_ne^{p_nt}, \qquad (8.10)$$

где: p_1, p_2 ...p_n - некратные (простые) *корни характеристического уравнения*;

A_1...A_n - *постоянные интегрирования*, определяемые в послекоммутационной схеме с учетом независимых НУ.

8.6. Способы составления характеристического уравнения

Первый способ

В дифференциальном уравнении для свободной составляющей (8.7) заменяем $\frac{d}{dt} \Rightarrow p; \int \Rightarrow \frac{1}{p}$.

Получаем характеристическое уравнение:

$$R + pL + \frac{1}{pC} = 0. \qquad (8.11)$$

Решив характеристическое уравнение (8.11), получим корни p_1 и p_2.

В схеме после коммутации разрываем любую ветвь цепи и находим $\underline{Z}_{вх}(j\omega)$.

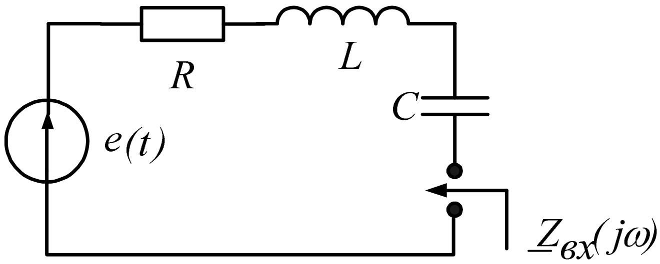


Рис. 8.9

$$\underline{Z}_{вх}(j\omega)=R+j\omega L+\frac{1}{j\omega C}.$$

Заменяем $j\omega$ на p, получаем:

$$R+pL+\frac{1}{pC}=0 \qquad (8.12)$$

- *характеристическое уравнение,* совпадающее с (8.11).

Преобразуем характеристическое уравнение к квадратному уравнению:

$$p^2LC+RCp+1=0. \qquad (8.13)$$

Число корней характеристического уравнения равно его степени. Степень характеристического уравнения равна числу независимых начальных условий в послекоммутационной схеме и определяет порядок цепи. Чем выше порядок, тем сложнее расчет переходного процесса. Порядок цепи равен числу инерционных накопительных элементов (индуктивностей и емкостей) после полного упрощения цепи.

8.7. Определение постоянных интегрирования

Для цепи второго порядка имеем:

$$i_{св}(t)=A_1e^{p_1t}+A_2e^{p_2t}\ . \qquad (8.14)$$

Известны p_1 и p_2. Требуется найти две неизвестных постоянных интегрирования A_1 и A_2.

Составляем два уравнения для момента времени $t=0_+$.

Первое уравнение:

$$i_{св}(0_+)=A_1e^{p_1(0_+)}+A_2e^{p_2(0_+)}=A_1+A_2=i(0_+)-i_{пр}(0_+). \qquad (8.15)$$

Второе уравнение получим, дифференцируя (8.14):

$$\frac{di_{св}(t)}{dt}=A_1p_1e^{p_1t}+A_2p_2e^{p_2t}\ . \qquad (8.16)$$

Пусть $t=0_+$. Тогда:

$$\left.\frac{di_{св}(t)}{dt}\right|_{t=0_+}=A_1p_1+A_2p_2 \qquad (8.17).$$

Решаем (8.15) и (8.17) и находим A_1 и A_2.

Для расчета постоянных интегрирования надо найти $i_{св}(0_+)$ и $\left.\dfrac{di_{св}(t)}{dt}\right|_{t=0_+}$ в послекоммутационной схеме с учетом законов коммутации.

Рекомендуется решать задачу относительно $i_L(t)$ *или* $u_C(t)$.

Если мы ищем $i(t)=i_L(t)$, то:

$$i_{Lсв}(0_+)=i_L(0_+)-i_{Lпр}(0_+) \tag{8.18}$$

легко определить по первому закону коммутации.

Для расчета производной свободного тока в индуктивности используем формулу:

$$L\frac{di_L(t)}{dt}=u_L(t).$$

Для производной свободного тока в индуктивности получим:

$$\left.\frac{di_{Lсв}(t)}{dt}\right|_{t=0_+}=\frac{u_{Lсв}(0_+)}{L}=\frac{u_L(0_+)-u_{Lпр}(0_+)}{L}. \tag{8.19}$$

Полное и принужденное значение напряжения на индуктивности найдем в послекоммутационной схеме в момент $t=0_+$.

Если мы ищем $u_C(t)$, то:

$$u_{Cсв}(0_+)=u_C(0_+)-u_{Cпр}(0_+) \tag{8.20}$$

легко получить по второму закону коммутации.

Производная свободного напряжения на емкости выражается через полный и принужденный ток в емкости в момент $t=0_+$:

$$C\frac{du_{Cсв}(t)}{dt}=i_{Cсв}(t)=i_C(t)-i_{Cпр}(t),$$

$$\left.\frac{du_{Cсв}(t)}{dt}\right|_{t=0_+}=\frac{i_C(0_+)-i_{Cпр}(0_+)}{C}. \tag{8.21}$$

8.8. Переходные процессы в цепях первого порядка

Включение постоянной ЭДС в RL-цепь

В цепях первого порядка имеется только один накопительный элемент. В схеме рис.8.10 L=1 Гн, R=2 Ом, E=4 В. Ключ K замыкается в момент $t=0$.

Найти ток в цепи после коммутации.

Последовательность расчета переходного процесса классическим методом

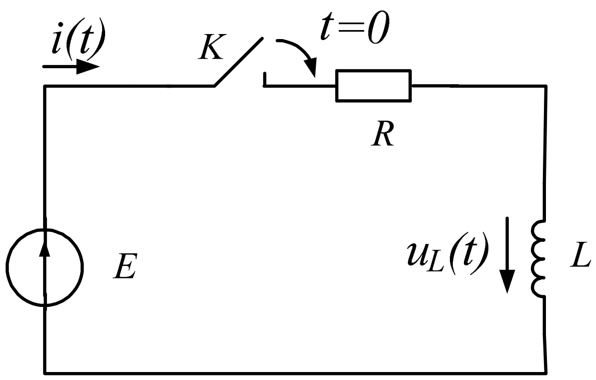


Рис. 8.10

1. Расчет режима до коммутации $\left(t=0\_\right)$, определение независимых НУ:

$$i_L(0-)=0=i_L(0+).$$

2. Расчет принужденного режима, ключ замкнут$\left(t\to\infty\right)$:

$$i_{Lnp}=\frac{E}{R}=2A.$$

3. Составляем дифференциальное уравнение цепи после коммутации $\left(t\geq 0\right)$:

$$iR+L\frac{di}{dt}=E,\quad 2i+1\frac{di}{dt}=4B. \qquad (8.22)$$

4. Составляем характеристическое уравнение цепи. Заменяем $\frac{d}{dt}\to p$:

$$pL+R=0.$$

Находим корень характеристического уравнения:

$$p_1=-\frac{R}{L}=-2\frac{1}{C}=-\alpha,$$

α - коэффициент затухания.

Записываем выражение для свободного тока:

$$i_{cв}(t)=A_1e^{p_1t}=A_1e^{-\frac{R}{L}t}=A_1e^{-\alpha\cdot t}=A_1e^{-2t}.$$

5. Расчет постоянной интегрирования A_1:

$$A_1=i_{cв}(0_+)=i_L(0_+)-i_{Lnp}(0_+)=0-\frac{E}{R}=-\frac{E}{R}=-2A.$$

6. Свободная составляющая тока в цепи:

$$i_{Lсв}(t) = -\frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t} = -2e^{-2t}A.$$

7. Находим полный ток:

$$i_L(t) = i_{пр}(t) + i_{св}(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E}{R}(1 - e^{-\frac{R}{L}t}) = 2(1 - e^{-2t})A.$$

Ответ: полный ток $i_L(t) = 2(1 - e^{-2t})A$.

8.9. Постоянная времени цепи

Величина, обратная коэффициенту затухания α, называется постоянной времени цепи $\tau = \frac{1}{\alpha} = \frac{L}{R} = \left[\frac{Гн}{Ом}\right] = \left[\frac{В \cdot с}{А \cdot Ом}\right] = \left[\frac{Ом \cdot с}{Ом}\right] = [с]$.

Запишем полный ток:

$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} = 2 - 2e^{-\frac{t}{\tau}} \quad A.$$

Свободный ток: $i_{св}(t) = -\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}} = -2e^{-\frac{t}{\tau}}A$,

$$i_{св}(0+) = -\frac{E}{R} = -2A.$$

Мы видим, что *постоянная времени* τ *это время, в течение которого свободный процесс затухает в* e *- раз.*

Найдем производную к свободному току при $t = 0_+$:

$$\left.\frac{di_{св}}{dt}\right|_{t=0_+} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = \left(-\frac{E}{R}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\tau}\right) =$$

$$= \frac{\frac{E}{R}}{\tau} = \frac{d}{dt}\left(-2e^{-\frac{t}{\tau}}\right)_{t=0_+} = (-2)\left(-\frac{1}{\tau}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}{}_{t=0_+} = \frac{2}{\tau} = tg\beta.$$

На рис.8.11 показана схема моделирования и графики свободного и полного тока. На графике свободного тока в момент $t = 0$ под углом β проведена касательная. Из рисунка видно, что *касательная к свободному току отсекает на оси времени отрезок равны* τ. Это правило используют для определения постоянной времени цепи.

В таблице 8.1 рассчитаны значения экспоненциальных функций $(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$ и $e^{-\frac{t}{\tau}}$ для разных значений времени. Мы видим, что при $t=3\tau$ свободный ток $i_{св}(3\tau)=-\frac{E}{R}e^{-3}=-\frac{E}{R}(0{,}05)$, полный ток $i(3\tau)=\frac{E}{R}(1-e^{-3})=\frac{E}{R}(1-0{,}05)=0{,}95i_{пр}$ и переходной процесс считается установившимся.

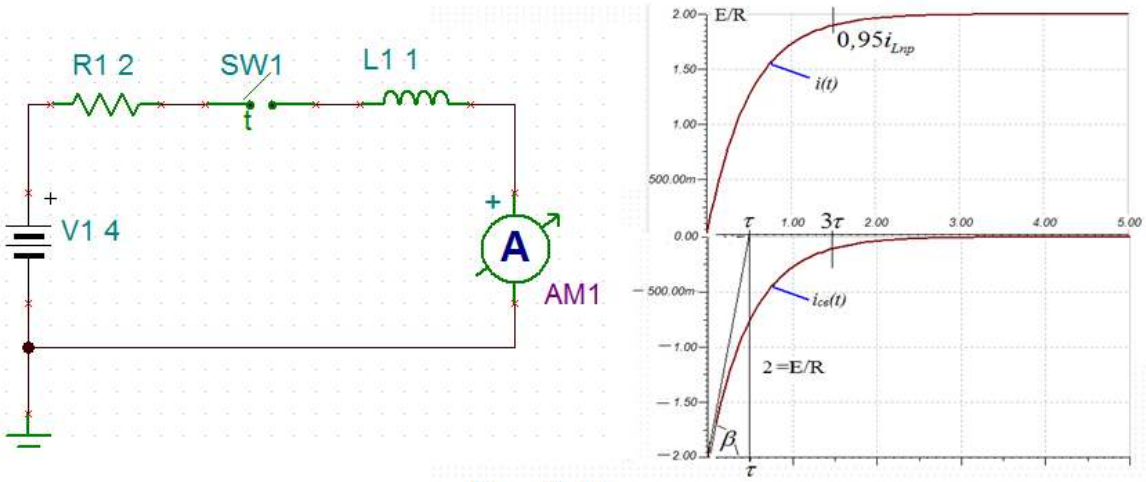


Рис. 8.11

Таблица 8.1

t	0	τ	2 τ	3 τ	4 τ	5 τ
$1-e^{-\frac{t}{\tau}}$	0	0,63	0,86	0,95	0,98	0,99
$e^{-\frac{t}{\tau}}$	1	0,368	0,14	0,05	0,02	0,01

Найдем напряжения на резисторе и индуктивности:

$$u_R(t)=Ri(t)=E-Ee^{-\frac{t}{\tau}},$$

$$u_L(t)=L\frac{di}{dt}=L\frac{d}{dt}\left[\frac{E}{R}-\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}\right]=-\frac{E}{R}L(-\frac{1}{\tau})e^{-\frac{t}{\tau}}=\frac{L}{\frac{L}{R}}\frac{E}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}=Ee^{-\frac{t}{\tau}}$$

По второму закону Кирхгофа $u_R(t)+u_L(t)=E$. На рис.8.12 показаны результаты моделирования напряжений на резисторе и индуктивности.

В ы в о д ы

В цепи первого порядка полный переходной ток (напряжение) меняется по экспоненциальному закону от начального значения $(t=0_+)$ *до установившегося значения.*

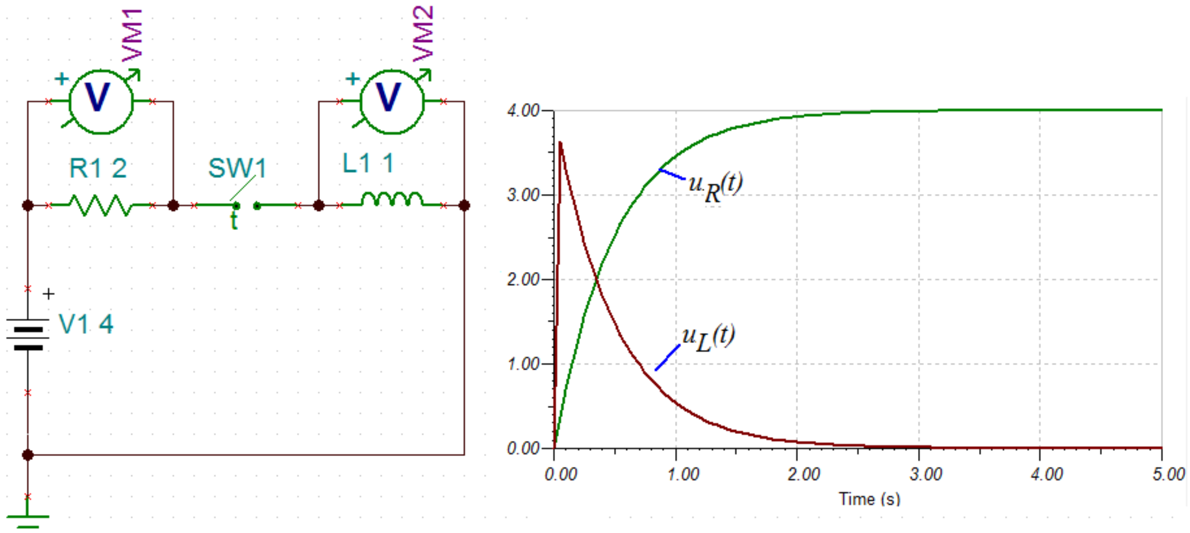


Рис.8.12

8.10. Включение в *RL*-цепь гармонической ЭДС

В схеме рис.8.13 в момент $t=0$ к RL - цепи подключается гармоническая ЭДС $e(t)=E_m\,\mathbf{sin}(\omega t+\psi)$. Требуется найти ток после коммутации.

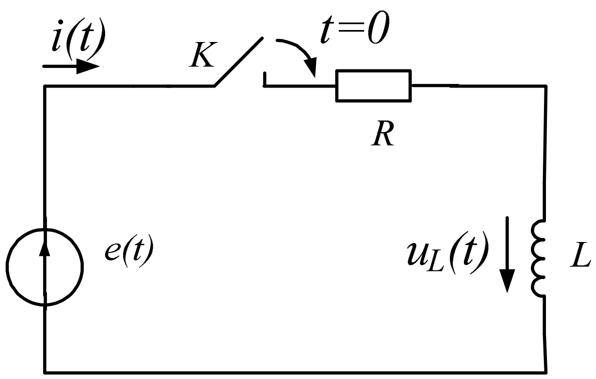


Рис. 8.13

Р е ш е н и е

1. Расчет режима до коммутации $i_L(0-)=0=i_L(0+)$.

2. Расчет принужденного режима символическим методом:

Находим:

$$\underline{E}_m=E_m e^{j\psi},\ \underline{I}_m=\frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}}=\frac{E_m e^{j\psi}}{Ze^{j\varphi}}=I_m e^{j(\psi-\varphi)},$$

где: $Z=\sqrt{R^2+(\omega L)^2}$, $\varphi = arctg\dfrac{\omega L}{R}$.

Находим мгновенное значение принужденного тока:

$$i_{пр}(t)=I_m\,\mathbf{sin}(\omega t+\psi-\varphi),\ i_{пр}(0+)=I_m\,\mathbf{sin}(\psi-\varphi).$$

3. Составляем дифференциальное уравнение:

$$iR+L\frac{di}{dt}=E_m\,\mathbf{sin}(\omega t+\psi).$$

4. Характеристическое уравнение: $pL+R=0$**,**

корень характеристического уравнения: $p_1=-\dfrac{R}{L}$.

5. Свободный ток: $i_{св}(t)=Ae^{p_1t}=Ae^{-\frac{R}{L}t}=Ae^{-\frac{t}{\tau}}$.

6. Находим постоянную интегрирования:

$$A=i_{св}(0+)=i(0+)-i_{пр}(0+)=0-I_m\,\mathbf{sin}(\psi-\varphi).$$

7. Находим полный ток:

$$i(t)=I_m\,\mathbf{sin}(\omega t+\psi-\varphi)-I_m\,\mathbf{sin}(\psi-\varphi)e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Свободный ток зависит от фазы ЭДС при $t=0$. Если $\psi-\varphi=0$, то $i_{св}(t)=0$. В общем случае $i_{св}(0_+)+i_{пр}(0_+)=i(0_+)=0$.

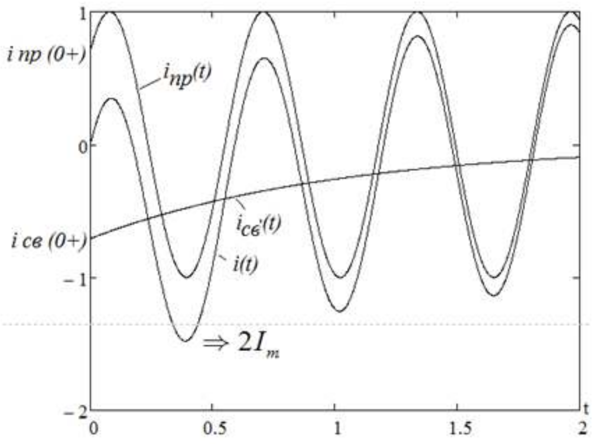


Рис.8.14

В Mathcad рассчитаны графики для ω=10 1/с, τ=1 с, $(\psi-\varphi)=45^o$ (рис.8.14).

Перенапряжение в RL-цепи

Если $\psi - \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, то $i(t) = \pm I_m \cos(\omega t) \mp I_m e^{-\frac{t}{\tau}}$. Если постоянная времени τ – большая, амплитудное значение принужденного процесса будет складываться с большим значением свободного тока и полный переходной ток будет близок к значению $2I_m$. Возникает опасное перенапряжение в цепи.

8.11. Включение в *RC*-цепь постоянной ЭДС

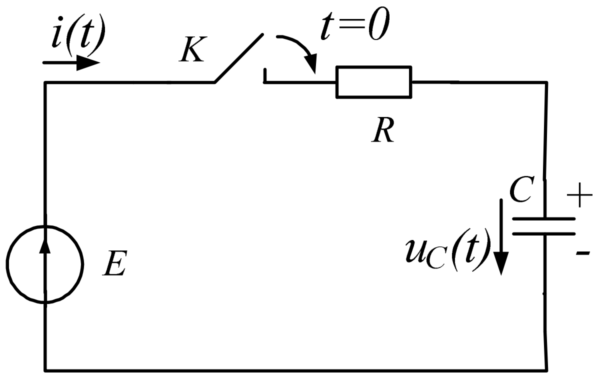


Рис. 8.15

В схеме рис.8.15 постоянная ЭДС E подключается к *RC*-цепи. На емкости имеются ненулевые начальные условия:

$$U_C(0_-) = U_C(0_+) = U_0.$$

Решение

Решаем задачу для $u_C(t)$.

1. Расчет режима до коммутации $U_C(0_-) = U_C(0_+) = U_0$.

2. Расчет принужденного режима:

$$i_{Cпр} = 0, E = i_{Cпр}R + u_{Cпр}, E = u_{Cпр}.$$

3. Дифференциальное уравнение:

$$e(t) = iR + u_C(t); i_R = i_C = C\frac{du_C}{dt};$$

$$RC\frac{du_C}{dt} + u_C = e(t). \qquad (8.23)$$

4. Характеристическое уравнение:

$$RCp + 1 = 0; \; p_1 = -\frac{1}{RC} = -\alpha.$$

Свободная составляющая: $u_{C_{св}}(t) = Ae^{p_1 t} = Ae^{-\frac{t}{RC}} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$.

$$\tau = RC\left[Ом \cdot Ф\right] = \left[Ом \cdot \frac{A \cdot c}{B}\right] = c.$$

5. Находим постоянную интегрирования *A*:

$$A = u_{Cсв}(0_+) = u_C(0_+) - u_{Cпр} = U_0 - E.$$

6. Свободная составляющая: $u_{Cсв}(t) = (U_0 - E)e^{-\frac{t}{\tau}}$.

7. Полный переходной процесс:

$$u_C(t) = u_{Cпр}(t) + u_{Cсв}(t) = E + (U_0 - E)e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

График полного переходного процесса $u_C(t)$ показан на рис.8.16а:

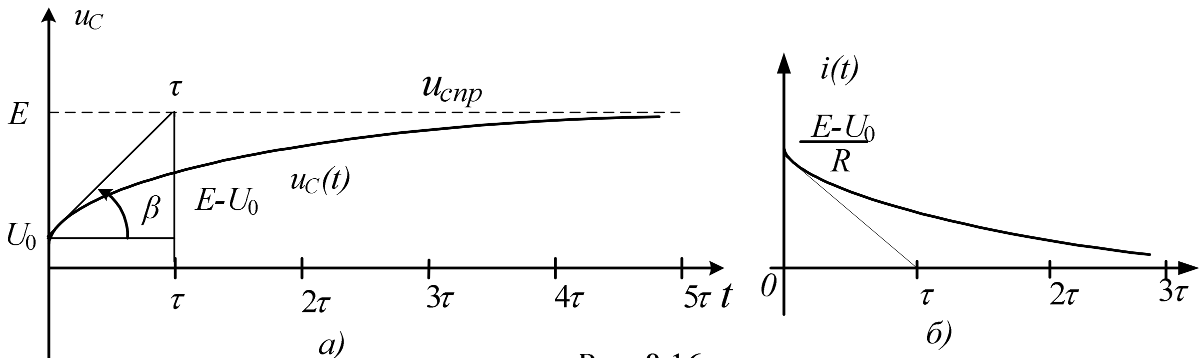


Рис. 8.16

Найдем производную к переходному процессу при $t = 0$:

$$\frac{du_C(t)}{dt} = \left(-\frac{1}{\tau}\right)\left(-\left(E - U_0\right)\right)e^{-\frac{t}{\tau}}{}_{(t=0)} = \frac{E - U_0}{\tau} = tg\beta.$$

В ы в о д : *касательная к переходному процессу при* $t = 0$ *отсекает на линии принужденного режима отрезок равный* τ.

Ток в цепи:

$$i(t) = C\frac{du_C(t)}{dt} = C\left(-\frac{1}{\tau}\right)\left(-\left(E - U_0\right)\right)e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{E - U_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

График тока показан на рис.8.16б.

Напряжение на резисторе:

$$u_R(t) = Ri(t) = \left(E - U_0\right)e^{-\frac{t}{\tau}} = E - u_C(t).$$

В ы в о д ы : $u_C(t)$ меняется аналогично $i_L(t)$ в *RL* – цепи; $i(t)$ меняется аналогично $u_L(t)$ в *RL* – цепи.

8.12. Дифференцирующие и интегрирующие цепи

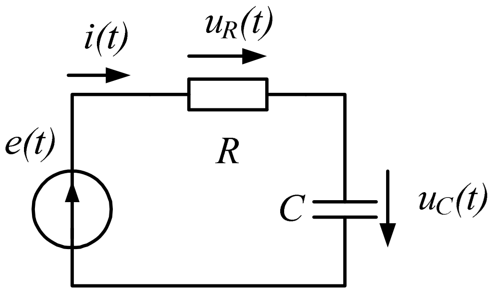


Рис. 8.17

На рис.8.17 показана схема RC - цепи, в которой действует источник напряжения $e(t)$ произвольной формы. По второму закону Кирхгофа запишем уравнение для напряжений в цепи:

$$e(t) = u_R(t) + u_C(t) = iR + u_C = RC\frac{du_C}{dt} + u_C. \qquad (8.24)$$

Интегрирующая RC-цепь

Пусть постоянная цепи $\tau = RC$ достаточно велика. В этом случае большими должны быть резистор и емкость $(R \gg, C \gg)$. Но для гармонических составляющих сигналов емкостное сопротивление будет малым $(X_C = \dfrac{1}{\omega C} \ll R)$. Значит входное напряжение $e(t)$ будет приложено к резистору:

$$e(t) \approx u_R(t) = RC\frac{du_C}{dt}. \qquad (8.25)$$

Выходной сигнал снимаем с емкости:

$$u_C(t) \approx \frac{1}{RC}\int_0^t e(t)dt. \qquad (8.26)$$

В результате *получили интегрирующую цепь*.

Пример 8.1

Провести моделирование и найти напряжение на емкости в цепи (рис.8.18) с параметрами: $R_1 = 10кОм$, $C = 100нФ$. На вход цепи поступают прямоугольные импульсы с амплитудой 1В и с периодом 1 мс.

На рис.8.18 показаны ожидаемые результаты моделирования. Изменение напряжения на емкости приближенно соответствует интегралу входного напряжения.

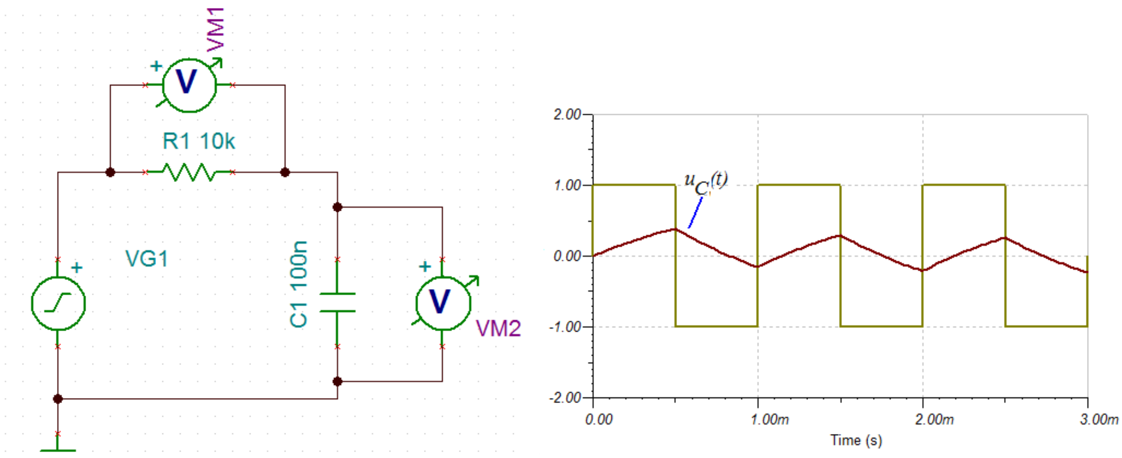


Рис.8.18

Дифференцирующая RC- цепь

Теперь рассмотрим случай, когда постоянная времени мала $(\tau = RC \ll)$. При этом малыми должны быть R и C. Тогда сопротивление емкости велико $(X_C = \dfrac{1}{\omega C} \gg R)$ и входной сигнал будет приложен к емкости:

$$e(t) \approx u_C(t). \tag{8.27}$$

Выходной сигнал снимаем с сопротивления:

$$u_R(t) = RC\frac{du_C}{dt} = \tau\frac{de}{dt}. \tag{8.28}$$

В результате получили дифференцирующую цепь.

Пример 8.2

Провести моделирование и найти напряжение на резисторе в цепи (рис.8.19) с параметрами: $R_1 = 1 кОм$, $C = 100 нФ$. На вход цепи поступают прямоугольные импульсы с амплитудой 1В и с периодом 1 мс.

На рис.8.19 показаны ожидаемые результаты моделирования. Изменение напряжения на резисторе приближенно соответствует производной входного напряжения.

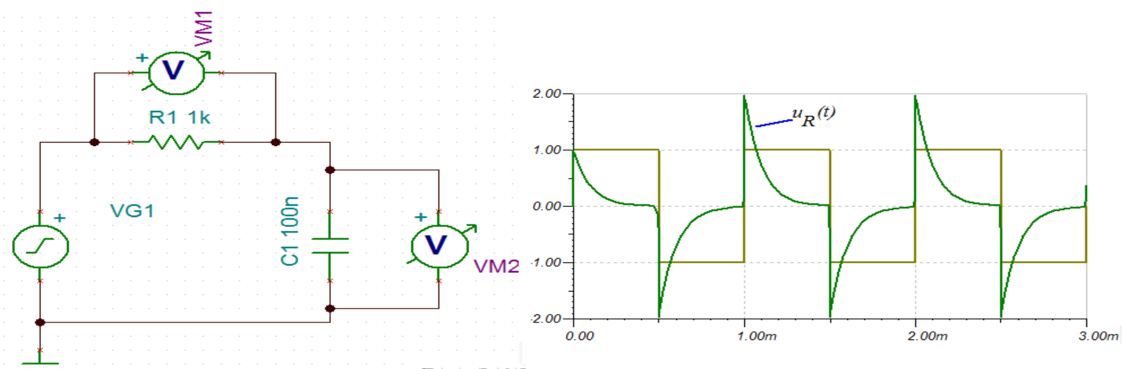


Рис.8.19

Интегрирующая RL – цепь

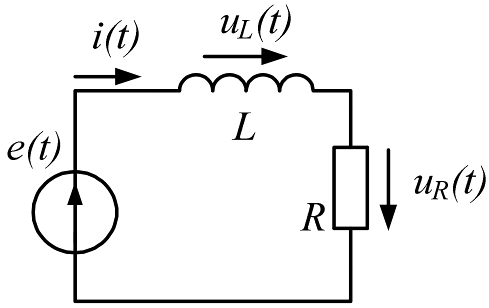


Рис. 8.20

На рис.8.20 показана схема RL - цепи, в которой действует источник напряжения $e(t)$ произвольной формы. По второму закону Кирхгофа запишем уравнение для напряжений в цепи:

$$e(t) = u_L(t) + u_R(t) = L\frac{di}{dt} + iR. \tag{8.29}$$

Пусть постоянная времени $\tau = \dfrac{L}{R}$ достаточно большая. При этом индуктивность должна быть большой, а сопротивление малым ($L \gg$, $R \ll$) и индуктивное сопротивление на составляющих частотах сигнала будет больше активного $(X_L = \omega L \gg R)$.

Тогда входное напряжение будет приложено к индуктивности:

$$e(t) \approx u_L(t) = L\frac{di}{dt}, \tag{8.30}$$

ток в цепи приближенно равен:

$$i \approx \frac{1}{L}\int_0^t e(t)dt. \tag{8.31}$$

Выходной сигнал снимаем с сопротивления и получаем интеграл входного напряжения:

$$u_R(t) = iR \approx \frac{R}{L}\int_0^t e(t)dt = \frac{1}{\tau}\int_0^t e(t)dt. \tag{8.32}$$

Пример 8.3

Провести моделирование и найти напряжение на резисторе в цепи (рис.8.21) с параметрами: $R_1 = 1 Ом, L = 10\, мГн$. На вход цепи поступают прямоугольные импульсы с амплитудой 1В и с периодом 1 мс.

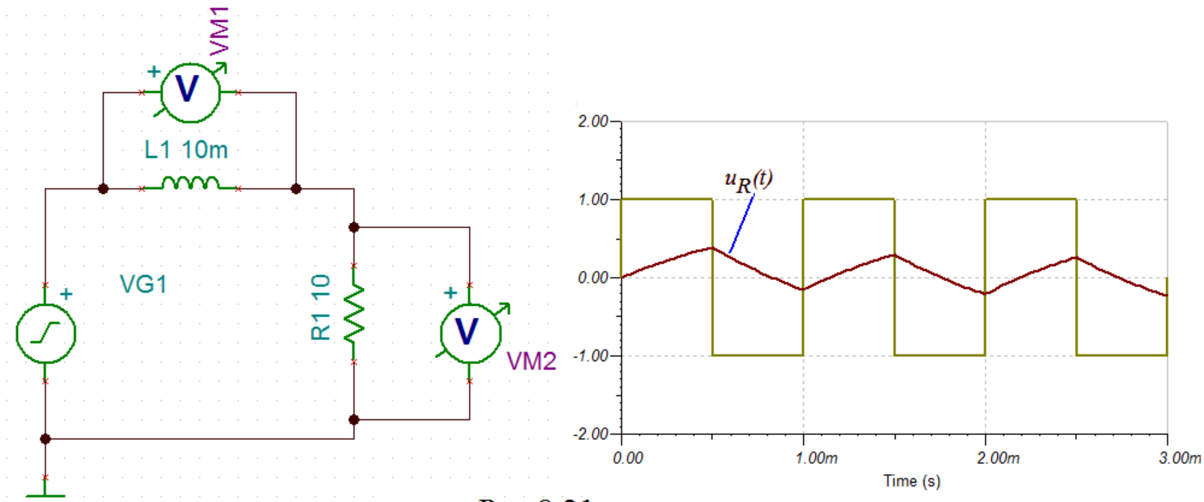


Рис.8.21

На рис.8.21 показаны ожидаемые результаты моделирования. Изменение напряжения на резисторе приближенно соответствует интегралу входного напряжения.

Дифференцирующая RL-цепь

Рассмотрим случай, когда в цепи рис.8.20 постоянная времени $\tau = \dfrac{L}{R}$ мала. При этом $X_L = \omega L \ll R$ и входное напряжение будет приложено к резистору:

$$e(t) \approx u_R(t) = iR. \tag{8.32}$$

Выходное напряжение будем снимать с индуктивности и получим производную входного напряжения:

$$u_L = L\frac{di}{dt} = \frac{L}{R}\frac{de}{dt} = \tau\frac{de}{dt}. \tag{8.33}$$

Пример 8.4

Провести моделирование и найти напряжение на индуктивности в цепи (рис.8.22) с параметрами: $R_1 = 100\,Ом, L_1 = 10\,мГн$.

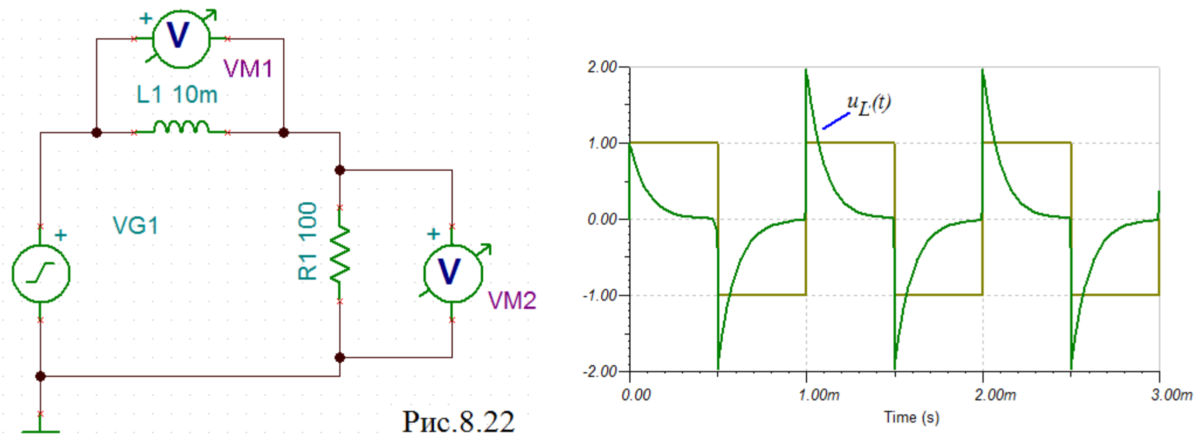


Рис.8.22

На вход цепи поступают прямоугольные импульсы с амплитудой 1В и с периодом 1 мс.

На рис.8.22 показаны ожидаемые результаты моделирования. Изменение напряжения на индуктивности приближенно соответствует производной входного напряжения.

8.13. Переходные процессы в цепях второго порядка

Разряд емкости в RLC-цепи

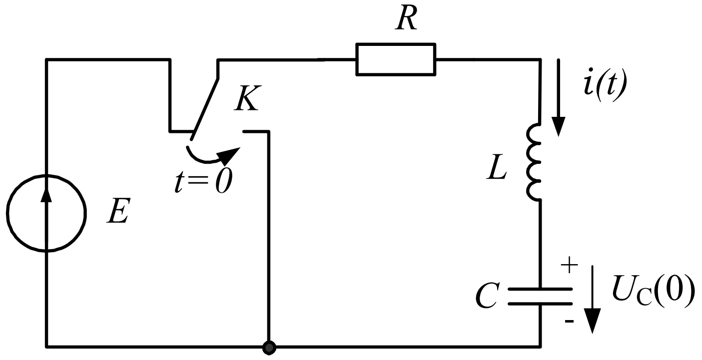


Рис. 8.23

На рис.8.23 показана схема цепи второго порядка, содержащей два накопительных элемента: индуктивность и емкость. До коммутации к цепи подключен источник постоянного напряжения $e(t) = E = const$. Емкость заряжена до напряжения $u_C(0_-) = E$. Ток в цепи равен нулю. В момент коммутации ключ K переключается на перемычку и в RLC-цепи происходит разряд емкости. Требуется рассчитать изменение напряжения на емкости $u_C(t)$.

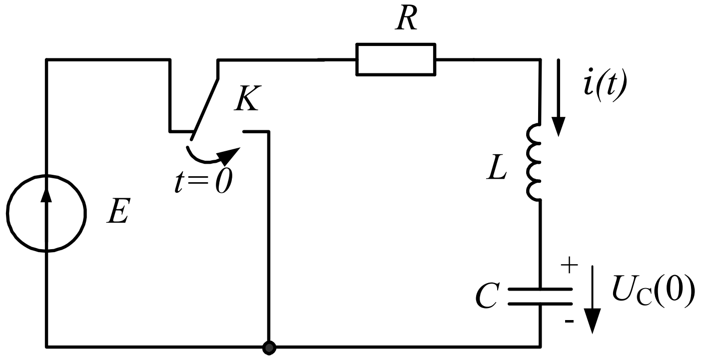


Рис. 8.23

Решение

1. Расчет режима до коммутации:

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = E;$$

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) = 0.$$

2. Расчет принужденного режима.

В схеме после коммутации отсутствуют источники энергии. Вся накопленная в емкости до коммутации энергия выделится в резисторе. Поэтому:

$u_{Cпр}(t) = 0, \; i_{Lпр}(t) = 0.$

3. Дифференциальное уравнение в послекоммутационной схеме ($t \geq 0$).

По второму закону Кирхгофа:

$$Ri + L\frac{di}{dt} + u_C = 0. \qquad (8.34)$$

Подставим в (8.34) выражение для тока:

$$i = C\frac{du_C}{dt}. \qquad (8.35)$$

Получим дифференциальное уравнение для напряжения на емкости:

$$RC\frac{du_C}{dt} + LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C = 0, \qquad (8.36)$$

или:

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\cdot\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C = 0. \qquad (8.37)$$

4. Характеристическое уравнение:

$$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0. \qquad (8.38)$$

Обозначим $\delta = \dfrac{R}{2L}$, $\quad \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ - частота незатухающих колебаний.

Получим:

$$p^2 + 2\delta p + \omega_0 = 0. \qquad (8.39)$$

Корни характеристического уравнения:

$$p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - {\omega_0}^2}. \qquad (8.40)$$

Возможны 3 случая переходного процесса в цепи второго порядка:

1-й случай – *апериодический переходной процесс*.

В этом случае корни p_1 и p_2 – вещественные, отрицательные и разные.

Для этого должно быть: $\delta^2 - \omega_0{}^2 > 0$, $\delta > \omega_0$, $\dfrac{R}{2L} > \omega_0$,

$$R > 2\omega_0 L = 2\rho = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad (8.41).$$

В RLC-цепи величину $\rho = \sqrt{\dfrac{L}{C}}$ называют характеристическим сопротивлением.

В этом случае напряжение на емкости ищем в следующем виде:

$$u_{Cсв}(t) = B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t}. \qquad (8.42)$$

Переходной процесс описывается двумя экспоненциальными функциями с действительными отрицательными и разными показателями.

Такой *переходной процесс не совершает периодических колебаний и называется апериодическим*.

Пример 8.5

В схеме рис.8.24 L=1 мГн, C=1 нФ, $\rho = \sqrt{\dfrac{L}{C}} = \sqrt{\dfrac{10^{-3}}{10^{-9}}} = 10^3$ Ом.

Ключ замыкается в момент $t = 200\,мкс$. Провести моделирование для случая $R = 4\,кОм > 2\rho$ на интервале времени от 180 мкс до 240 мкс.

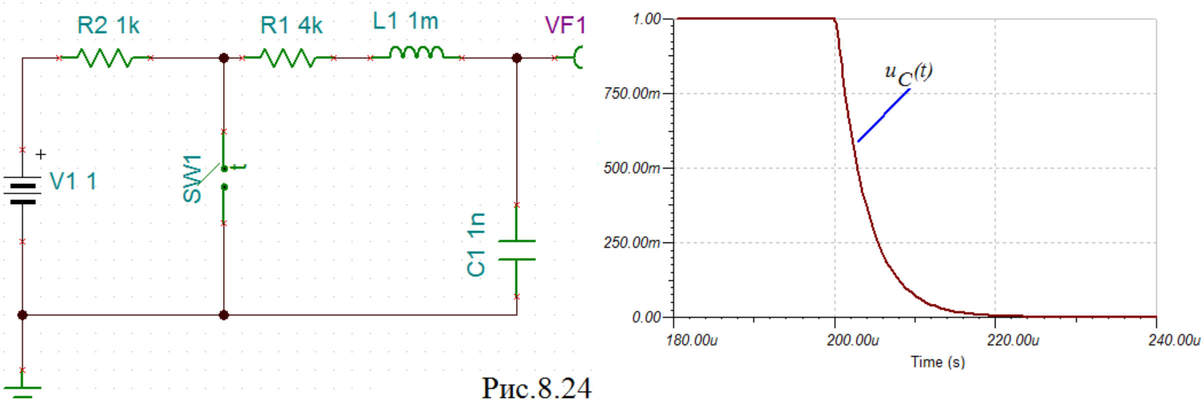


Рис.8.24

Получили апериодический переходной процесс $u_C(t)$.

2-й случай – *критический переходной процесс*.

В этом случае корни $p_1 = p_2 = -\delta$ - вещественные, отрицательные и равные.

При этом: $\delta = \dfrac{R}{2L} = \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, $R = 2\sqrt{\dfrac{L}{C}} = 2\rho$.

Решение дифференциального уравнения ищем в виде:

$$u_{Cсв}(t) = (B_1 + B_2 t)e^{-\delta t} \qquad (8.43)$$

С учетом начальных условий получим полное решение:

$$u_{Cсв}(t) = E(1 + \delta t)e^{-\delta t} = u_C(t). \qquad (8.44)$$

Пример 8.6.

В схеме рис.8.25 ключ замыкается в момент $t = 200\,мкс$. Провести моделирование для случая $R = 2кОм = 2\rho$ на интервале времени от 180 мкс до 240 мкс.

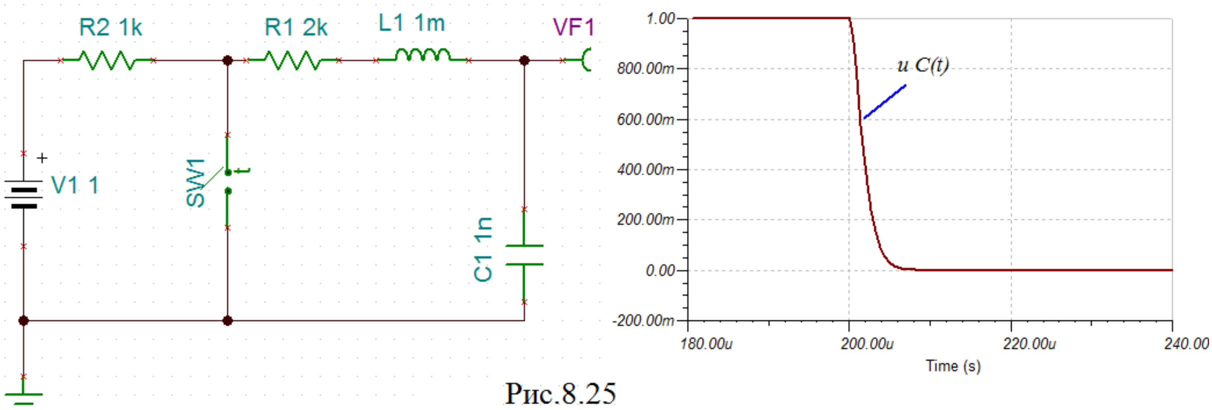


Рис.8.25

График критического переходного процесса аналогичен апериодическому, но характер изменения более быстрый.

3-й случай – *колебательный переходной процесс*

Колебательный переходной процесс возникает в RLC - цепи с малыми потерями. Для этого должны выполняться условия:

$$\delta < \omega_0; \ \frac{R}{2L} < \frac{1}{\sqrt{LC}}; \ R < 2\rho\ . \qquad (8.45)$$

В формуле для корней: $p_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$ подкоренное выражение $\delta^2 - \omega_0^2 < 0$ будет отрицательным. Мы получим два комплексно-сопряженных корня:

$$p_{1,2} = -\delta \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = -\delta \pm j\omega_c, \qquad (8.46)$$

где $\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ - угловая частота свободных колебаний.

Решение для свободного процесса можно найти двумя способами:

1-й способ.

Ищем решение в виде:

$$u_{Cсв}(t) = B_1 e^{p_1 t} + B_2 e^{p_2 t} = B_1 e^{(-\delta + j\omega_c)t} + B_2 e^{(-\delta - j\omega_c)t}. \qquad (8.47)$$

С учетом начальных условий проводим расчет B_1, B_2 с комплексными числами и находим решение $u_{Cсв}(t)$.

2-й способ.

Ищем решение в виде:

$$u_{Cсв}(t) = B e^{-\delta t} \sin(\omega_c t + \psi). \tag{8.48}$$

Здесь B; ψ – неизвестные постоянные интегрирования, которые требуется найти.

Составим систему из двух уравнений для расчета B и ψ.

При $t = 0_+$:

$$u_{Cсв}(0_+) = u_C(0_+) - u_{Cпр}(0_+) = B \sin\psi = E \tag{8.49}$$

Найдем производную:

$$\frac{du_{Cсв}(t)}{dt} = -\delta B e^{-\delta t} \sin(\omega_c t + \psi) + \omega_c B e^{-\delta t} \cos(\omega_c t + \psi) = \frac{i_{Cсв}(t)}{C}.$$

При $t = 0_+$:

$$i_C(0_+) = i_L(0_+) = 0,\ i_{Cпр} = 0. \tag{8.50}$$

Следовательно:

$i_{Cсв}(0_+) = 0$ и

$$-\delta B \sin\psi + \omega_c B \cos\psi = 0. \tag{8.51}$$

Из уравнения (8.49):

$$B = \frac{E}{\sin\psi}. \tag{8.52}$$

Подставим это выражение в (8.51):

$$-\delta E + \omega_c E\, ctg\psi = 0. \tag{8.53}$$

Далее получим:

$$ctg\psi = \frac{\delta}{\omega_c},\ \ tg\psi = \frac{\omega_c}{\delta}.$$

Находим постоянную интегрирования:

$$\psi = arctg \frac{\omega_c}{\delta} \tag{8.54}$$

Выполним преобразования:

$$\boldsymbol{sin}\,\psi=\boldsymbol{sin}\left[arctg\frac{\omega_c}{\delta}\right]=\frac{\dfrac{\omega_c}{\delta}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega_c}{\delta}\right)^2}}=\frac{\omega_c}{\sqrt{\delta^2+\omega_c^2}}=\frac{\omega_c}{\omega_0}. \qquad (8.55)$$

Находим вторую неизвестную постоянную интегрирования:

$$B=\frac{E}{\boldsymbol{sin}\,\psi}=E\frac{\omega_0}{\omega_c}, \qquad (8.56)$$

где:

$\omega_0=\sqrt{\delta^2+\omega_c^2}$ - резонансная частота незатухающих колебаний;

$\omega_{св}=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}$ - частота свободных колебаний.

Полный колебательный переходной процесс получили в виде:

$$u_C\left(t\right)=E\frac{\omega_0}{\omega_c}e^{-\delta t}\,\boldsymbol{sin}\left(\omega_c t+\psi\right), \qquad (8.57)$$

где: $\psi=arctg\dfrac{\omega_c}{\delta}$.

Пример 8.7

В схеме рис.8.26 ключ замыкается в момент $t=200\,мкс$. Провести моделирование для случая $R=500\,Ом<2\rho$ на интервале времени от 180 мкс до 240 мкс.

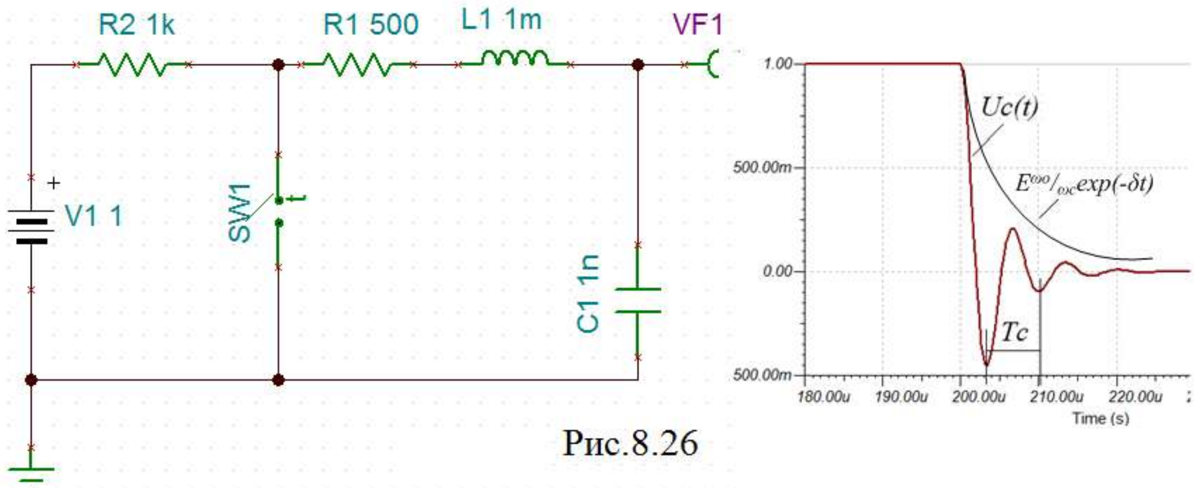


Рис.8.26

Вывод: Свободная составляющая имеет характер затухающих колебаний с частотой ω_c. Амплитуда свободных колебаний убывает по экспоненциальному закону $e^{-\delta t}$.

8.14. Декремент колебаний

Декрементом колебаний называется отношение двух мгновенных значений напряжения или тока в моменты t *и* $t+T_C$*:*

$$\Delta=\frac{u_c(t)}{u_c(t+T_c)}=\frac{E\dfrac{\omega_0}{\omega_c}e^{-\delta t}\,\boldsymbol{sin}(\omega_c t+\psi)}{E\dfrac{\omega_0}{\omega_c}e^{-\delta(t+T_c)}\,\boldsymbol{sin}\left(\omega_c\left(t+\dfrac{2\pi}{\omega_c}\right)+\psi\right)}=e^{\delta T_c}. \quad (8.58)$$

Логарифмическим декрементом колебаний называют логарифм декремента колебаний:

$$\theta=\boldsymbol{ln}\,\Delta=\delta T_C=\frac{R}{2L}\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}}. \quad (8.59)$$

Подставим в (8.59) $\delta=\dfrac{R}{L}$ и преобразуем к виду:

$$\theta=\frac{R\cdot\pi}{\omega_0 L\cdot\sqrt{1-\dfrac{R^2}{4L^2\omega_0^2}}}. \quad (8.60)$$

В RLC- цепях применяют понятие добротности колебательного контура:

$$Q=\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{\rho}{R}. \quad (8.61)$$

Используя добротность, получим еще одно выражение для логарифмического коэффициента затухания:

$$\theta=\frac{1}{Q}\frac{\pi}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{2Q}\right)^2}}. \quad (8.62)$$

8.15. Примеры расчета переходных процессов классическим методом

Пример 8.9

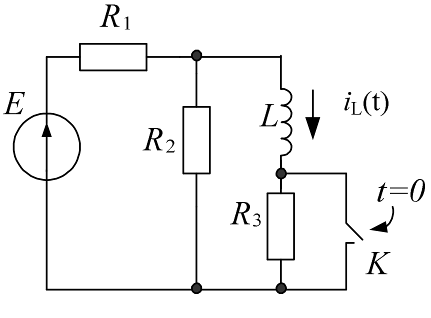


Рис. 8.27

Для цепи рис.8.27 заданы E=6В, R_1 = R_2 = =R_3 = 2 Ом, L = 2 Гн. Найти ток $i_L(t)$ и напряжение $u_L(t)$ после коммутации.

Решение

1. Рассчитаем докоммутационный режим:

$$i_L(0_-)=\frac{E}{R_1+\dfrac{R_2R_3}{R_2+R_3}}\cdot\frac{R_2}{R_2+R_3}=1\,A=i_L(0_+).$$

$i_L(0_+)=1A$– независимое начальное условие.

2. Принуждённый режим:

$$i_{Lnp}=\frac{E}{R_1}=3A$$

3. Составляем характеристическое уравнение и определяем его корни:

$$pL+\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}=0\,;\;pL+1=0,\;p_1=-0{,}5\,c^{-1}$$

4. Свободная составляющая тока:

$$i_{Lсв}(t)=Ae^{p_1t}\;;\,A=i_{Lсв}(0_+)=i_L(0_+)-i_{Lnp}(0_+)=1-3=-2\;A;$$

$$i_{Lсв}(t)=-2e^{-0{,}5t}\;A.$$

5. Полный ток

$$i_L(t)=i_{Lnp}(t)+i_{Lсв}(t)=3-2e^{-0{,}5t}\;A$$

6.Найдём $u_L(t)$:

$$u_L(t)=L\frac{di_L}{dt}=2e^{-0{,}5t}\;B.$$

Графики полного тока и напряжения показаны на рис.8.24.

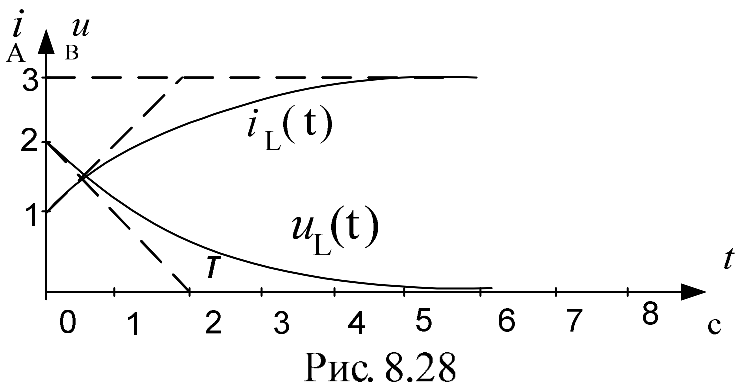


Рис. 8.28

Пример 8.10

Цепь, показанная на рис.8.29, имеет следующие параметры: E = 100В, $R_1 = R_2 = R_3$= 200 кОм, C =1 мкФ.

Найти $u_C(t)$ после коммутации.

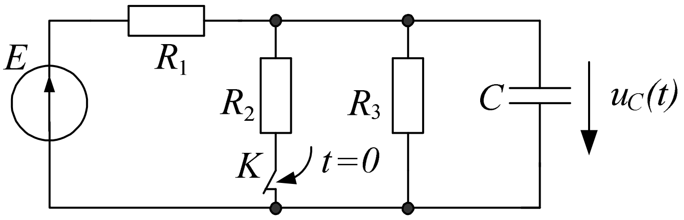


Рис.8.29

Решение

1. Расчет режима до коммутации

Параллельное соединение R_2 и R_3 равно 100 кОм.

Имеем делитель напряжения из R_1 и $R_2||R_3$.

$$u_C(0_-) = E\frac{R_2 \parallel R_3}{R_1 + R_2 \parallel R_3} = 100 \cdot \frac{100 \cdot 10^3}{300 \cdot 10^3} = 33\,B = u_C(0_+)$$

2. Принужденный режим.

$$u_{Cnp} = E\frac{R_3}{R_1 + R_3} = 50\,B.$$

3. Характеристическое уравнение

$$\frac{1}{pC} + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = 0;$$

$$p_1 = -\frac{1}{\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}C} = -\frac{1}{100 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}} = -10\,{}^1\!/\!_c.$$

4. Свободная составляющая напряжения на емкости:

$$u_{Cсв}(t) = Be^{-10t} = \left[u_C(0_+) - u_{Cnp}\right]e^{-10t} = [33 - 50]e^{-10t} = -17e^{-10t}\,B.$$

5. Полный переходной процесс:

$$u_C(t) = u_{Cnp}(t) + u_{Cсв}(t) = 50 - 17e^{-10t}\,B.$$

Пример 8.11

В цепи рис.8.30 найти $u(t)$ после коммутации.

Решение

1. До коммутации $i_L(0\_)=0$.

2. Принужденный режим $i_{Lnp}=50\ A$.

3. Характеристическое уравнение: $pL+2=0$, $p_1=-1\ {}^1\!/_c$.

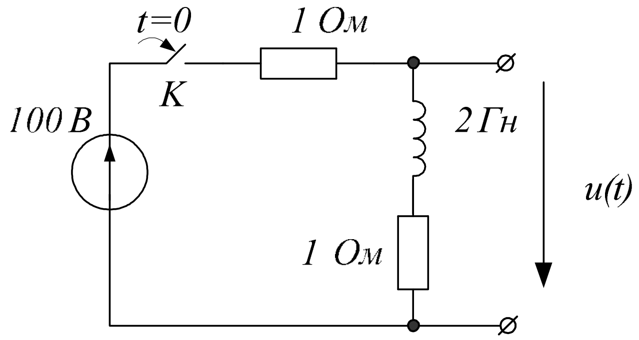


Рис.8.30

4. Свободный ток: $i_{Lcв}(t)=\left[i_L(0_+)\text{-}i_{Lnp}\right]e^{-t}=-50e^{-t}\ A$.

5. Полный ток: $i_L(t)=i_{Lnp}+i_{Lcв}(t)=50-50e^{-t}\ A$.

6. Напряжение на выходе:

$$u(t)=u_R(t)+u_L(t)=R\left(50-50e^{-t}\right)+L\frac{di_L}{dt}=$$

$$=50-50e^{-t}-2[-1]\cdot 50e^{-t}=50+50e^{-t}\ B.$$

Ответ: $u(t)=50+50e^{-t}\ B$.

Пример 8.12

Заданы параметры цепи рис.8.31: $L=\frac{4}{3}\ Гн$, $C=\frac{1}{16}\ Ф$, $R_1=R_2=2\ Ом$, $E=12\ В$. Определить напряжение $u_C(t)$ после коммутации.

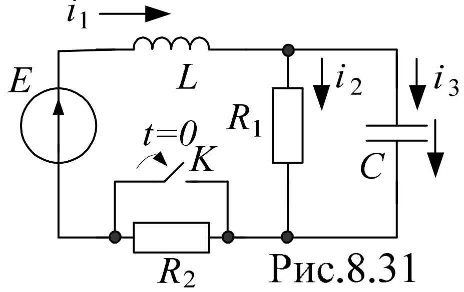


Рис.8.31

Р е ш е н и е

1. Расчет режима до коммутации:

$u_C\left(0_-\right)=u_C\left(0_+\right)=6\,B$, $i_L\left(0_-\right)=i_L\left(0_+\right)=3\,A$.

2. Принужденный режим:

$u_{Cnp}=12\,B$, $i_{Lnp}=6\,A$.

3. Характеристическое уравнение:

$$\underline{Z}(j\omega)=j\omega L+\frac{R(\frac{1}{j\omega C})}{R+\frac{1}{j\omega C}}=0;$$

Заменяем $j\omega$ на p:

$$Z(p)=pL+\frac{R(\frac{1}{pC})}{R+\frac{1}{pC}}=pL+\frac{R}{RCp+1}=0.$$

Получим уравнение:

$$p^2RLC+pL+R=0,$$

$$p^2\cdot 2\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{16}+p\cdot\frac{4}{3}+2=0\ ,\ p^2+8p+12=0.$$

Корни: $p_1=-2\,{}^1\!/_c$, $p_2=-6\,{}^1\!/_c$.

Свободное напряжение: $u_{Cсв}(t)=A_1e^{-2t}+A_2e^{-6t}$.

4. Расчет постоянных интегрирования:

$u_{Cсв}(0_+)=A_1+A_2=u_C\left(0_+\right)-u_{Cnp}\left(0_+\right)=6-12=-6\,B$ (1).

$$\left.\frac{du_{Cсв}}{dt}\right|_{t=0_+}=p_1A_1+p_2A_2=\frac{i_{Cсв}\left(0_+\right)}{C}.$$

$i_{Cсв}\left(0_+\right)=i_C\left(0_+\right)-i_{Cnp}\left(0_+\right)=i_C\left(0_+\right)$.

Расчет $i_C\left(0_+\right)$ в послекоммутационной схеме ($t=0_+$) (рис.8.32).

В узле a напряжение равно $U_C(0_+)=6B$.

Ток $i_2(0_+)=\dfrac{U_C(0_+)}{2\,Ом}=3\,A$. По первому закону Кирхгофа получим $i_C(0_+)=0$.

Получим систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = -6 \\ -2A_1 - 6A_2 = 0 \end{cases}.$$

Решение системы: $A_1 = -9B$, $A_2 = 3$.

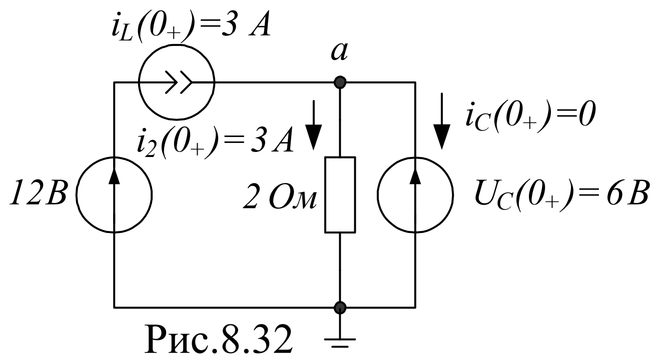


Рис.8.32

Ответ: $u_C(t)$=12-9$e^{-2t}+3e^{-6t}$.

Глава 9. ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

В операторном методе для расчета переходных процессов используют преобразование Лапласа. При этом дифференциальные и интегральные операции над функциями времени (оригиналами) заменяют алгебраическими операциями над их интегральными преобразованиями (изображениями).

Этапы расчета операторным методом:

1. Находим независимые начальные условия $i_L(0)$, $u_C(0)$.

2. Находим изображения источников сигнала и пассивных элементов и составляем операторную схему замещения цепи.

3. В операторной схеме замещения рассчитываем изображения токов и напряжений.

4. Переходим от изображений к оригиналам (функциям времени) токов и напряжений.

9.1. Прямое преобразование Лапласа

Пусть функция времени $f(t)$ удовлетворяет условиям:

1. $f(t) = 0$ при $t < 0$; (9.1)

2. При $t > 0$ $|f(t)| < M\,e^{c_0 t}$, (9.2)

где $M > 0; c_0 > 0$ - любые действительные числа.

Такую функцию $f\left(t\right)$ называют функцией ограниченного роста. На рис.9.1 показано, что $f\left(t\right)$ должна быть ниже экспоненты $M\,e^{c_0 t}$, в которой M и c_0 могут быть очень большие.

Все реальные функции токов и напряжений являются функциями ограниченного роста.

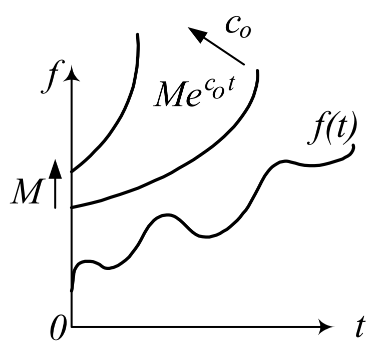


Рис.9.1

Если $f\left(t\right)$ удовлетворяет условиям (9.1) и (9.2), то интеграл $\int\limits_0^\infty f\left(t\right)e^{-pt}dt = F\left(p\right)$ сходится абсолютно и называется *прямое преобразование Лапласа*. Здесь оператор Лапласа (комплексная переменная) $p = c + j\omega$, причем $\boldsymbol{Re}\,p = c > c_0$.

Прямое преобразование Лапласа будем обозначать соответствием:

$$f\left(t\right) \doteqdot F\left(p\right) \qquad (9.3)$$

Оригинал *Изображение*

9.2. Изображения простейших функций

$1\left(t\right)$ - единичная функция (функция включения) (рис.9.2).

Единичная возникает в момент $t = 0$ и сохраняет значение, равное 1, до бесконечности.

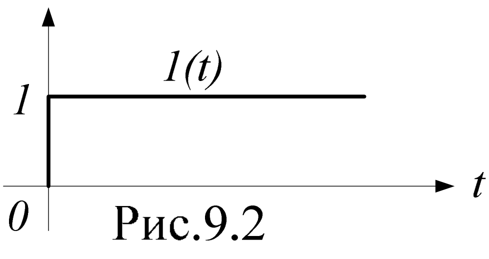


Рис.9.2

Найдем изображение единичной функции:

$$F(p) = \int\limits_0^\infty 1\cdot e^{-pt}dt = -\frac{1}{p}e^{-pt}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{p}$$

Получили: $1\left(t\right) \doteqdot \dfrac{1}{p}$;

$e^{-\alpha t}$ - экспонента (рис.9.3), равная нулю при $t < 0$.

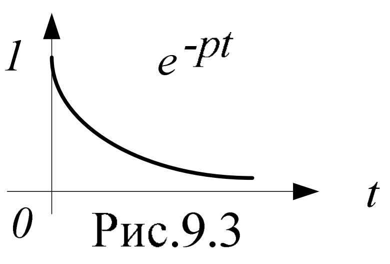


Рис.9.3

$$F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-\alpha t}e^{-pt}dt =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{-(p+\alpha)t}dt = \frac{1}{p+\alpha}.$$

Получили: $e^{-\alpha t} \doteqdot \dfrac{1}{p+\alpha}$.

Для оператора поворота получим:

$$e^{-j\omega t} \doteqdot \frac{1}{p-j\omega}.$$

9.3. Основные свойства преобразования Лапласа

1. Линейность:

$$f_1(t)+f_2(t) \doteqdot F_1(p)+F_2(p). \tag{9.4}$$

2. Свойство коммутативности по отношению к операциям действительной (Re) и мнимой (Jm) части.

Если $f(t) \doteqdot F(p)$, причем $f(t)=\boldsymbol{Re}\, f(t)+jJmf(t)$, то:

$$\boldsymbol{Re}\, f(t) \doteqdot \boldsymbol{Re}\, F(p) \text{ и } Jmf(t) \doteqdot JmF(p)\,. \tag{9.5}$$

Пример 9.1

$$e^{-j\omega t}=\boldsymbol{cos}\,\omega t+j\,\boldsymbol{sin}\,\omega t \doteqdot \frac{1}{p-j\omega}=\frac{p+j\omega}{p^2+\omega^2}. \tag{9.6}$$

Используем свойство (2) и получаем:

$$\boldsymbol{cos}\,\omega t \doteqdot \frac{p}{p^2+\omega^2},\ \boldsymbol{sin}\,\omega t \doteqdot \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

3. Изображение производной

Если $f(t) \doteqdot F(p)$, то производная имеет изображение:

$$f'(t) \doteqdot pF(p)-f(0). \tag{9.7}$$

Здесь: $f(0)=f(0_+)$ - значение $f(t)$ в момент $t=0_+$.

p- оператор дифференцирования

4. Изображение интеграла

Если $f(t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}} F(p)$, то интеграл $\Psi(t) = \int\limits_0^t f(t)\,dt \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}} \dfrac{F(p)}{p}$. (9.8)

$\dfrac{1}{p}$ - *оператор интегрирования.*

5. Теорема запаздывания

Пусть исходная функция:

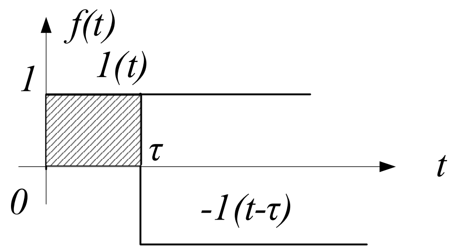
$$f(t) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}} F(p).$$

Изображение запаздывающей функции:

$$f(t - t_0) \overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}} e^{-pt_0} F(p). \qquad (9.9)$$

Пример 9.2

Найти изображение импульса длительностью τ.



Импульс равен разности двух функций включения:

$$f(t) = 1(t) - 1(t - \tau).$$

Изображение импульса находим как разность изображений этих двух функций:

$$F_1(p) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-p\tau} =$$

$$= \frac{1}{p}\left(1 - e^{-p\tau}\right). \qquad (9.10)$$

9.4. Расчет переходного процесса при нулевых начальных условиях

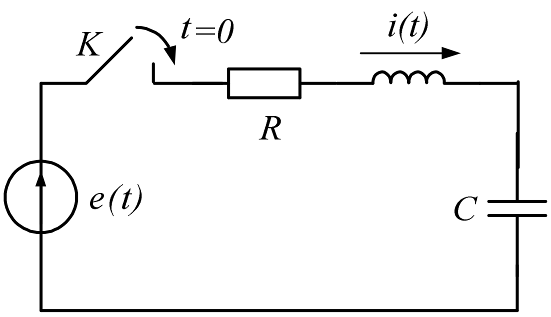


Рис.9.4

До коммутации $(t = 0\_)$ в цепи рис.9.4:

$$i_L(0\_) = 0,\ u_C(0\_).$$

Найти ток $i(t)$ после коммутации.

После коммутации в цепи выполняется дифференциальное уравнение:

$$e(t) = Ri(t) + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t idt. \qquad (9.11)$$

Преобразуем по Лапласу и получим *операторное уравнение*:

$$E(p) = RI(p) + pLI(p) + \frac{1}{pC}I(p). \qquad (9.12)$$

В операторном уравнении:

R - активное сопротивление;

pL - индуктивное сопротивление в операторной форме;

$\frac{1}{pC}$ - емкостное сопротивление в операторной форме.

Операторная схема замещения при нулевых начальных условиях

Уравнению (9.12) соответствует операторная схема замещения (рис.9.5).

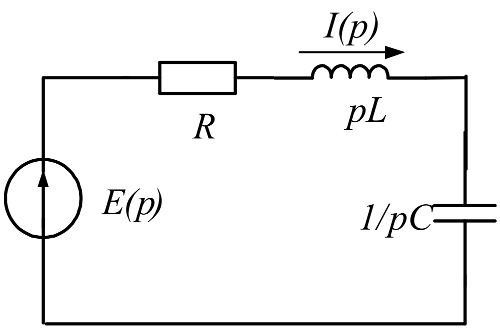


Рис.9.5

Находим *операторный ток*:

$$I(p) = \frac{E(p)}{R + pL + \frac{1}{pC}} = \frac{E(p)}{Z(p)} \qquad (9.13)$$

В этом выражении:

$$Z(p) = R + pL + \frac{1}{pC} \qquad (9.14)$$

- *операторное сопротивление цепи.*

П р а в и л о : *Операторное сопротивление* $Z(p)$ *можно получить из комплексного* $Z(j\omega) = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}$ *заменой* $j\omega \to p$.

Операторное сопротивление и операторная схема замещения имеют обобщенный характер и позволяют решать задачи при любом воздействии.

Величину обратную операторному сопротивлению называют *операторная проводимость*:

$$Y(p) = \frac{1}{Z(p)}. \qquad (9.15)$$

Зная изображение тока, можно найти оригинал: $i(t) \risingdotseq I(p)$. Ниже мы покажем, как это делают в электротехнике.

9.5. Операторная схема замещения участка цепи при ненулевых начальных условиях

На рис.9.6 показан участок цепи, в котором проходит ток, имеется источник напряжения $e(t)$. В момент $t = 0$ происходит замыкание ключа в одной из ветвей. Надо найти ток в цепи после коммутации.

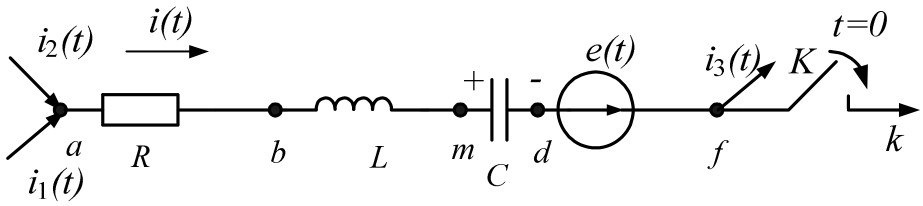


Рис.9.6

До коммутации при $t = 0\_$ имеем:

$$i_L(0_-) = i_L(0_+) = i_L(0),\ u_C(0_-) = u_C(0_+) = U_C(0).$$

Для $t > 0$ (послекоммутационный режим) запишем уравнение:

$$u_{af} = -e(t) + iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt + U_C(0) \qquad (9.16)$$

Преобразуем уравнение (9.16) по Лапласу:

$$U_{af}(p) = -E(p) + RI(p) + pLI(p) - Li_L(0) + \frac{1}{pC}I(p) + \frac{U_C(0)}{p} \qquad (9.17)$$

Находим изображение тока:

$$I(p) = \frac{U_{af}(p) + E(p) + Li_L(0) - \dfrac{U_C(0)}{p}}{R + pL + \dfrac{1}{pC}}. \qquad (9.18)$$

П о л у ч и л и :

Закон Ома в операторной форме для участка цепи, содержащего ЭДС и начальные условия.

Здесь: $Li_L(0)$ – *внутренний источник ЭДС*, обусловленный начальным запасом магнитной энергии в индуктивности при $i_L(0) \neq 0$.

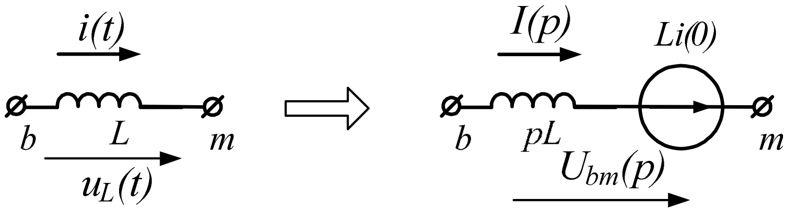


Рис.9.7

Индуктивность L с начальным током (рис.9.7) в операторной схеме надо заменить операторным сопротивлением pL и внутренним источником ЭДС $Li_L(0)$, *направленным согласно току* $I(p)$.

Переход к оригиналу напряжения на индуктивности надо делать с учетом внутреннего источника ЭДС:

$$u_L(t) \doteqdot U_{bm}(p) = pLI(p) - Li_L(0) \qquad (9.19).$$

В операторном уравнении $\dfrac{U_C(0)}{p}$ - *внутренний источник* ЭДС, обусловленный начальным запасом электрической энергии в конденсаторе при $U_C(0) \neq 0$.

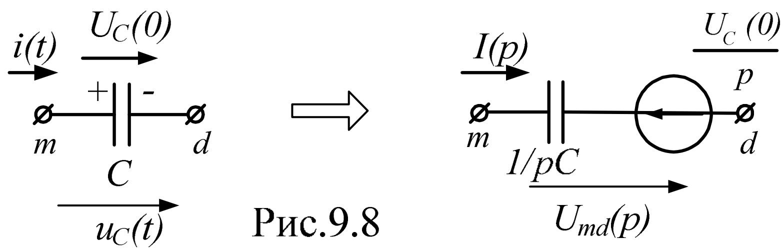


Рис.9.8

Емкость C с начальным напряжением $U_C(0)$ (рис.9.8) в операторный схеме замещения надо заменить операторным сопротивлением емкости $\dfrac{1}{pC}$ и внутренним источником ЭДС $\dfrac{U_C(0)}{p}$, *направленным встречно току.*

Переход к оригиналу напряжения на емкости надо делать с учетом внутреннего источника ЭДС:

$$u_{md}(t) \doteqdot U_{md}(p) = \frac{1}{pC} I(p) + \frac{U_C(0)}{p}. \qquad (9.20)$$

$$u_C(t) = u_{md}(t) \doteqdot U_{md}(p) = \frac{1}{pC} I(p) + \frac{U_C(0)}{p}.$$

9.6. Законы Кирхгофа в операторной форме

Первый закон Кирхгофа в операторной форме

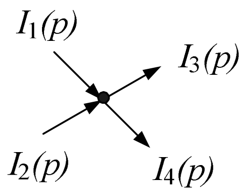


Рис.9.9

Сумма операторных токов, сходящихся в узле равна нулю:

$$I_3(p)+I_4(p)-I_1(p)-I_2(p)=0. \quad (9.21)$$

Второй закон Кирхгофа в операторной форме

В исходной схеме рис.9.10а в момент $t=0$ есть ненулевые начальные условия: $i_1(0)\neq 0,$, $U_C(0)\neq 0$. Составим по второму закону Кирхгофа уравнение для мгновенных значений:

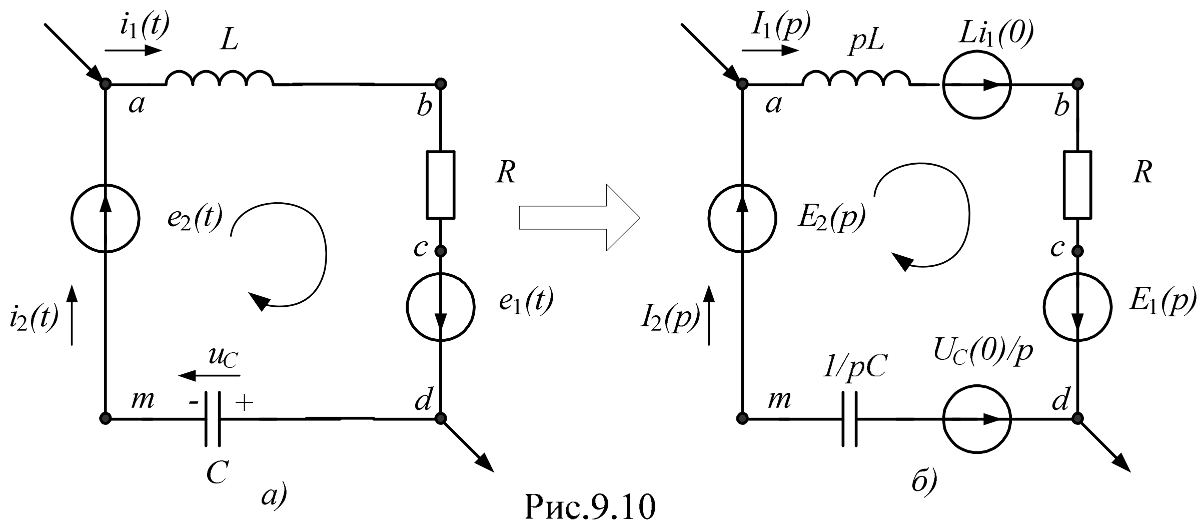


Рис.9.10

$$L\frac{di_1}{dt}+Ri_1(t)+\frac{1}{C}\int_0^t i_2dt+U_C(0)=e_1(t)+e_2(t). \qquad (9.22)$$

В операторной форме для схемы рис.9.10б это уравнение имеет вид:

$$pLI_1(p)+RI_1(p)+\frac{1}{pC}I_2(p)=E_1(p)+E_2(p)+Li_1(0)-\frac{U_C(0)}{p}, \quad (9.23)$$

где $Li_1(0)$, $\dfrac{U_C(0)}{p}$ - внутренние источники ЭДС.

Формулировка

В любом контуре операторной схемы замещения алгебраическая сумма произведений операторных токов на операторные сопротивления равна алгебраической сумме изображений реальных источников ЭДС и внутренних источников ЭДС.

В ы в о д

Законы Ома и Кирхгофа в операторной схеме замещения выполняются. Следовательно, расчеты можно проводить любым методом расчета цепей постоянного и гармонического тока.

Пример 9.3

Найти ток в индуктивности схемы рис.9.11а.

Р е ш е н и е

1. Расчет режима до коммутации: $i_L(0) = 1\,A$.

2. Находим изображения источника сигнала, внутренние ЭДС и операторные сопротивления цепи:

$$e(t) = 2\,B \risingdotseq E(p) = \frac{2}{p} B \cdot c,\; Li_L(0) = 1\,ГнА = 1B \cdot c,\; pL = p \cdot 1\;\; Ом.$$

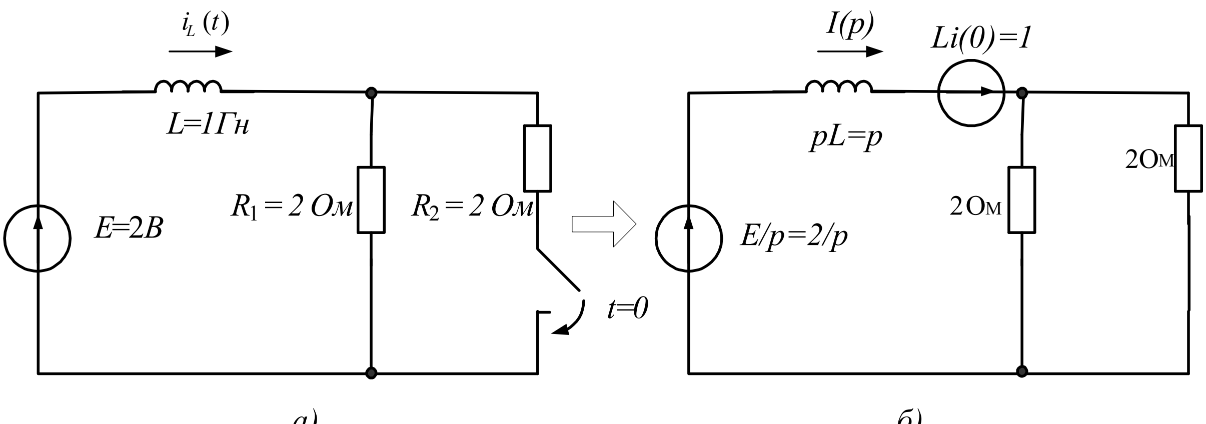


Рис.9.11

Составляем операторную схему замещения рис.9.11б.

3. Находим изображение тока:

$$I(p) = \frac{E(p) + Li_L(0)}{pL + \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}} = \frac{\dfrac{2}{p} + 1}{p + 1} = \frac{2 + p}{p(p+1)}. \tag{9.24}$$

4. Переходим от изображения к оригиналу тока.

9.7. Способы перехода от изображения к оригиналу

Переход от изображения к оригиналу можно выполнить несколькими методами:

1. Использовать обратное преобразование Лапласа и вычислять интеграл:

$$i(t) = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{c-j\infty}^{c+j\infty} I(p) e^{pt} dp. \tag{9.25}$$

2. По таблицам преобразования Лапласа.

3. *По теореме разложения* при простых корнях. Это способ мы рекомендуем применять в электротехнических расчетах.

Найдем оригинал от операторного тока (9.24):

$$I(p) = \frac{2+p}{p(p+1)} = \frac{A(p)}{B(p)}.$$

Дробь $\frac{A(p)}{B(p)}$ должна быть правильной: степень числителя меньше степени знаменателя.

1. Находим корни знаменателя: $B(p) = 0, p(p+1) = 0,$

корни: $p_1 = 0, p_2 = -1\,\frac{1}{c}$.

2. Находим производную знаменателя: $B'(p) = 2p + 1$.

3. Находим значения:

$A(p_1) = 2,\ A(p_2) = 1,\ B'(p_1) = 1,\ B'(p_2) = -1.$

4. *Находим оригинал тока по формуле разложения*:

$$i(t) = \frac{A(p_1)}{B'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{A(p_2)}{B'(p_2)} e^{p_2 t} = 2e^{0t} - 1e^{-t} = 2 - e^{-t}.$$

Примечание.

Если один из корней равен нулю, оригинал содержит постоянную составляющую.

9.8. Особенности расчета операторным методом при гармонической ЭДС

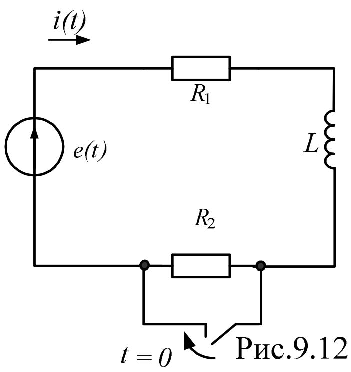


Рис.9.12

В цепи рис.9.12 действует гармоническая ЭДС $e(t) = E_m \sin \omega t$. Найти ток $i(t)$.

Решение

1. Расчет режима до коммутации: $\underline{I}_m = \frac{\underline{E}_m}{R_1 + R_2 + j\omega L} = I_m e^{-j\varphi}$.

Мгновенное значение: $i_L\left(t\right)=I_m\ \boldsymbol{sin}\left(\omega t-\varphi\right)$.

При $t=0_+$ начальное условие: $i_L\left(0_+\right)=I_m\,\boldsymbol{sin}\left(-\varphi\right)$.

С п о с о б ы р е ш е н и я :

а) *Расчет для действительной формы ЭДС*:

$$e(t)=E_m\,\boldsymbol{sin}\,\omega t \doteq E_m\frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

Находим изображение тока: $I\left(p\right)=\dfrac{E_m\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}+Li_L\left(0\right)}{R_1+pL}$.

В ы в о д : *вычисления оригинала сложные !*

б) *Расчет для комплексной формы ЭДС:*

Заменим $e\left(t\right)$ на $\tilde{E}\left(t\right)=E_m e^{j\omega t}\doteq\dfrac{E_m}{p-j\omega}$.

Комплексная функция времени для тока:

$\tilde{i}\left(t\right)\doteq\dfrac{\dfrac{E_m}{p-j\omega}+jLi_L\left(0\right)}{R_1+pL}$ (для $e(t)=E_m\,\boldsymbol{sin}\,\omega t$ внутренний источник ЭДС надо взять мнимым).

Находим $i\left(t\right)=Jm\,\tilde{i}\left(t\right)$.

В ы в о д : *расчет проще, но требует использования комплексных чисел.*

в) *Применим метод отделения принужденного режима от свободного.*

2. Выполним расчет принужденного режима символическим методом:

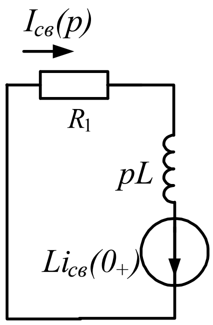


Рис.9.13

$$\underline{I}_{mпр}=\frac{E_m}{R_1+j\omega L}=I_{mпр}\,e^{j\varphi_2},$$

$$i_{L\,пр}\left(t\right)=I_{m\,пр}\,\boldsymbol{sin}\left(\omega t+\varphi_2\right),$$

$$i_{L\,пр}\left(0_+\right)=I_{m\,пр}\,\boldsymbol{sin}\,\varphi_2.$$

3. Определяем начальные условия для свободных составляющих.

$$i_{Lсв}\left(0_+\right)=i_L\left(0_+\right)-i_{L\,пр}\left(0_+\right).$$

4. Составляем операторную схему замещения для свободных составляющих (рис.9.13).

Находим свободный ток:

$$I_{св}(p) = \frac{Li_{Lсв}(0)}{R_1 + pL} \doteqdot i_{Lсв}(0_+)e^{-\frac{R_1}{L}t}.$$

5. Находим полный ток:

$$i_L(t) = i_{L\,пр}(t) + i_{L\,св}(t) = I_{m\,пр}\,\boldsymbol{sin}(\omega t + \varphi_2) + i_{Lсв}(0_+)e^{-\frac{R_1}{L}t}.$$

9.9. Примеры расчета переходных процессов операторным методом

Пример 9.4

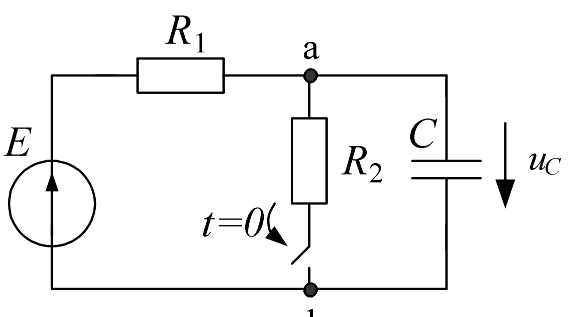


Рис.9.14

В цепи (рис.9.14) заданы параметры: E =100 В, R_1 = R_2 = 100 кОм, C = 2 мкФ.

Найти u_C(t) операторным методом.

Решение.

1. Находим независимое начальное условие $u_C(0_+) = 100\,B$.

2. Составляем операторную схему замещения (рис.9.15):

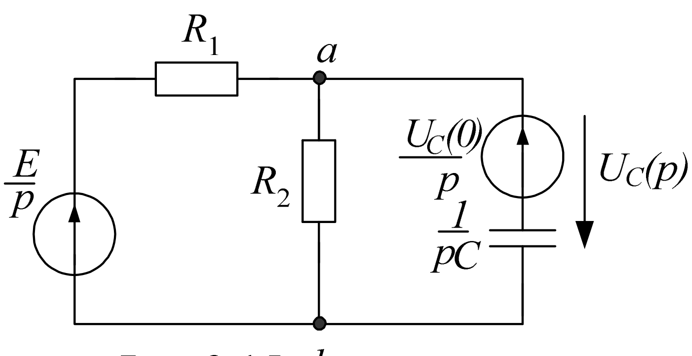


Рис.9.15 *b*

3. По операторной схеме замещения методом двух узлов находим изображение U_C(p):

$$U_C(p)=U_{ab}(p)=\frac{\frac{E}{p}\cdot\frac{1}{R_1}+\frac{E}{p}\cdot pC}{\frac{2}{R}+pC}=\frac{E(1+pCR)}{p(2+pCR)}=\frac{E(1+p\cdot 0,2)}{p(2+p\cdot 0,2)}=\frac{A(p)}{B(p)}$$

4. Находим оригинал $U_C(t) = U_{ab}(t)$ по теореме разложения.
Корни знаменателя находим из уравнения:
$B(p)=p(2 + pCR) = 0$, откуда:

$$p_1=0,\ p_2=-\frac{2}{RC}=-\frac{2}{0,2}=-10\ c^{-1}.$$

Вычисляем:

$$B'(p)=2+2p\cdot 0,2,\ A(p_1)=E,\ \ A(p_2)=-E,$$

$$B'(p_1)=2,\ \ B'(p_2)=-2$$

$$U_C(t)=U_{ab}(t)=\frac{A(p_1)}{B'(p)_{p=p_1}}e^{p_1t}+\frac{A(p_2)}{B'(p)_{p=p_2}}e^{p_2t}=$$

$$=50+50e^{-10t}B$$

Пример 9.5

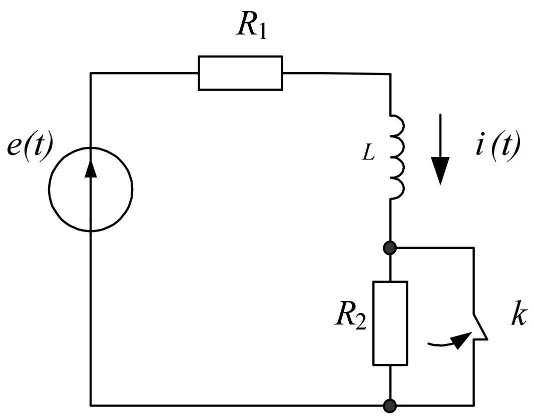


Рис.9.16

В цепи (рис.9.16) с параметрами $L = 0{,}1$ Гн, $R_1 = R_2 = 100$ Ом действует источником гармонической ЭДС $e(t)=141\sin 10^3 t$ В. В момент $t = 0$ ключ k размыкается. Найти ток после коммутации операторным методом, используя отделение свободного режима от принужденного.

Решение

1. Расчет режима до коммутации:

$$\dot{I}_m=\frac{\dot{E}_m}{R_1+j\omega L}=\frac{141}{100+j100}=1e^{-j45^\circ}\text{ А},$$

$$i(t)=1\sin(10^3t-45^\circ);\quad i(0_-)=i(0_+)=\sin(-45^\circ)=-0{,}707\ \text{А}.$$

2. Рассчитаем принужденный режим.

После коммутации активное сопротивление цепи станет равным 200 Ом:

$$\dot{I}_{mпр} = \frac{\dot{E}_m}{200 + j100} = \frac{141}{100\sqrt{5}} e^{-j26^\circ 30'} A,$$

$$i_{пр}(t) = 0{,}63 \sin(10^3 t - 26^\circ 30') A.$$

Находим принужденный ток в момент $t = 0_+$:

$$i_{пр}(0_+) = 0{,}63 \sin(-26^\circ 30') = -0{,}281 \ A.$$

3. Находим независимые начальные условия для свободной составляющей тока в индуктивности:

$$i_{Lсв}(0_+) = i_{св}(0_+) = i(0_+) - i_{пр}(0_+) =$$
$$= -0{,}707 + 0{,}281 = -0{,}426 A$$

4. Составляем операторную схему замещения для свободных составляющих (рис.9.17). Находим операторный свободный ток:

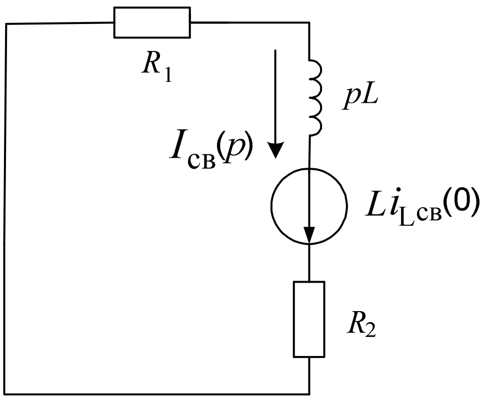


Рис.9.17

$$I_{св}(p) = \frac{Li_{св}(0)}{R_1 + R_2 + pL} = \frac{-0{,}426 \cdot 0{,}1}{200 + 0{,}1p}.$$

По теореме разложение находим оригинал свободного тока:

$$i_{св}(t) = -0{,}426e^{-2000t} A.$$

5. Находим полный ток:

$$i(t) = i_{пр}(t) + i_{св}(t) =$$
$$= 0{,}63 \sin(10^3 t - 26^\circ 30') - 0{,}426e^{-2000} A$$

Пример 9.6

Решить задачу из примера 8.12 (рис.8.27) операторным методом расчета.

1. Расчет режима до коммутации:

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = 6 B, \quad i_L(0_-) = i_L(0_+) = 3 A.$$

2. Составляем операторную схему замещения цепи (рис.9.18):

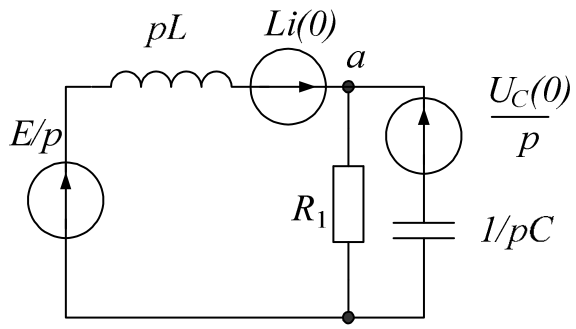


Рис.9.18

3. По методу двух узлов находим $U_{ab}(p)$:

$$U_{ab}(p)=\frac{\dfrac{\dfrac{E}{p}+Li(0)}{pL}+\dfrac{u_C(0)}{p\cdot\dfrac{1}{pC}}}{\dfrac{1}{pL}+\dfrac{1}{R_1}+pC}=$$

$$=\frac{\dfrac{\dfrac{12}{p}+\dfrac{4}{3}\cdot 3}{\dfrac{4}{3}p}+6\cdot\dfrac{1}{16}}{\dfrac{1}{p\dfrac{4}{3}}+\dfrac{1}{2}+p\dfrac{1}{16}}=\frac{6p^2+48p+144}{p\left(p^2+8p+12\right)}=\frac{A(p)}{B(p)}.$$

4. Находим оригинал напряжения по теореме разложения.
Для этого:
Находим корни знаменателя:

$$B(p)=0,\ p_1=0,p_2=-2\,{}^1\!/_c,p_3=-6\,{}^1\!/_c.$$

Находим производную знаменателя:

$$B'(p)=3p^2+16p+12.$$

Вычисляем:

$$\frac{A(p_1)}{B'(p_1)}=\frac{144}{12}=12\,B.$$

$$\frac{A(p_2)}{B'(p_2)}=\frac{6\cdot(-2)^2+48\cdot(-2)+144}{3\cdot(-2)^2+16\cdot(-2)+12}=-9\,B.$$

$$\frac{A(p_3)}{B'(p_3)}=\frac{6\cdot(-6)^2+48\cdot(-6)+144}{3\cdot(-6)^2+16\cdot(-6)+12}=3\,B.$$

Получим ответ:

$$u_C(t)=\frac{A(p_1)}{B'(p_1)}e^{p_1t}+\frac{A(p_2)}{B'(p_2)}e^{p_2t}+\frac{A(p_3)}{B'(p_3)}e^{p_3t}=$$

$$=12-9e^{-2t}+3e^{-6t}.$$

Ответ совпадает с расчетом классическим методом.

Глава 10. ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛОВ ДЮАМЕЛЯ К РАСЧЕТУ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

10.1. Принцип наложения элементарных воздействий

Интегралы Дюамеля применяется для анализа воздействия на цепь напряжения произвольной формы. Сложная по форме функция $u_{вх}(t)$ действует на входе линейной цепи (рис.10.1). Требуется найти реакцию на выходе.

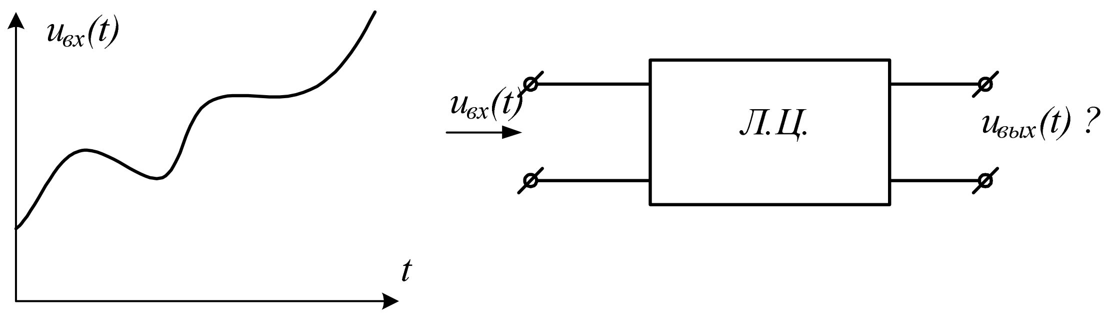


Рис.10.1

В линейной цепи действует *принцип наложения*: *реакция цепи на сумму входных воздействий равна сумме реакций на каждое воздействие в отдельности.*

$$u_{вых}(t)=L\left\{\sum_{i=1}^{n}u_{вхi}(t)\right\}=\sum_{i=1}^{n}L\left\{u_{вхi}(t)\right\}. \qquad (10.1)$$

Здесь L- любое линейное преобразование.

В интеграле Дюамеля сложное воздействие представляется в виде суммы простейших элементарных воздействий. Такими элементарными воздействиями служат:

1. $1(t)$ - *единичная функция.*

2. $\delta(t)$ -*импульсная функция.*

10.2. Единичная функция, переходная характеристика цепи

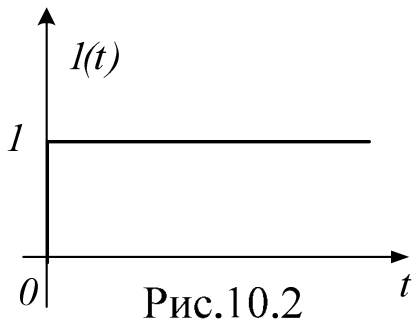


Рис.10.2

Единичная функция (рис.10.2) удовлетворяет следующим условиям:

$$1(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\geq 0\end{cases}. \qquad (10.2)$$

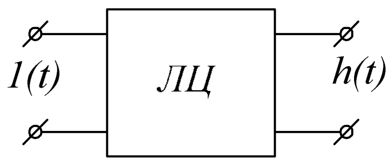


Рис.10.3

Если $1(t)$ воздействует на линейную цепь (рис.10.3) , на выходе цепи возникает реакция $h(t)$.

О п р е д е л е н и е . *Переходной характеристикой цепи* $h(t)$ *называют реакцию на выходе цепи при действии на входе единичной функции.*

Для определения $h(t)$ рассчитывают переходной процесс при воздействии на вход единичной функции (рис.10.4).

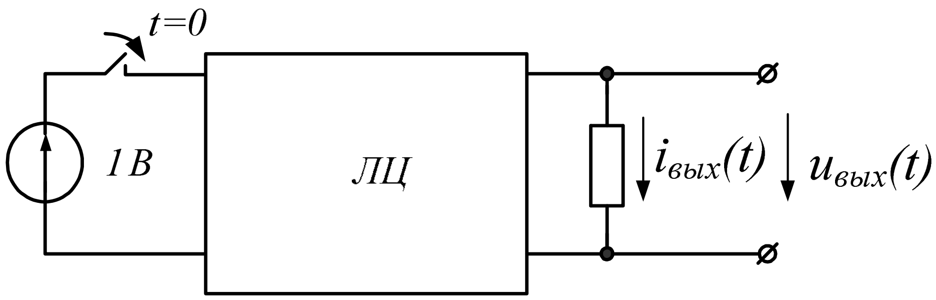


Рис.10.4

На выходе цепи можно определить ток $i_{вых}(t)$ и $u_{вых}(t)$.

Переходная проводимость цепи численно равна току на выходе при действии на входе единичной функции:

$$h(t)=g(t)=i_{вых}(t). \qquad (10.3)$$

Переходная функция по напряжению численно равна напряжению на выходе при действии на входе единичной функции:

$$h(t)=k(t)=u_{вых}(t). \qquad (10.4)$$

Пример 10.1

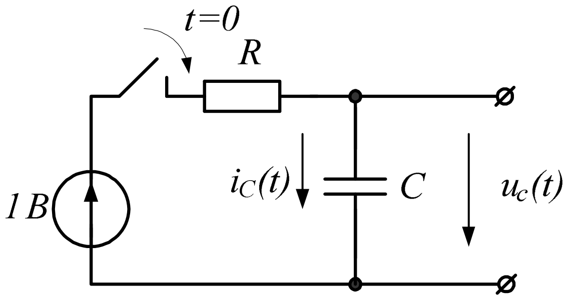


Рис.10.5

После замыкания ключа в схеме рис.10.5 найдем классическим методом напряжение на выходе:

$$u_C(t)=1\left(1-e^{-\frac{t}{\tau}}\right)=h(t)=k(t).$$

Найдем ток в емкости:

$$i_C(t)=\frac{1}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}=h(t)=g(t).$$

Определили переходную функцию по напряжению и переходную проводимость цепи.

Зная $h(t)$ и $g(t)$, можно рассчитать реакцию на любое сложное воздействие.

10.3. Интеграл Дюамеля первого вида

На рис.10.6 показана входная функция $u_{вх}(\tau)$, которая воздействует на линейную цепь с переходной характеристикой $h(t)$.

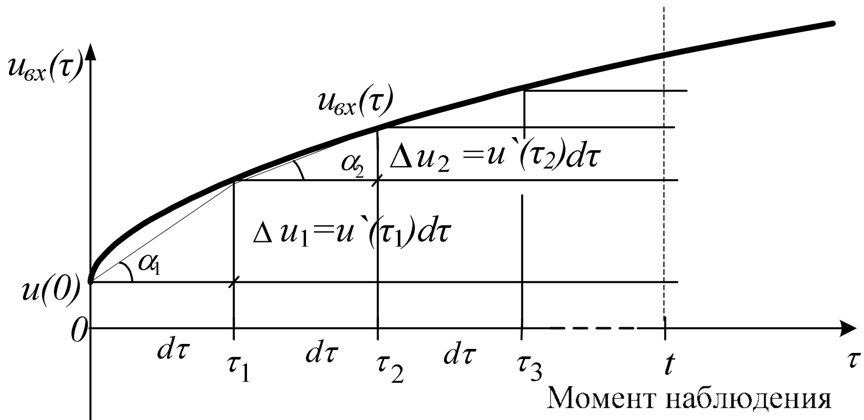


Рис.10.6

Заменяем $u_{вх}(\tau)$ ступенчатой функцией. Для касательных тангенсы углов составят: $tg\alpha_1 = u'_{вх}(\tau_1)$, $tg\alpha_2 = u'_{вх}(\tau_2)$.

Определим величину ступенек. Например, вторая ступенька равна:

$$\Delta u_2 = tg\alpha_2 d\tau = u'_{вх}(\tau_2)d\tau \qquad (10.5)$$

Каждая ступенька входного напряжения вызывает элементарную реакцию на выходе цепи (рис.10.7). Так, на ступеньку в момент τ_i *реакция на выходе* в момент t будет равна:

$$u_{выхi}(t) = \Delta u(\tau_i)\cdot h(t-\tau_i)\ . \tag{10.6}$$

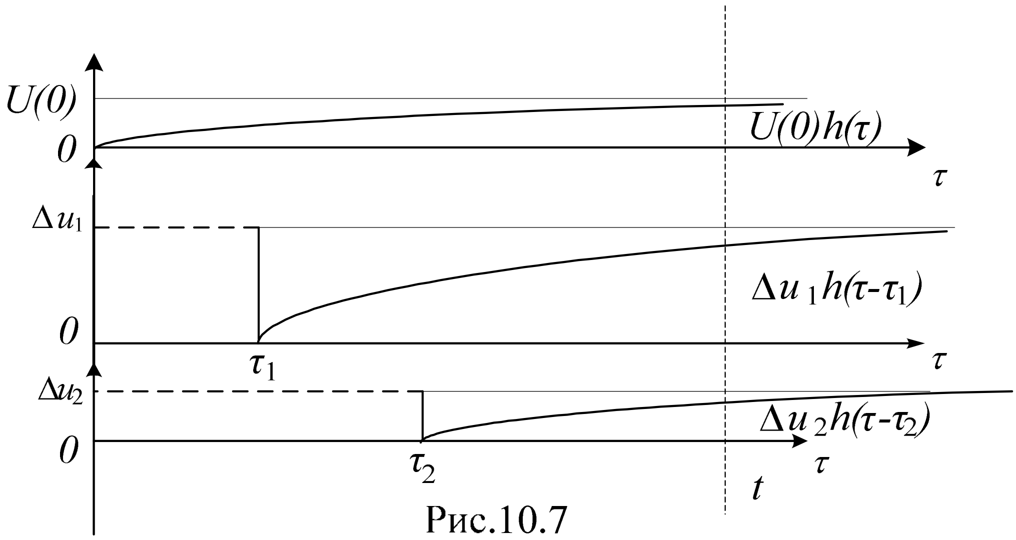


Рис.10.7

Реакция на выходе в момент наблюдения t равна сумме значений всех реакций в момент t:

$$u_{вых}(t) = U(0)h(t) + \sum_{i=1}^{n} \Delta u_i h(t-\tau_i) =$$

$$= U(0)h(t) + \sum_{i=1}^{n} u'(\tau_i)h(t-\tau_i)d\tau_i \tag{10.7}$$

Пусть теперь число ступенек увеличивается и $d\tau \to 0$. *Переходим к интегралу Дюамеля первого вида:*

$$u_{вых}(t) = u(0)h(t) + \int_0^t u'(\tau)h(t-\tau)d\tau\,. \tag{10.8}$$

О п р е д е л е н и е :

Интеграл Дюамеля первого вида выражает реакцию на выходе цепи через переходную характеристику цепи $h(t)$.

П р а в и л о з а п и с и и н т е г р а л а Д ю а м е л я п е р в о г о в и д а

В интеграле Дюамеля первого вида скачок входной функции в момент $t = t_i$ *учитывается слагаемым вида* $\Delta u\, h(t-t_i)$. *Плавные измене-*

ния функции учитываются интегралом $\int_a^b u'(\tau)h(t-\tau)d\tau$*, где нижний предел* a *– начало действия функции, а верхний предел* b *– момент наблюдения или конец действия функции.*

Пример 10.2

На рис.10.8 показана входная функция напряжения $u(t)$. Записать выражение для выходного напряжения в цепи с переходной характеристикой $h(t)$.

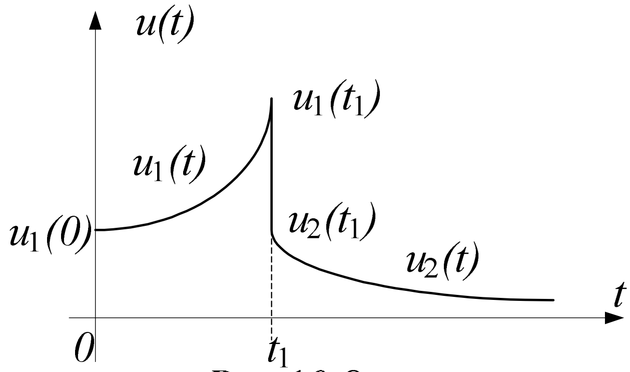


Рис.10.8

Решение

Интеграл Дюамеля надо записывать отдельно для каждого интервала изменения функции.

1. На первом интервале $0 < t < t_1$:

$$u_{вых}(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^t u_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau .$$

2. На втором интервале $t_1 < t < \infty$:

$$u_{вых}(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^{t_1} u_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau + \left[u_2(t_1) - u_1(t_1)\right]h(t-t_1) +$$

$$+\int_{t_1}^{t} u_2'(\tau)h(t-\tau)d\tau .$$

Вторая форма записи интеграла Дюамеля первого вида

Интегрируя (10.8) по частям, получим вторую форму записи интеграла Дюамеля первого вида:

$$u_{вых}(t)=u(t)h(0)+\int_0^t u(\tau)h'(t-\tau)d\tau. \qquad (10.9)$$

10.4. Импульсная функция, импульсная характеристика цепи

Импульсной функцией (дельта-функцией, функцией Дирака) называется функция $\delta(t)$, обладающая свойствами:

1. $\delta(t)=0$, когда $t\neq 0 \quad (t<0,\ t>0)$.
2. $\delta(0)=\infty$, когда $t=0$.
3. $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t)dt=1$.

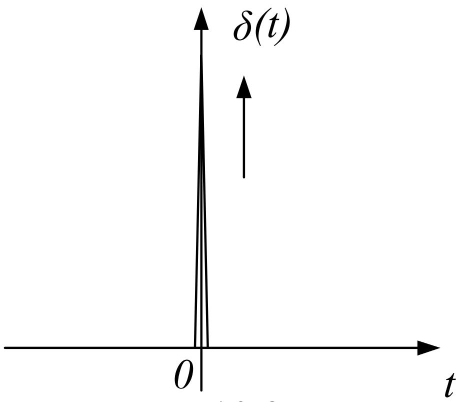


Рис.10.9

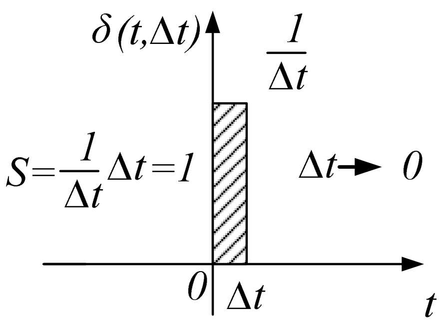


Рис.10.10

По этим свойствам:

Дельта- функция это импульс бесконечно малой длительности и бесконечно большой амплитуды. Площадь импульса постоянна и равна 1 (рис.10.9).

Приближенным примером реализации дельта-функции может служить односторонняя дельта-функция $\delta(t,\Delta t)$ (рис.10.10), которая имеет длительность Δt и амплитуду $\frac{1}{\Delta t}$. Площадь односторонней дельта-функции $S=\frac{1}{\Delta t}\Delta t=1$ постоянна и равна единице. При $t\to 0$ односторонняя дельта-функция $\delta(t,\Delta t)\to\delta(t)$.

Найдем интеграл от $\delta(t)$. На временном интервале $-\infty<t<0$ интеграл равен нулю. При переходе через $t=0$ интеграл скачком увеличивается до 1. На временном интервале $0<t<\infty$ интеграл не меняется и остается равным 1. В результате мы получили единичную функцию включения $1(t)$:

$$1(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(t)dt. \qquad (10.10)$$

Следовательно: $\delta(t) = \dfrac{d}{dt}\big(1(t)\big).$ (10.11)

Фильтрующее свойство дельта-функции

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = f(t). \qquad (10.12)$$

Доказательство.

Имеем: $\delta(t-\tau)=0$ при $t \neq \tau$. Если $t=\tau$, $f(\tau)=f(t)$. Вынесем $f(t)$ из-под знака интеграла при интегрировании по τ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-\tau)d\tau = f(t)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)d\tau = f(t)\cdot 1.$$

10.5. Расчет импульсной характеристики

Импульсной характеристикой цепи $h_\delta(t)$ *называют реакцию на выходе цепи при действии на входе* $\delta(t)$. На рис.10.11 показана схема для нахождения импульсных характеристик.

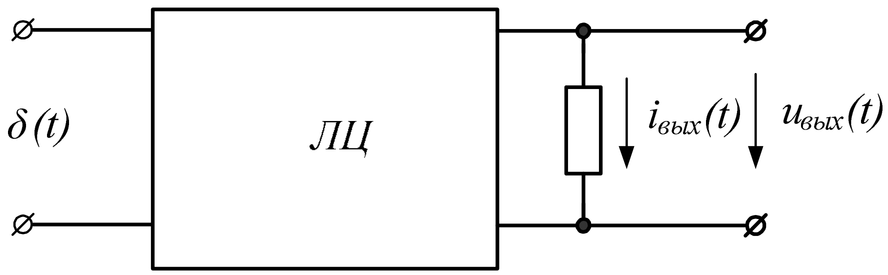


Рис.10.11

Импульсная проводимость численно равна току на выходе при действии на входе δ - функции:

$$i_{вых}(t) = h_\delta(t) = g_\delta(t) \text{ [см/с]} \qquad (10.13)$$

Импульсная функция по напряжению численно равна напряжению на выходе цепи при действии на входе δ - функции:

$$u_{вых}(t) = h_\delta(t) = k_\delta(t) \text{ [1/с]}. \qquad (10.14)$$

Операторный метод расчета $h_\delta(t)$

Найдем изображение $\delta(t)$, использую фильтрующее свойство:

$$F(p) = \int_0^{\infty} \delta(t)e^{-pt}dt = e^{-p\cdot 0}\int_0^{+\infty} \delta(t)dt = 1. \qquad (10.15)$$

Следовательно: $$\delta(t) \doteqdot 1\,. \tag{10.16}$$

Пример 10.3

Для схемы (рис.10.5) при действии на входе $\delta(t)$ найти импульсную характеристику цепи.

Решение

Строим операторную схему замещения (рис.10.12), находим изображение выходного напряжения и переходим к оригиналу:

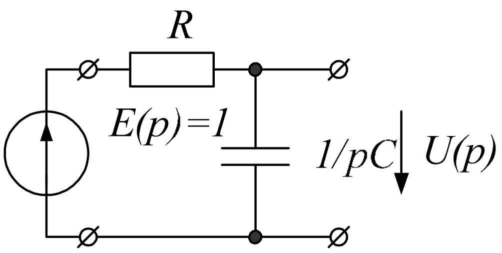


Рис.10.12

$$U(p) = \frac{1\cdot\frac{1}{pC}}{R+\frac{1}{pC}} = \frac{1}{1+RCp} =$$

$$= \frac{1}{RC}\cdot\frac{1}{p+\frac{1}{RC}} \doteqdot \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} = h_\delta(t)$$

.

Расчет импульсной характеристики по переходной характеристике

Запишем интеграл Дюамеля I-го вида (вторая форма записи):

$$u_{вых}(t) = u(t)h(0) + \int_0^t u(\tau)h'(t-\tau)d\tau\,. \tag{10.17}$$

Пусть $u(t)=\delta(t)$. Вычисляем выходную реакцию:

$$u_{вых}(t) = \delta(t)h(0) + \int_0^t \delta(\tau)h'(t-\tau)d\tau =$$

$$u_{вых}(t) = \delta(t)h(0) + \int_0^t \delta(\tau)h'(t-\tau)d\tau =$$

$$= h(0)\delta(t) + h'(t).$$

Но реакция цепи на δ- функцию есть импульсная характеристика цепи. Следовательно:

$$h_\delta(t) = h(0)\delta(t) + h'(t). \tag{10.18}$$

10.6. Интеграл Дюамеля второго вида

Интеграл Дюамеля второго вида выражает реакцию на выходе цепи с помощью импульсной характеристики цепи.

Заменим входной сигнал последовательностью импульсов длительностью τ (рис.10.13). Каждый импульс можно представить разностью двух функций включения:

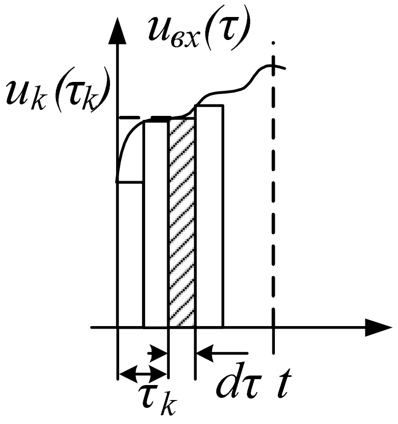


Рис.10.13

$$u_k\left(\tau_k\right)=u_k\left[1\left(\tau-\tau_k\right)-1\left(\tau-\tau_k-d\tau\right)\right].$$

Умножим и разделим на $d\tau$:

$$u_k\left(\tau_k\right)=d\tau\frac{u_k\left[1\left(\tau-\tau_k\right)-1\left(\tau-\tau_k-d\tau\right)\right]}{d\tau}=$$

$$=u_k d\tau\delta\left(\tau-\tau_k\right).$$

Функция $\delta\left(\tau-\tau_k\right)$ вызовет на выходе реакцию $h_\delta\left(\tau-\tau_k\right)$.

Функция $u_k d\tau\delta\left(\tau-\tau_k\right)$ вызовет на выходе реакцию $u_k d\tau h_\delta\left(\tau-\tau_k\right)$.

Реакции на импульсы суммируются в момент наблюдения t (рис.10.14):

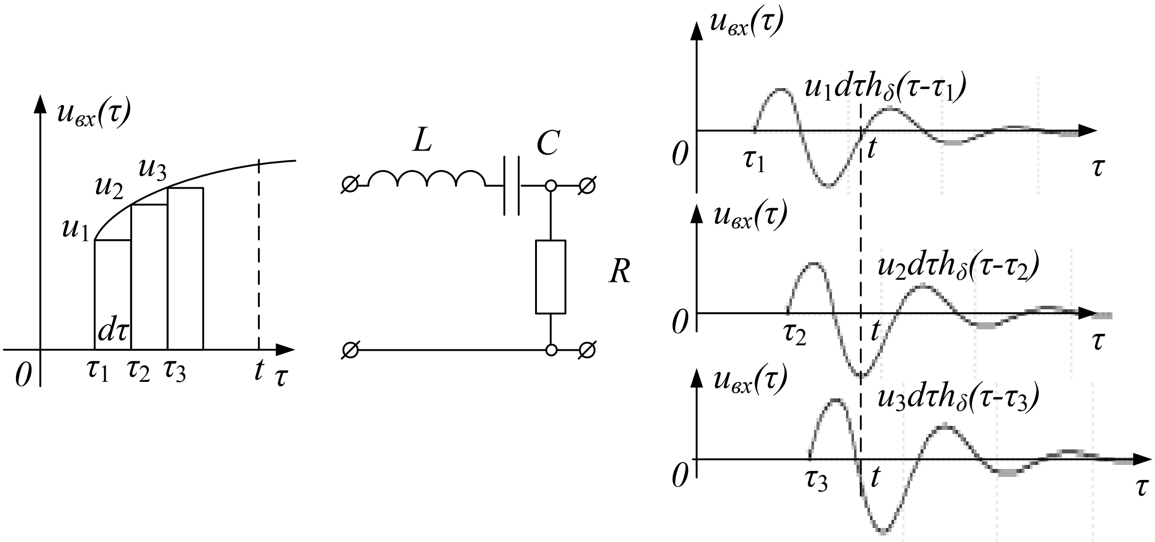


Рис.10.14

В результате получим в момент наблюдения t:

$$u_{вых}\left(t\right)=\sum_{k=1}^{n}u_k\left(\tau_k\right)h_\delta\left(t-\tau_k\right)d\tau. \quad (10.19)$$

Переходим к интегралу при $d\tau\to 0$:

$$u_{вых}(t) = \int_0^t u(\tau) h_\delta(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t u(t-\tau) h_\delta(\tau)\,d\tau. \qquad (10.20)$$

Получили интеграл Дюамеля второго вида (интеграл наложения, свертка функций). Он выражает реакцию на выходе цепи с помощью импульсной характеристики цепи.

Пример 10.4

Входное напряжение задано на рис.10.15. Записать выходное напряжение, используя импульсную характеристику цепи.

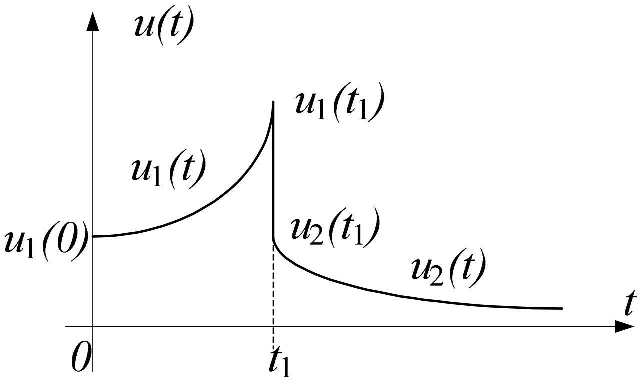


Рис.10.15

Решение

Входной сигнал разбиваем на два интервала.

1. На первом интервале $0 < t < t_1$:

$$u_{вых}(t) = \int_0^t u_1(\tau) h_\delta(t-\tau)\,d\tau.$$

2. На втором интервале $t_1 < t < \infty$:

$$u_{вых}(t) = \int_0^{t_1} u_1(\tau) h_\delta(t-\tau)\,d\tau + \int_{t_1}^{t} u_2(\tau) h_\delta(t-\tau)\,d\tau.$$

10.7. Передаточная функция цепи

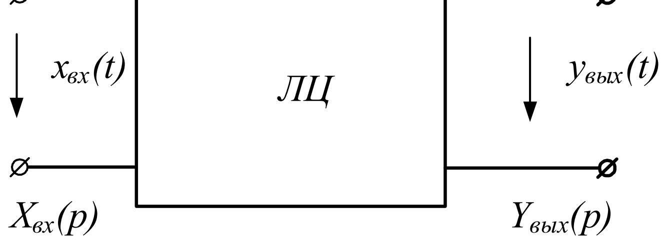


Рис.10.16

Передаточной функцией цепи называется отношение операторного изображения выходной величины к операторному изображению входной величины.

Для цепи рис.10.16 запишем передаточную функцию:

$$K(p)=\frac{Y_{вых}(p)}{X_{вх}(p)}. \quad (10.21)$$

Пример 10.5

Для операторной схемы цепи рис.10.17 найдем передаточную функцию.

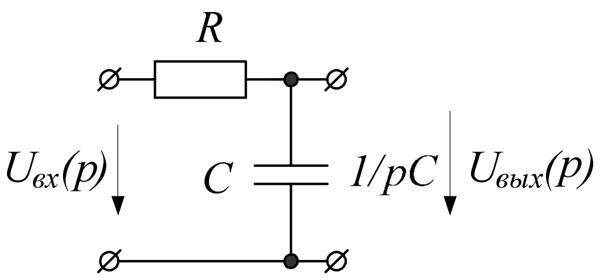


Рис.10.17

$$K(p)=\frac{U_{вых}(p)}{U_{вх}(p)}=$$

$$=\frac{U_{вх}(p)\cdot\dfrac{1}{pC}}{U_{вх}(p)\left(R+\dfrac{1}{pC}\right)}=\frac{1}{1+RCp}.$$

Связь передаточной функции и импульсной характеристики цепи

В цепи рис.10.18 известна передаточная функция $K(p)$. Найти импульсную характеристику цепи.

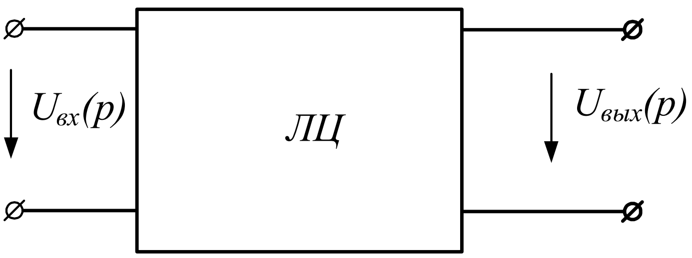


Рис.10.18

Запишем:

$$U_{вых}(p)=K(p)\cdot U_{вх}(p)$$

Пусть на входе действует δ-функция:

$$u_{вх}(t)=\delta(t)\mathrel{\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}}1.$$

Тогда реакция на выходе цепи будет импульсной характеристикой цепи:

$$U_{вых}(p)=K(p)\cdot 1\mathrel{\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}}h_\delta(t).$$

Следовательно:

$$h_\delta(t)\mathrel{\overset{\bullet}{\underset{\bullet}{=}}}K(p). \quad (10.22)$$

Правило: *Импульсная характеристика и передаточная функция связаны между собой преобразованием Лапласа.*

С в я з ь п е р е д а т о ч н о й ф у н к ц и и и п е р е х о д н о й х а р а к т е р и с т и к и ц е п и

Пусть в цепи рис.10.18 на входе действует единичная функция:

$$u_{вх}(t) = 1(t) \doteqdot \frac{1}{p}.$$

Тогда:

$$U_{вых}(p) = K(p) \cdot \frac{1}{p} \doteqdot h(t).$$

Следовательно:

$$h(t) \doteqdot \frac{K(p)}{p}. \qquad (10.23)$$

П р а в и л о : *Переходная характеристика цепи равна оригиналу от передаточной функции, деленной на* p.

Эти формулы можно применять для расчета импульсной и переходной характеристики.

10.8 Примеры расчетов переходных процессов с использованием интегралов Дюамеля

П р и м е р 10.6

Заданы параметры цепи рис.10.19: $R_1 = R_2 = 500$ кОм, $C = 1$ мкФ. такую цепь называют пропорционально-интегрирующий фильтр.

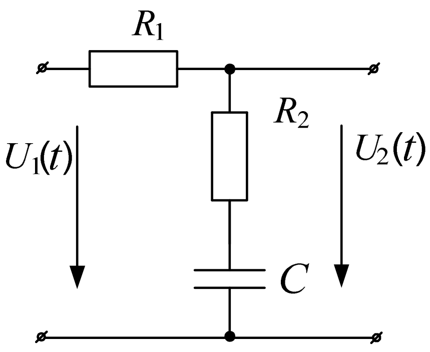


Рис.10.19

Найти передаточную функцию по напряжению K(p), переходную характеристику h(t), переходную входную проводимость *g(t),* импульсную характеристику $h_\delta(t)$, импульсную входную проводимость $g_\delta(t)$.

Р е ш е н и е

1. Передаточная функция цепи:

$$K(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{U_1(p)}{Z(p)} \cdot \frac{R_2 + \dfrac{1}{pC}}{U_1(p)} =$$

$$= \frac{R_2 + \dfrac{1}{pC}}{R_1 + R_2 + \dfrac{1}{pC}} = 0{,}5\frac{p+2}{p+1}.$$

2. Переходная характеристика h(t).

а) Определение классическим методом:

Считаем $u_1(t) = 1(t)$. Тогда, рассчитаем цепь первого порядка, получим:

$$h(t) = 1\text{-}0{,}5\mathrm{e}^{-t}.$$

б) Определение операторным методом:

$$h(t) \doteqdot \frac{K(p)}{p} = 0{,}5\frac{p+2}{p(p+1)} \doteqdot 1-0{,}5e^{-t}.$$

3. Переходная проводимость:

$$g(t) = \frac{1}{pZ(p)} = 0{,}5\frac{1}{p(R_1+R_2+\frac{1}{pC})} = \frac{10^{-6}}{p+1} \doteqdot g(t) = 10^{-6}e^{-t}См.$$

4. Импульсная характеристика:

$$h_\delta(t) \doteqdot K(p) = 0{,}5\frac{p+2}{p+1} = 0{,}5(\frac{p+1}{p+1}+\frac{1}{p+1}) =$$

$$= 0{,}5+\frac{0{,}5}{p+1} \doteqdot 0{,}5\delta(t)+0{,}5e^{-t}c^{-1}.$$

П р о в е р к а

$$h_\delta(t) = h(0)\delta(t)+h'(t) = 0{,}5\delta(t)+0{,}5e^{-t}c^{-1}.$$

5. Импульсная проводимость:

$$g_\delta(t) \doteqdot \frac{1}{Z(p)} = \frac{10^{-6}p}{p+1} = 10^{-6}(1-\frac{1}{p+1}).$$

$$g_\delta(t) = 10^{-6}\delta(t)-10^{-6}e^{-t}См/c$$

П р и м е р 10.7

На заданную цепь (рис.10.19) воздействует импульс напряжения $u_1(t) = Ue^{-\alpha t}$ длительности t_1 (рис.10.20). Параметры импульса $U = 100 \quad B,\ \alpha = 2c^{-1},\ t_1 = 1c.$

Определить напряжение $u_2(t)$ при помощи интегралов Дюамеля первого и второго вида.

У к а з а н и е :

Следует обратить внимание на разбиение временной области на интервалы интегрирования, правильную расстановку пределов в интегралах, особенности вычисления интегралов, содержащих импульсную функцию.

1. Применение интеграла Дюамеля первого вида

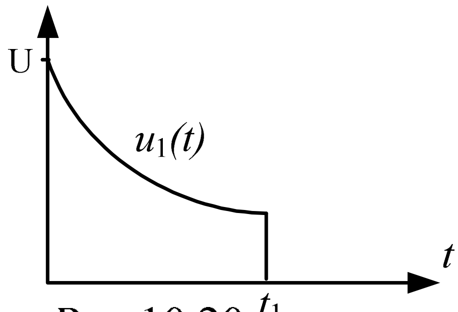


Рис.10.20

На интервале $0 \le t < t_1$:

$$u_2(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^t u_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau .$$

Находим:

$u_1(0) = 100B;\ u_1(t) = 100e^{-2t}\ B;$

$h(t) = 1 - 0{,}5e^{-t};$

$$h(t\text{-}\tau) = 1 - 0{,}5e^{-(t-\tau)},\ u_1'(\tau) = -\alpha U\mathrm{e}^{-\alpha\tau} = -200\mathrm{e}^{-2\tau}B .$$

Вычисляем интеграл:

$$u_2(t) = 100(1 - 0{,}5e^{-t}) + \int_0^t (-200\mathrm{e}^{2\tau})(1 - 0{,}5\mathrm{e}^{-(t-\tau)})d\tau =$$

$$= 100 - 50e^{-t} - \int_0^{t} 200\mathrm{e}^{-2\tau}d\tau + 100e^{-t}\int_0^{t} \mathrm{e}^{-\tau}d\tau = 50e^{-t}B$$

На интервале $t_1 < t < \infty$:

$$u_2(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^{t_1} u_1'(\tau)h(t\text{-}\tau)\mathrm{d}\tau - U\mathrm{e}^{-\alpha t_1}h(t - t_1) =$$

$$= 100 - 50\mathrm{e}^{-t} - 200\int_0^{t_1} \mathrm{e}^{-2\tau}(1 - 0{,}5\mathrm{e}^{-t+\tau})d\tau - 100\mathrm{e}^{-2t_1}(1 - 0{,}5\mathrm{e}^{-(t-t_1)}) =$$

$$= 50e^{-t}(1 - e^{-t_1})B$$

2. Применение интеграла Дюамеля второго вида.

На интервале $0 \le t < t_1$:

$$u_2(t) = \int_0^t u_1(\tau)(\tau)h_\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^t 100e^{-2\tau}(0{,}5\delta(t\text{-}\tau) + 0{,}5\mathrm{e}^{-(t-\tau)})d\tau =$$

$$= \int_0^t 50e^{-2\tau}\delta(t\text{-}\tau)\mathrm{d}\tau + \int_0^t 50e^{-t}e^{-\tau}d\tau = 50e^{-2t} + 50e^{-t} - 50e^{-2t} = 50e^{-t}$$

Пояснение:

На интервале интегрирования по τ $(0 \div t)$ при $\tau = t$ действует фильтрующее свойство δ - функции. Поэтому

$$\int_0^t 50e^{-2\tau}\delta(t-\tau)d\tau = 50e^{-2t}.$$

На интервале $t_1 < t < \infty$:

$$u_2(t) = \int_0^{t_1} u_1(\tau)h_\delta(t-\tau)d\tau = \int_0^{t_1} 50e^{-2\tau}\delta(t-\tau)d\tau + \int_0^{t_1} 50e^{-2\tau}e^{-t}e^{\tau}d\tau =$$

$$= 50e^{-t} - 50e^{-t_1}e^{-t} = 50e^{-t}(1-e^{-t_1})$$

Пояснение:

Так как $t_1 < t$ при интегрировании по τ $(0 \div t_1)$ условие $\tau = t$ не выполняется, $\delta(t-\tau)$ под интегралом будет равна нулю. Поэтому:

$$\int_0^{t_1} 50\mathrm{e}^{-2\tau}\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau = 0.$$

Результаты, полученные с использованием первого и второго интеграла, Дюамеля совпадают.

На рис.10.21 показаны графики входного воздействия (сплошная линия) и реакции на выходе (пунктирная линия).

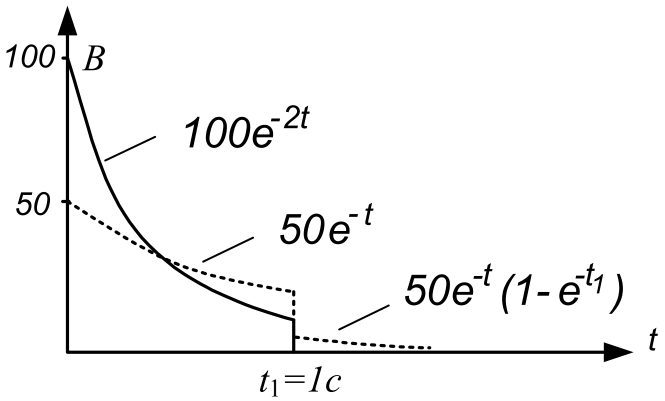


Рис.10.21

Пример 10.8

На цепь (рис.10.19) на интервале времени $t \geq 0$ воздействует импульс напряжения $u_1(t) = 1 - \mathrm{e}^{-4t}B$.

Операторным методом найти выходное напряжение.

Решение

1. Находим изображение входного сигнала:

$$u_1(t) = 1\text{-e}^{-4t} \doteqdot \frac{4}{p(p+4)} = U_1(p).$$

2. Находим передаточную функцию цепи (см. пример 10.6):

$$K(p) = 0{,}5\frac{p+2}{p+1}.$$

3. Находим изображение выходного сигнала:

$$U_2(p) = K(p)\cdot U(p) = 0{,}5\frac{(p+2)}{(p+1)}\frac{4}{p(p+4)} = \frac{2(p+2)}{p(p+1)(p+4)}.$$

4. По теореме разложения находим оригинал выходного напряжения:

$$u_2(t) = 1 - \frac{1}{3}e^{-4t} - \frac{2}{3}e^{-t}B.$$

Глава 11 . ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПРИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ НЕГАРМОНИЧЕСКИХ ТОКАХ И НАПРЯЖЕНИЯХ

11.1 Разложение периодических функций в ряд Фурье

На рис.11.1 показан пример периодической негармонической функции времени, удовлетворяющей условию периодичности:

$$f(t) = f(t+T), \tag{11.1}$$

где T - период повторения функции.

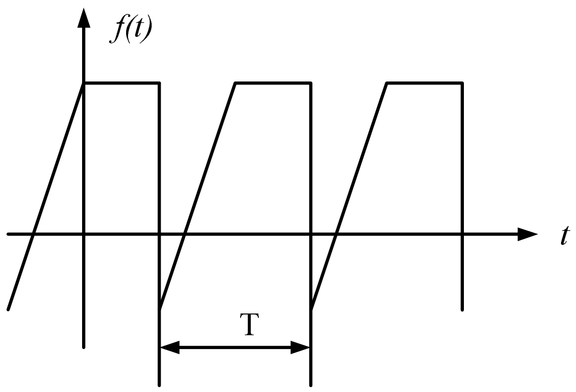


Рис.11.1

Любая периодическая функция, удовлетворяющая условиям Дирихле, может быть разложена в гармонический ряд Фурье, в котором составляющие имеют кратные частоты и называются гармониками.

П е р в а я ф о р м а з а п и с и р я д а Ф у р ь е выглядит так:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos n\Omega t + b_n \sin n\Omega t\right) \tag{11.2}.$$

В этом уравнении:

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} \tag{11.3}$$

- частота первой гармоники;

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,\boldsymbol{cos}\, n\Omega t dt \tag{11.4}$$

- амплитуды косинусных гармоник;

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,\boldsymbol{sin}\, n\Omega t dt \tag{11.5}$$

- амплитуды синусных гармоник;

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,dt \tag{11.6}$$

- постоянная составляющая.

Вторую форму записи ряда Фурье записывают в таком виде:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\,\boldsymbol{cos(}\,n\Omega t - \Psi_n\,\boldsymbol{)}. \tag{11.7}$$

Преобразуем слагаемые этого ряда:

$$A_n\,\boldsymbol{cos(}\,n\Omega t - \Psi_n\,\boldsymbol{)} = A_n\,\boldsymbol{cos}\,n\Omega t\,\boldsymbol{cos}\,\Psi_n + A_n\,\boldsymbol{sin}\,\Omega t\,\boldsymbol{sin}\,\Psi_n =$$
$$= a_n\,\boldsymbol{cos}\,n\Omega t + b_n\,\boldsymbol{sin}\,n\Omega t\,, \tag{11.8}$$

где $a_n = A_n\,\boldsymbol{cos}\,\Psi_n$, $b_n = A_n\,\boldsymbol{sin}\,\Psi_n$, $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $tg\Psi_n = \frac{b_n}{a_n}$.

11.2. Дискретные спектры

Во второй форме записи разложения Фурье (11.7) каждая гармоническая составляющая $A_n\,\boldsymbol{cos(}\,n\Omega t - \Psi_n\,\boldsymbol{)}$ характеризуется частотой $\omega_n = n\Omega$, амплитудой A_n, фазой Ψ_n.

Амплитуды и фазы можно изобразить на оси частот.

Совокупность амплитуд гармонических составляющих, отнесённых к частотам, называется амплитудным спектром.

Совокупность начальных фаз гармоничных составляющих, отнесённых к частотам, называется фазовым спектром.

Пример 11.1

Рассмотрим негармоническую периодическую функцию напряжения

$f(t) = 3\cos\left(\Omega t + 45^0\right) + 2\cos(2\Omega t - 30^0)B$. Эта функция имеет две гармонические составляющие.

Для построения амплитудного спектра (рис.11.2*а*) на частоте Ω отложим амплитуду первой гармоники $A_1 = 3B$, на частоте 2Ω отложим амплитуду второй гармоники $A_2 = 2B$. Получим дискретный амплитудный спектр, состоящий из двух амплитудных спектральных составляющих.

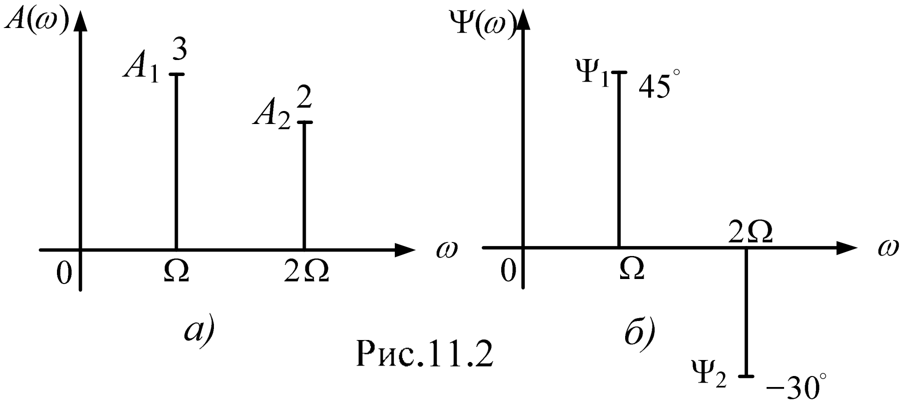


Рис.11.2

Амплитудный спектр Фазовый спектр

Для построения фазового спектра (рис.11.2*б*) на частоте Ω отложим начальную фазу первой гармоники $\Psi_1 = +45^0$, на частоте второй гармоники отложим начальную фазу второй гармоники $\Psi_2 = -30^0$. Получим дискретный фазовый спектр, состоящий из двух фазовых спектральных составляющих.

Отметим важное свойство:

Периодическая негармоничная функция

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\Omega t - \Psi_n)$$

имеет дискретные линейчатые спектры (рис.11.3).

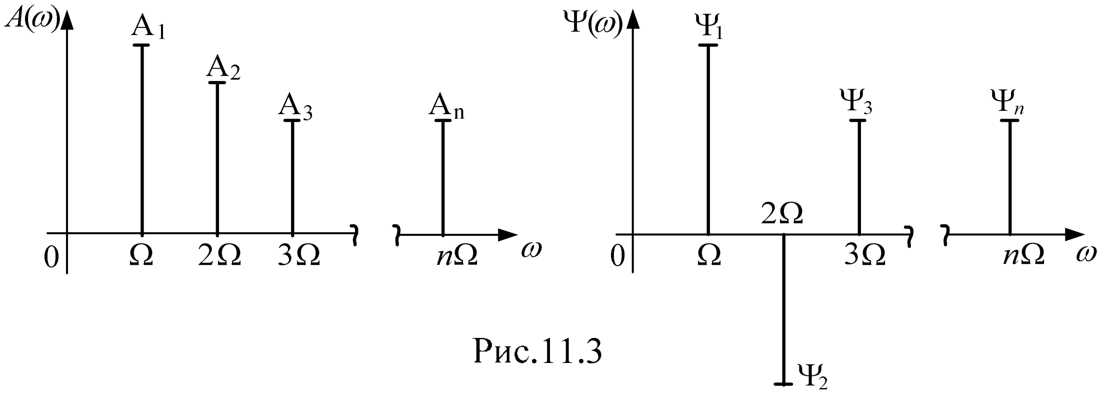


Рис.11.3

Амплитудный спектр Фазовый спектр

Разность частот соседних составляющих $\Delta\omega = \Omega = \dfrac{2\pi}{T}$. Все спектральные составляющие имеют частоты, кратные Ω.

Спектральные составляющие с кратными частотами называется гармониками сигнала. Спектр, состоящий из гармоник, называют гармоническим спектром.

Спектры, заданные на положительной оси частот, называются односторонними.

11.3. Пример разложения функции в ряд Фурье

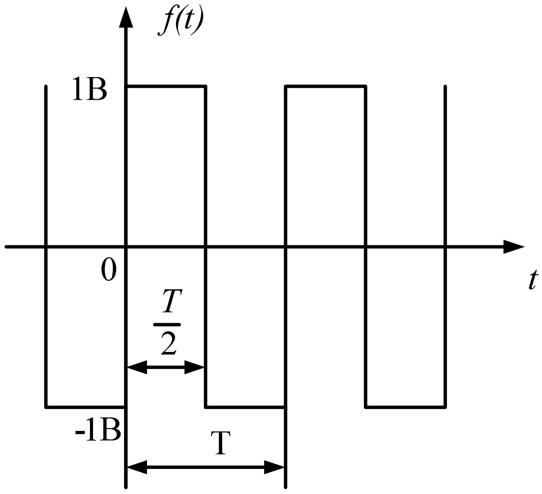


Рис.11.3

На рис.11.4 показан график периодической последовательности прямоугольных импульсов. Амплитуда импульсов 1 В, период повторения Т. Требуется найти разложение этой функции в ряд Фурье.

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \dfrac{T}{2} \\ -1, & \dfrac{T}{2} < t < T \end{cases}$$

1. По формуле (11.6) находим, что постоянная составляющая

$\dfrac{a_0}{2} = \dfrac{1}{T}\int\limits_0^T f(t)\,dt = 0$, так как функция симметричная относительно оси абсцисс.

2. Находим амплитуды гармоник:

$$a_n = \frac{2}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T} f(t)\,\boldsymbol{cos}\,n\Omega t dt = \frac{2}{T}\int\limits_0^{\frac{T}{2}} 1\cdot \boldsymbol{cos}\,n\Omega t dt - \frac{2}{T}\int\limits_{\frac{T}{2}}^{T} 1\cdot \boldsymbol{cos}\,n\Omega t dt =$$

$$= \frac{2}{n\Omega T}\boldsymbol{sin}\,\Omega t\Bigg|_0^{\frac{T}{2}} - \frac{2}{n\Omega T}\boldsymbol{sin}\,\Omega t\Bigg|_{\frac{T}{2}}^{T} =$$

$$= \frac{2}{n\Omega T}\left[\boldsymbol{sin}\,n\Omega\frac{T}{2} - \boldsymbol{sin}\,0 - \boldsymbol{sin}\,n\Omega T + \boldsymbol{sin}\,n\Omega\frac{T}{2}\right] =$$

$$=\frac{2}{n\Omega\frac{2\pi}{\Omega}}\left[\sin n\Omega\frac{2\pi}{2\Omega}-\sin 0-\sin n\Omega\frac{2\pi}{\Omega}+\sin n\Omega\frac{2\pi}{2\Omega}\right]=0.$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}1\cdot\sin n\Omega t dt-\frac{2}{T}\int_{\frac{T}{2}}^{T}1\cdot\sin n\Omega t dt=$$

$$=-\frac{2}{n\Omega T}\left[\cos n\Omega t\left|\begin{matrix}\frac{T}{2}\\0\end{matrix}\right.-\frac{2}{n\Omega T}\cos n\Omega t\left|\begin{matrix}T\\\frac{T}{2}\end{matrix}\right.\right]=$$

$$=-\frac{2}{n\Omega\frac{2\pi}{\Omega}}\left[\cos n\pi-1-\cos 2n\pi+\cos n\pi\right]=-\frac{1}{n\pi}\left[2\cos n\pi-2\right].$$

Для четных «*n*» $b_n=0$.

Далее получим:

$$b_1=\frac{4}{\pi}=1{,}27,b_3=\frac{4}{3\pi}=0{,}424,\ b_5=\frac{4}{5\pi}=0{,}254....$$

В результате: $f\left(t\right)=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin\Omega t}{1}+\frac{\sin 3\Omega t}{3}+\frac{\sin 5\Omega t}{5}+.........\right).$

Свойства периодических функций

Функции, симметричные относительно начала координат, содержат только синусные гармоники.

Функции, симметричные относительно оси ординат, содержат только косинусные гармоники.

Пример 11.4

Выполнить Фурье-анализ функции (рис.11.4) в программе «TINA-8».

Для расчета спектра Фурье предварительно надо выполнить *Analysis-Transient* и установить достаточно большое время окончания *End display* = 1 s/

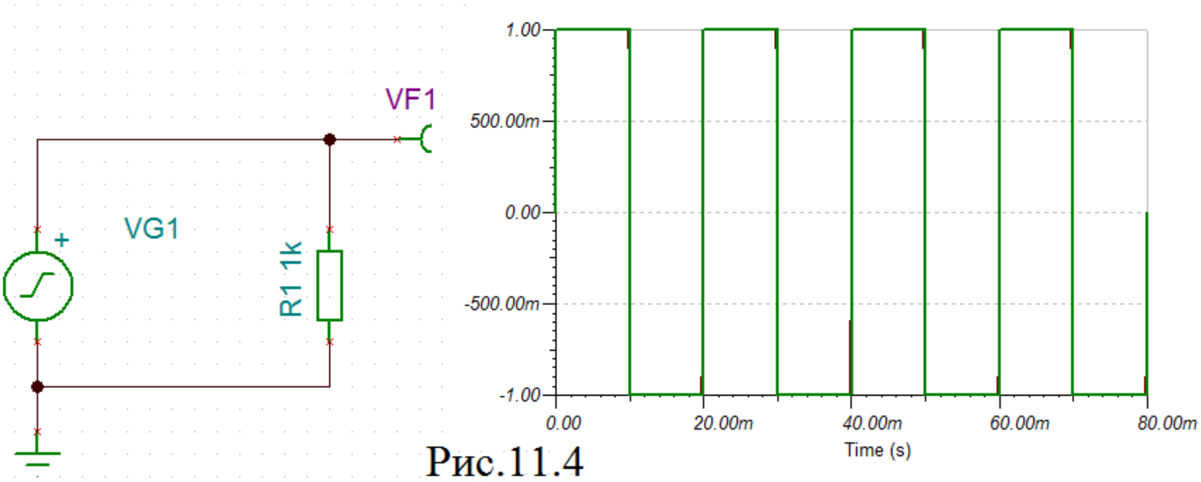


Рис.11.4

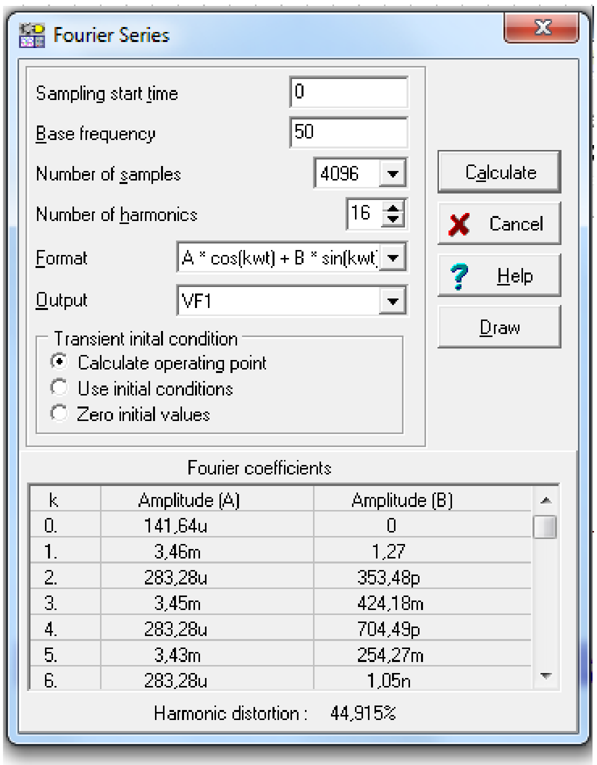


Рис.11.5

Далее выполняем: *Analysis- Fourier Analysis- Fourier series.* Устанавливаем параметры анализа в соответствии в таблицей рис.11.5. Выбираем *Calculate.* В таблице результатов получаем амплитуды косинусных и синусных гармоник. Сравниваем их с результатами расчета в примере 11.3.

Выбираем *Draw* и получаем амплитудные спектры косинусных и синусных гармоник. Косинусные гармоники не превышают по амплитуде 3 мВ, что много меньше амплитуды синусных гармоник. Наличие этих малых погрешностей обусловлено тем, что последовательность импульсов на рис.11.4 существует только при $t \geq 0$ и не является периодической в строгом смысле.

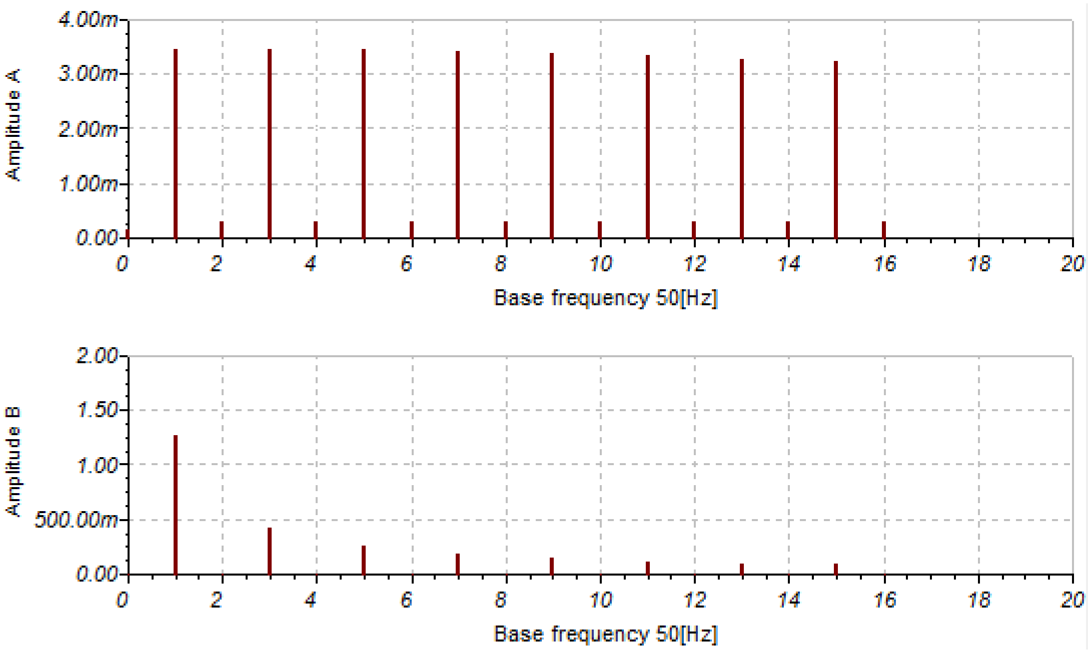


Рис.11.6

11.4. Смещение функции по времени

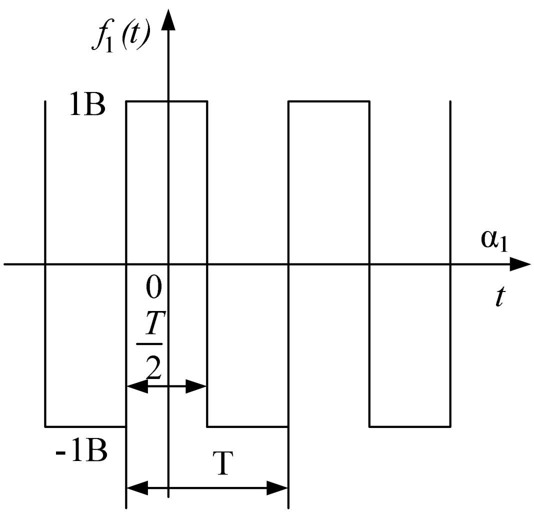


Рис.11.7

На рис.11.7 показана функция $f_1(t)$, которая опережает на $\frac{T}{4}$ предыдущую функцию $f(t)$ (рис.11.3). Фазовый сдвиг $\beta = \frac{\Omega T}{4} = \frac{\Omega \cdot 2\pi}{4\Omega} = \frac{\pi}{2}$.

Следовательно: $f_1(\alpha_1) = f\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right)$.

Подставляем в ряд Фурье для $f(t)$ новую координату $\alpha_1 + \frac{\pi}{2}$:

$$f_1(\alpha_1) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\boldsymbol{sin}\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}\right)}{1} + \frac{\boldsymbol{sin}\,3\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}\right)}{3} + \frac{\boldsymbol{sin}\,5\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}\right)}{5} + \dots\dots\dots\right) =$$

$$=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin\Omega t\cos\frac{\pi}{2}+\cos\Omega t\sin\frac{\pi}{2}}{1}+\frac{\sin 3\Omega t\cos\frac{3\pi}{2}+\cos 3\Omega t\sin\frac{3\pi}{2}}{3}.........\right)=$$

$$=\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos\Omega t}{1}-\frac{\cos 3\Omega t}{3}+\frac{\cos 5\Omega t}{5}-........\right].$$

Здесь учтено, что: $\sin\left(\Omega t+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\Omega t\cos\frac{\pi}{2}+\cos\Omega t\sin\frac{\pi}{2}$.

11.5. Анализ линейных цепей при периодических негармонических воздействиях

Негармонические напряжение и ток представляют рядом Фурье в виде гармонических составляющих и постоянной составляющей.

П р а в и л о

Расчет цепей с негармоническими сигналами надо проводит для каждой составляющей в отдельности, а результаты в форме функций времени надо суммировать, используя принцип наложения.

В расчетах номер гармоники обозначают нижним индексом в скобках. Например:

$i_{(2)}(t)=I_{m(2)}\sin(2\Omega t+\varphi_{I(2)})$ - мгновенное значение второй гармоники тока;

$\underline{I}_{1m(2)}$ - комплексная амплитуда тока в первой ветви на второй гармонике;

номер ветви

номер гармоники

$\underline{Z}_{2(3)}$ - комплексное сопротивление второй ветви на третьей гармонике.

П р и м е р 11.5

В цепи рис.11.8 действует сигнал $e(t)=E_0+e_1(t)+e_2(t)=$ $=E_0+E_{m(1)}\sin\Omega t+E_{m(2)}\sin 2\Omega t$. Найти ток в цепи.

П о р я д о к р а с ч ё т а

1. Расчёт на постоянном токе $\omega_0=0$.

Комплексное сопротивление $Z(0)=R+j0L=R$.

Постоянная составляющая тока $I_0 = \dfrac{E_0}{R}$.

2. Расчет на первой гармонике Ω.

Комплексная амплитуда первой гармоники напряжения сигнала $\underline{E}_{m(1)} = E_{m(1)} e^{j0}$.

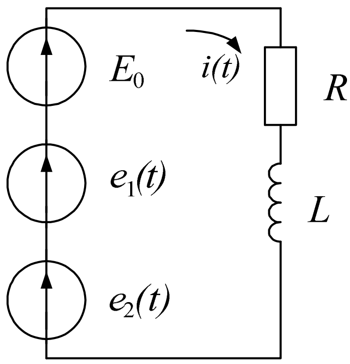


Рис.11.8

Комплексное сопротивление цепи на первой гармонике: $\underline{Z}_{(1)} = R + j\Omega L$.

Комплексная амплитуда тока первой гармоники: $\underline{I}_{m(1)} = \dfrac{\underline{E}_{m(1)}}{\underline{Z}_{(1)}} = I_{m(1)} e^{j\varphi_{I(1)}}$.

Мгновенное значение первой гармоники тока:

$i_{(1)}(t) = I_{m(1)} \boldsymbol{sin(}\Omega t + \varphi_{I(1)}\boldsymbol{)}$.

3. Расчет на второй гармонике 2Ω.

Аналогично предыдущему пункту находим: $\underline{E}_{m(2)} = E_{m(2)} e^{j0}$;

$\underline{Z}_{(2)} = R + j2\Omega L$, $\underline{I}_{m(2)} = \dfrac{\underline{E}_{m(2)}}{\underline{Z}_{(2)}} = I_{m(2)} e^{j\varphi_{I(2)}}$.

Мгновенное значение второй гармоники тока:

$$i_{(2)}(t) = I_{m(2)} \boldsymbol{sin(}2\Omega t + \varphi_{I(2)}\boldsymbol{)}.$$

Правило

При расчете негармонических сигналов нельзя суммировать комплексные амплитуды разных частот. Суммируют только мгновенные значения.

Ответ:

$$i(t) = I_0 + i_{(1)}(t) + i_{(2)}(t) = I_0 + I_{m(1)} \boldsymbol{sin}\left(\Omega t + \varphi_{I(1)}\right) + I_{m(2)} \boldsymbol{sin}\left(2\Omega t + \varphi_{I(2)}\right).$$

Пример 11.6

Смоделировать цепь рис.11.9, в которой последовательно включены источник VS1 постоянного напряжения 1В, источник синусоидального сигнала VG1 с частотой 50 Гц и амплитудой 1В, источник синусоидального напряжения VG2 с частотой 100 Гц и амплитудой 1 В. Индуктивность $L_1 = 1\,Гн$. Найти напряжение на резисторе $R_1 = 500\,Ом$.

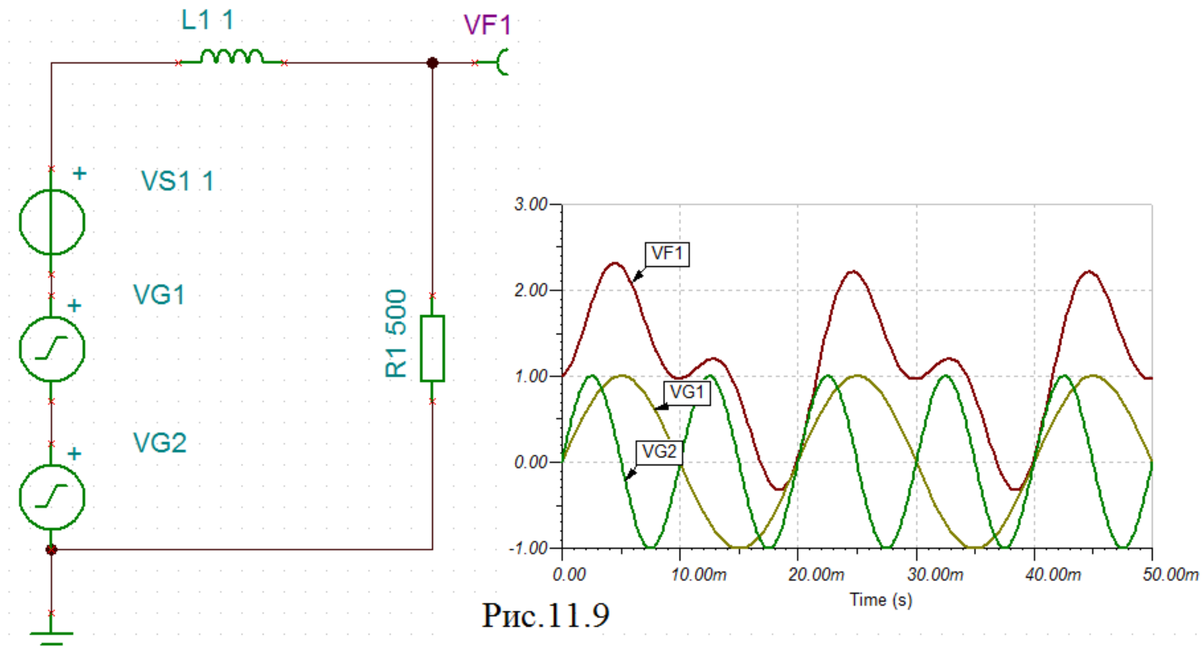


Рис.11.9

11.6. Действующее значение негармонических сигналов

О п р е д е л е н и е

Действующее значение негармонического периодического сигнала равно значению постоянного тока (напряжения), при котором в активном сопротивлении рассеивается та же мощность, что при негармоническом сигнале.

Для периодического негармонического тока среднюю мощность находим как интеграл от мгновенной мощности по периоду:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T i^2 R dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{u^2}{R} dt \;. \qquad (11.9)$$

Для постоянного тока мощность в активном сопротивлении:

$$P_= = I^2 R = \frac{U^2}{R}. \qquad (11.10)$$

Приравняем мощности:

$$P_= = I^2 R = \frac{R}{T}\int_0^T i^2 dt. \qquad (11.11)$$

Из равенства (11.11) находим *действующее значение негармонического тока*:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt}. \qquad (11.12)$$

Аналогично найдем *действующее значение напряжения*:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,dt}\,. \qquad (11.13)$$

Общая формула для *действующего значения периодической функции* $f(t)$:

$$F = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt}\,. \qquad (11.14)$$

Пусть $i(t) = I_0 + I_{m(1)}\,\boldsymbol{sin}\,\Omega t + I_{m(2)}\,\boldsymbol{sin}\,2\Omega t + \boldsymbol{.....}$. (11.15)

Найдем действующее значение тока:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left(I_0 + I_{m(1)}\,\boldsymbol{sin}\,\Omega t + I_{m(2)}\,\boldsymbol{sin}\,2\Omega t + \boldsymbol{.....}\right)^2 dt} =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T \left[I_0^2 + I_{m(1)}^2\,\boldsymbol{sin}^2\,\Omega t + I_{m(2)}^2\,\boldsymbol{sin}^2\,2\Omega t\boldsymbol{....} + 2I_0 I_{m(1)}\,\boldsymbol{sin}\,\Omega t + \boldsymbol{...}\right]^2 dt}\,.$$

Квадраты синусов в этом выражении можно преобразовать к виду:

$$\left(I_{m(1)}\,\boldsymbol{sin}\,\Omega t\right)^2 = \frac{I_{m(1)}^2}{2}\left(1 - \boldsymbol{cos}\,2\Omega t\right). \qquad (11.16)$$

При интегрировании по периоду останутся только постоянные составляющие от квадратов синусов и постоянная составляющая нулевой гармоники.

В итоге получим:

$$I = \sqrt{I_0^2 + \frac{I_{m(1)}^2}{2} + \frac{I_{m(2)}^2}{2} + \boldsymbol{.....}} = \sqrt{I_0^2 + I_{(1)}^2 + I_{(2)}^2 + \boldsymbol{...}}\,. \qquad (11.17)$$

П р а в и л о

Действующее значение периодической негармонической функции равно квадратному корню из суммы квадратов действующих значений всех составляющих.

Для *действующего напряжения* получим формулу:

$$U = \sqrt{U_0^2 + U_{(1)}^2 + U_{(2)}^2 + \boldsymbol{...}}\,.. \qquad (11.18)$$

11.7. Мощность периодических негармонических сигналов

Среднюю мощность произвольного сигнала находят по формуле:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)i(t)dt. \qquad (11.19)$$

Рассмотрим негармонический сигнал:

$$u(t) = U_0 + U_{m(1)}\,\boldsymbol{sin(}\Omega t + \Psi_{U(1)}\boldsymbol{)} + U_{m(2)}\,\boldsymbol{sin(}2\Omega t + \Psi_{U(2)}\boldsymbol{)}, \qquad (11.20)$$

$$i(t) = I_0 + I_{m(1)}\,\boldsymbol{sin(}\Omega t + \Psi_{I(1)}\boldsymbol{)} + I_{m(2)}\,\boldsymbol{sin(}2\Omega t + \Psi_{I(2)}\boldsymbol{)}. \qquad (11.21)$$

Найдем мгновенную мощность:

$$\begin{aligned}
p(t) = u(t)i(t) &= U_0 I_0 + U_0 I_{m(1)}\,\boldsymbol{sin(}\Omega t + \Psi_{I(1)}\boldsymbol{)} + U_0 I_{m(2)}\,\boldsymbol{sin(}2\Omega t + \Psi_{I(2)}\boldsymbol{)} + \\
&+ I_0 U_{m(1)}\,\boldsymbol{sin(}\Omega t + \Psi_{U(1)}\boldsymbol{)} + I_0 U_{m(2)}\,\boldsymbol{sin(}2\Omega t + \Psi_{U(2)}\boldsymbol{)} + \\
&+ U_{m(1)}\,\boldsymbol{sin(}\Omega t + \Psi_{U(1)}\boldsymbol{)} I_{m(1)}\,\boldsymbol{sin(}\Omega t + \Psi_{I(1)}\boldsymbol{)} + \\
&+ U_{m(2)}\,\boldsymbol{sin(}2\Omega t + \Psi_{U(2)}\boldsymbol{)} I_{m(2)}\,\boldsymbol{sin(}2\Omega t + \Psi_{I(2)}\boldsymbol{)} + \\
&+ U_{m(1)}\,\boldsymbol{sin(}\Omega t + \Psi_{U(1)}\boldsymbol{)} I_{m(2)}\,\boldsymbol{sin(}2\Omega t + \Psi_{I(2)}\boldsymbol{)} + \\
&+ U_{m(2)}\,\boldsymbol{sin(}2\Omega t + \Psi_{U(2)}\boldsymbol{)} I_{m(1)}\,\boldsymbol{sin(}\Omega t + \Psi_{I(1)}\boldsymbol{)}.
\end{aligned} \qquad (11.21)$$

При интегрировании мгновенной мощности по формуле (11.19) постоянные составляющие получим только от произведения функций одинаковых частот и от постоянных составляющих.

В результате получим, что активная мощность негармонического тока равна сумме активных мощностей отдельных гармоник:

$$\begin{aligned}
P &= U_0 I_0 + \frac{U_{m(1)} I_{m(1)}}{2}\boldsymbol{cos(}\Psi_{U(1)} - \Psi_{I(1)}\boldsymbol{)} + \frac{U_{m(2)} I_{m(2)}}{2}\boldsymbol{cos(}\Psi_{U(2)} - \Psi_{I(2)}\boldsymbol{)} = \\
&= U_0 I_0 + U_1 I_1 \boldsymbol{cos}\,\varphi_1 + U_2 I_2 \boldsymbol{cos}\,\varphi_2 = P_0 + P_1 + P_2.
\end{aligned} \qquad (11.22)$$

Реактивная мощность

$$Q = U_{(1)} I_{(1)}\,\boldsymbol{sin}\,\varphi_{(1)} + U_{(2)} I_{(2)}\,\boldsymbol{sin}\,\varphi_{(2)} = Q_1 + Q_2. \qquad (11.23)$$

Полная мощность равна произведению действующих значений напряжения и тока:

$$S = UI, \qquad (11.24)$$

где: $U = \sqrt{U_0^2 + U_{(1)}^2 + U_{(2)}^2}$, $I = \sqrt{I_0^2 + I_{(1)}^2 + I_{(2)}^2}$.

Отметим, что в цепи негармонического тока $S \neq \sqrt{P^2 + Q^2}$.

11.8. Коэффициенты характеризующие несинусоидальные периодические процессы

Обозначим для несинусоидального периодического процесса:

f_{max} - максимальное значение функции за период;

$F_{cp} = \frac{1}{T}\int_0^T \left|f(t)\right|dt$ - среднее значение по модулю

(*для синусоиды* $F_{cp} = \frac{2}{\pi}U_m$);

$F = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,dt}$ - действующее значение функции

(*для синусоиды* $F = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$).

Несинусоидальные периодические процессы характеризуют следующими коэффициентами:

Коэффициент формы есть отношение действующего значения к среднему: $k_ф = \frac{F}{F_{cp}}$ (для синусоиды $\boldsymbol{sin}\, k_ф = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1{,}11$).

Коэффициент амплитуды есть отношение максимального значения к среднему: $k_a = \frac{f_{max}}{F_{cp}}$ (для синусоиды $k_a = \sqrt{2}$).

Коэффициент искажений есть отношение действующего значения первой гармоники к действующему значению всей функции: $k_u = \frac{F_1}{F}$.

Коэффициент мощности есть отношение активной мощности к полной: $\chi = \frac{P}{UI}$.

11.9. Примеры расчета цепей при периодических негармонических сигналах

Пример 11.7

В схеме рис.11.10 действует входное напряжение $u(t) = 40 + 80\,\boldsymbol{sin}\,10^3 t + 40\,\boldsymbol{sin}\left(2\cdot 10^3 t + 45^o\right)$. Заданы параметры цепи: $L = 10\,мГн, C = 50\,мкФ, R = 20\,Ом$. Найти действующее значение тока, активную, реактивную и полную мощность.

Р е ш е н и е

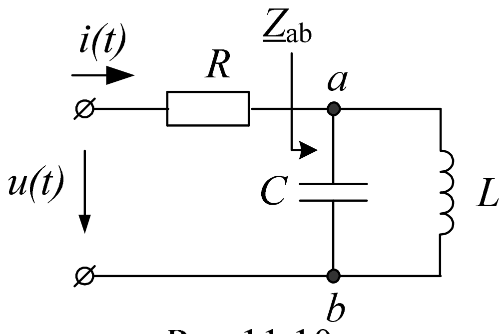


Рис.11.10

1. Выполним расчет на постоянном токе:

$$I_0 = \frac{U_0}{R} = \frac{40}{20} = 2A.$$

2. Расчет на первой гармонике $\omega = 10^3\ {}^{1}\!/_{c}$:

$$X_{L(1)} = \omega L = 10^3 \cdot 10^{-2} = 10\,Ом,$$

$$X_{C(1)} = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{10^3 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 20\,Ом.$$

$$\underline{Z}_{ab(1)} = \frac{j10(-j20)}{j10 - j20} = \frac{200}{-j10} = j20\,Ом.$$

$$\underline{Z}_{вх(1)} = R + j\underline{Z}_{ab(1)} = 20 + j20\,Ом.$$

$$\underline{I}_{m(1)} = \frac{80}{20\sqrt{2}e^{j45^o}} = \frac{4}{\sqrt{2}}e^{-j45^o}\,A.$$

Мгновенное значение первой гармоники тока: $i_{(1)}(t) = \frac{4}{\sqrt{2}}\boldsymbol{sin}\left(10^3 t - 45^0\right)$ А.

3. Расчет на второй гармонике $2\omega = 2 \cdot 10^3\ {}^{1}\!/_{c}$:

$$X_{L(2)} = 2\omega L = 2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-2} = 20\,Ом,$$

$$X_{C(2)} = \frac{1}{2\omega C} = \frac{1}{2 \cdot 10^3 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 10\,Ом,$$

$$\underline{Z}_{ab(2)} = \frac{j20(-j10)}{j20 - j10} = \frac{200}{j10} = -j20\,Ом,$$

$$\underline{Z}_{вх(2)} = R + j\underline{Z}_{ab(2)} = 20 - j20\,Ом,$$

$$\underline{I}_{m(2)} = \frac{40e^{j45^o}}{20\sqrt{2}e^{-j45^o}} = \frac{2}{\sqrt{2}}e^{j90^o}\,A.$$

Мгновенное значение второй гармоники тока: $i_{(2)}(t) = \frac{2}{\sqrt{2}}\boldsymbol{sin}\left(2 \cdot 10^3 t + 90^0\right)$ А.

4. Полный ток:

$$i(t) = I_0 + i_{(1)}(t) + i_{(2)}(t) = 2 + \frac{4}{\sqrt{2}}\boldsymbol{sin}\left(10^3 t - 45^0\right) +$$

$$+\frac{2}{\sqrt{2}}\boldsymbol{sin}\left(2\cdot 10^3 t + 90^0\right)\text{А.}$$

5. Действующее значение тока:

$$I_{д} = \sqrt{I_0^2 + \frac{I_{m(1)}^2}{2} + \frac{I_{m(2)}^2}{2}} = \sqrt{2^2 + \frac{16}{2\cdot 2} + \frac{4}{2\cdot 2}} = \sqrt{4+4+1} = 3\,A.$$

Действующее значение напряжения:

$$U_{д} = \sqrt{U_0^2 + U_{(1)}^2 + U_{(2)}^2} = \sqrt{40^2 + \frac{80^2}{2} + \frac{40^2}{2}} = 74{,}8\,B.$$

6. Активная мощность источников:

$$P = P_0 + P_1 + P_2 = U_0 I_0 + U_1 I_1 \boldsymbol{cos}\,\varphi_1 + U_2 I_2 \boldsymbol{cos}\,\varphi_2 =$$

$$= 40\cdot 2 + \frac{80}{\sqrt{2}}\cdot\frac{4}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\boldsymbol{cos}\left(-45^o\right) + \frac{40}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\boldsymbol{cos}\left(45^o - 90^o\right) =$$

180 Вт.

Активная мощность в резисторах:

$$P_R = I_0^2 R + \frac{I_{m(1)}^2}{2}R + \frac{I_{m(2)}^2}{2}R = I_{д}^2 R = 20\cdot 9 = 180\,Bm.$$

7. Реактивная мощность:

$$Q = U_1 I_1 \boldsymbol{sin}\,\varphi_1 + U_2 I_2 \boldsymbol{sin}\,\varphi_2 =$$

$$= \frac{80}{\sqrt{2}}\cdot\frac{4}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\boldsymbol{sin}\left(-45^o\right) + \frac{40}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}\boldsymbol{sin}\left(-45^o\right) = -80 - 20 = -100\,Bap$$

8. Полная мощность: $S = U_{д}\cdot I_{д} = 74{,}8\cdot 3 = 224{,}5\,BA.$

$$\sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{180^2 + 100^2} = 205 \neq S.$$

Пример 11.8

В цепи рис.11.11. задано: $e(t) = 20 + 28\,\boldsymbol{sin}\,10^4 t - 14\,\boldsymbol{sin}\,2\cdot 10^3 t$ В, $L_1 = 1\,мГн, L_2 = 0{,}5\,мГн, C_1 = 5\,мкФ, R_1 = 10\,Ом$. Найти активную мощность, выделяемую в цепи.

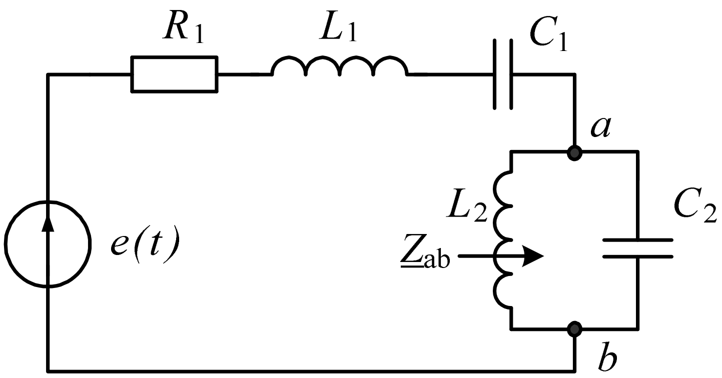


Рис.11.11

Решение

Так как активная мощность $P = I_д^2 R$ будем искать действующее значение тока.

1. Расчет на постоянном токе: $I_0 = 0$.

3. Расчет на первой гармонике $\omega = 10^4 \; {}^1\!/_c$. Вычисляем реактивные и комплексные сопротивления на первой гармонике:

$$X_{L1(1)} = \omega L_1 = 10^4 \cdot 10^{-3} = 10\,Ом,$$

$$X_{L2(1)} = \omega L_2 = 10^4 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3} = 5\,Ом;$$

$$X_{C1(1)} = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{10^4 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = 20\,Ом,$$

$$X_{C2(1)} = \frac{1}{\omega C_2} = \frac{1}{10^4 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} = 10\,Ом.$$

$$\underline{Z}_{ab(1)} = \frac{j5(-j10)}{j5 - j10} = +j10\,Ом,$$

$$\underline{Z}_{вх(1)} = 10 + j10 - j20 + j10 = 10\,Ом.$$

Вычисляем комплексную амплитуду и действующее значение тока первой гармоники:

$$I_{m(1)} = \frac{28}{10} = 2{,}8\,А, \; I_{д(1)} = \frac{2{,}8}{\sqrt{2}} = 2\,А.$$

4. Делаем аналогичный расчет на второй гармонике $2\omega = 2 \cdot 10^4 \; {}^1\!/_c$:

$$X_{L1(2)} = 2\omega L_1 = 20\,Ом,\; X_{L2(2)} = 2\omega L_2 = 10\,Ом,$$

$$X_{C1(2)} = \frac{1}{2\omega C_1} = 10\,Ом,\; X_{C2(2)} = \frac{1}{2\omega C_2} = 5\,Ом.$$

$$\underline{Z}_{ab(2)} = \frac{-j5(+j10)}{-j5+j10} = -j10\,Ом,$$

$$\underline{Z}_{вх(2)} = 10 + j20 - j10 - j10 = 10\,Ом.$$

$$I_{m(2)} = \frac{14}{10} = 1{,}4\,A,\; I_{д(2)} = \frac{1{,}4}{\sqrt{2}} = 1\,A.$$

5. Находим действующее значение негармонического тока:

$$I_д = \sqrt{I_0^2 + I_{(1)}^2 + I_{(2)}^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}\,A.$$

6. Находим активную мощность в цепи: $P = I_д^2 R = 8 \cdot 10 = 80\,Вт.$

Глава 12. ТРЕХФАЗНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

12.1. Принцип получения трехфазной системы ЭДС

Производство, передачу электрической энергии и электроснабжение потребителей осуществляют с использованием трехфазных электрических цепей. Трехфазную систему ЭДС вырабатывают трехфазными электромеханическими генераторами. Упрощенная схема такого генератора показана на рис.12.1.

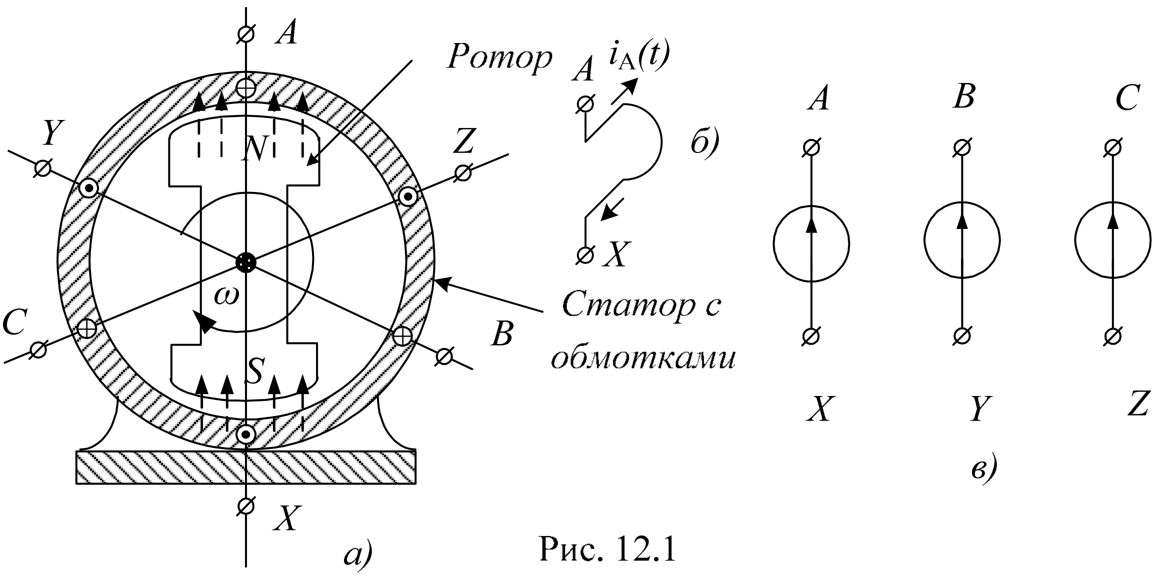


Рис. 12.1

В цилиндрическом статоре из электротехнической стали находятся три фазные обмотки A-X, B-Y, C-Z. Линейные проводники обмоток расположены в пазах статора параллельно оси цилиндра (рис.12.1б).

Три фазные обмотки повернуты в статоре на 120°. Ротор имеет катушки намагничивания (не показаны на рис.12.1) и приводится во вращение внешними силами (например, гидротурбиной). При вращении магнитного ротора в обмотках статора наводятся фазные ЭДС (рис. 12.1.в):

$$e_a(t) = E_m \sin \omega t,\; e_b(t) = E_m \sin\left(\omega t - 120^o\right),$$

$$e_c(t) = E_m \sin\left(\omega t + 120^o\right). \qquad (12.1)$$

Пример 12.1

Собрать модель трехфазного генератора с частотой $f = 50\,Гц$ и с действующим значением фазных напряжений 220В. Каждая фазная ЭДС подключена к активной нагрузке $R_ф = 1\,кОм$. Получить графики фазных напряжений.

Решение

1. Вычисляем амплитудное значение фазных напряжений.

$$E_{mA} = E_{mB} = E_{mC} = 220 \cdot \sqrt{2} = 311\,B.$$

2. Собираем схему модели (рис.12.2). Устанавливаем в генераторах напряжения амплитуды 311 В и фазы в соответствии с формулами (12.1).

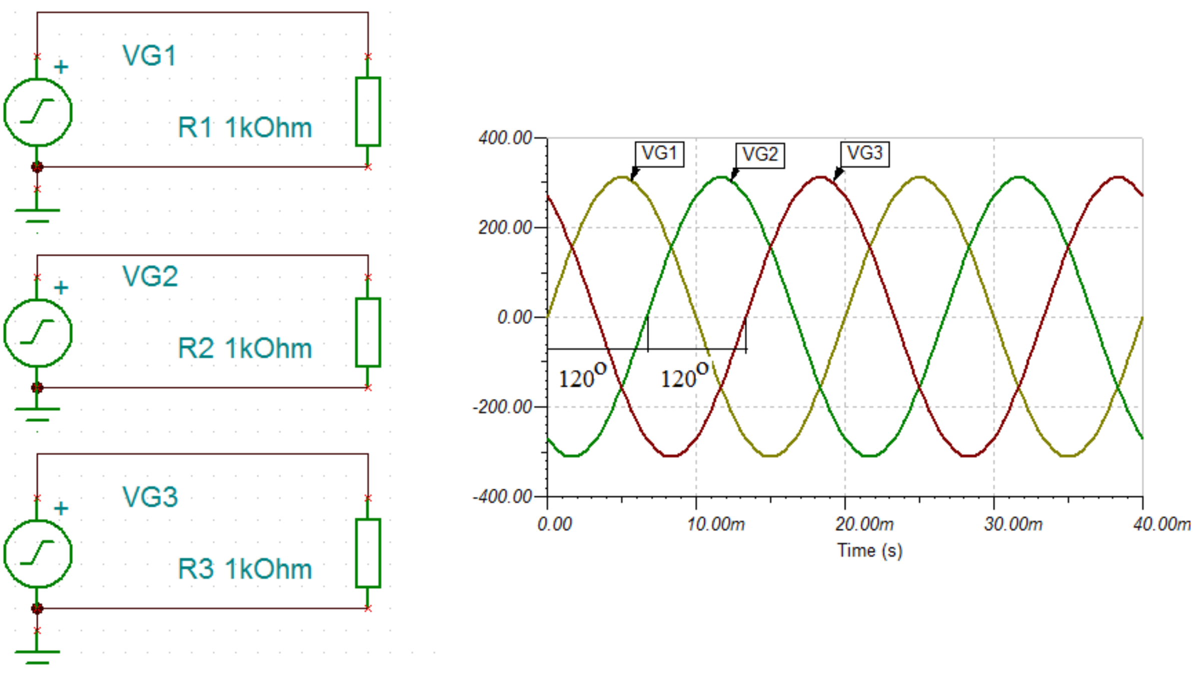


Рис.12.2

3. Выполняем *Analysis – Transient* на интервале 0-40 мс.

На графиках получили трехфазную систему ЭДС. В любой момент времени алгебраическая сумма мгновенных значений фазных ЭДС равна нулю.

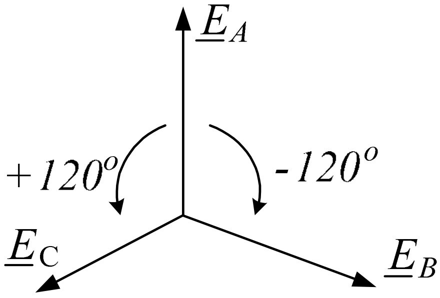


Рис. 12.3

Векторная диаграмма трехфазной системы ЭДС показана на рис.12.3. Геометрическая сумма трех векторов фазных ЭДС равна нулю:

$$\underline{E}_A + \underline{E}_B + \underline{E}_C = 0. \qquad (12.2)$$

Частота промышленной электрической сети в нашей стране равна $f = 50\,Гц$. Действующие напряжения на нагрузках потребителей составляют 220 В и 380 В.

12.2. Способы соединения трехфазного генератора с нагрузкой

Существует несколько способов соединения трехфазного генератора с нагрузкой.

1. *Независимое соединение* показано в модели рис.12.2. Каждая фаза генератора непосредственно подключена к своей нагрузке. Связь между фазами отсутствует. Работают три независимых цепи и требуется шесть проводов. Поэтому независимое соединение неэкономно.

2. *Соединение «Звезда-Звезда» с использованием нулевого провода* показано на рис.12.4. Фазные ЭДС $\underline{E}_A, \underline{E}_B, \underline{E}_C$ соединены своими зажимами *x, y, z* в узле *N*. Фазные нагрузки $\underline{Z}_A, \underline{Z}_B, \underline{Z}_C$ соединены в узле *n*. Узлы *N* и *n* называют *нейтральными точками* источника и приемника. Эти нейтральные точки соединяются *нулевым проводом (или сокращенно нейтралью)*. Остальные провода, соединяющие фазные ЭДС и фазные нагрузки, называют *линейными проводами.*

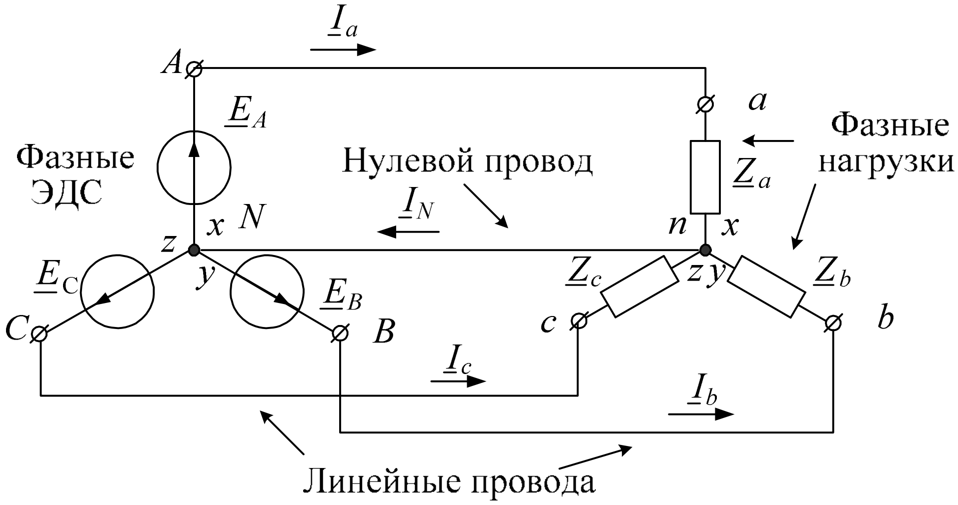


Рис. 12.4

Запишем комплексные действующие значения фазных ЭДС:

$$\underline{E}_A = Ee^{j0^o}, \; \underline{E}_B = Ee^{-j120^o}, \; \underline{E}_C = Ee^{+j120^o}. \qquad (12.3)$$

В симметричном трехфазном генераторе напряжения фазных ЭДС равны по модулю.

Выполним расчет фазных токов:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{E}_A}{\underline{Z}_A} = \frac{E}{z_A e^{j\varphi_a}} = I_A e^{-j\varphi_a}, \qquad (12.4)$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{E}_B}{\underline{Z}_B} = \frac{E e^{-j120^o}}{z_B e^{j\varphi_b}} = I_B e^{-j\left(120^o + \varphi_b\right)}, \qquad (12.5)$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{E}_C}{\underline{Z}_C} = \frac{E e^{+j120^o}}{z_C e^{j\varphi_c}} = I_C e^{+j\left(120^o - \varphi_c\right)}. \qquad (12.6)$$

По первому закону Кирхгофа ток нейтрали равен сумме фазных токов (рис.12.4):

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C. \qquad (12.7)$$

О п р е д е л е н и е

Напряжения (токи) в фазных обмотках генератора и напряжения (токи) на фазах приемника называются *фазными напряжениями и токами*.

Напряжения между линейными проводами и токи в линейных проводах называются *линейными напряжениями и токами*. Линейные напряжения можно найти по векторной диаграмме (рис.12.5). Так

$$\underline{U}_{ab} = \underline{E}_A - \underline{E}_B = \sqrt{3} E e^{j30^o}, \ \underline{U}_{ca} = \underline{E}_C - \underline{E}_A = \sqrt{3} E e^{j150^o},$$

$$\underline{U}_{bc} = \underline{E}_A - \underline{E}_B = \sqrt{3} E e^{-j90^o}. \qquad (12.8)$$

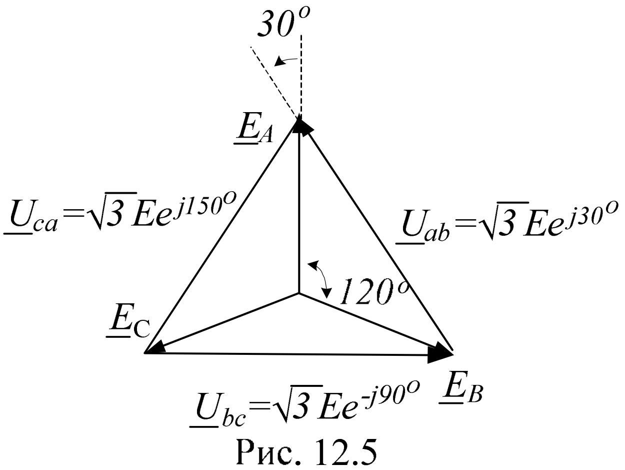


Рис. 12.5

Запомним, что линейное напряжение больше фазного в $\sqrt{3}$ раз. Так для фазного напряжения 220 В линейное напряжение составит 380 В.

12.3. Симметричная нагрузка в соединении звезда-звезда

Рассмотрим случай, когда все фазные нагрузки равны:

$$\underline{Z}_A = \underline{Z}_B = \underline{Z}_C = z e^{j\varphi}. \qquad (12.9)$$

Такую нагрузку называют *симметричной*. При этом токи равны по модулю, одинаково сдвинуты по фазе относительно фазных напряжений и образуют звезду (рис.12.6):

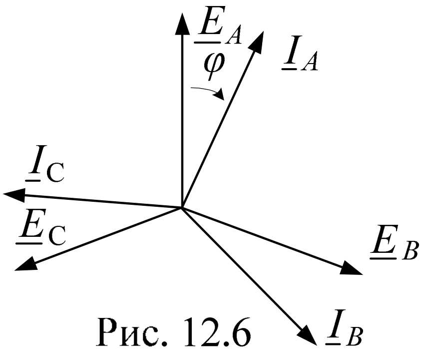


Рис. 12.6

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{E}_A}{\underline{Z}_A} = \frac{E}{ze^{j\varphi}} = Ie^{-j\varphi}, \tag{12.10}$$

$$\underline{I}_B = Ie^{-j120^o} e^{-j\varphi}, \tag{12.11}$$

$$\underline{I}_C = Ie^{+j120^o} e^{-j\varphi}. \tag{12.12}$$

По векторной диаграмме (рис.12.6) находим сумму фазных токов:

$$\underline{I}_N = \underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0. \tag{12.13}$$

При симметричной нагрузке ток в нулевом проводе равен нулю. Нулевой провод не нужен. Достаточно трех фазных проводов.

Трехпроводную систему «Звезда-звезда» используют для питания трехфазных двигателей и «условно симметричных» нагрузок.

Пример 12.2

Выполнить моделирование трехфазной цепи по схеме рис.12.7. Установить в генераторах фазные напряжения с частотой 50 Гц и амплитудой 120 В:

$$\underline{E}_{mA} = 120e^{j0^o}\,B, \; \underline{E}_{mB} = 120e^{-j120^o}\,B, \; \underline{E}_{mC} = 120e^{+j120^o}\,B$$

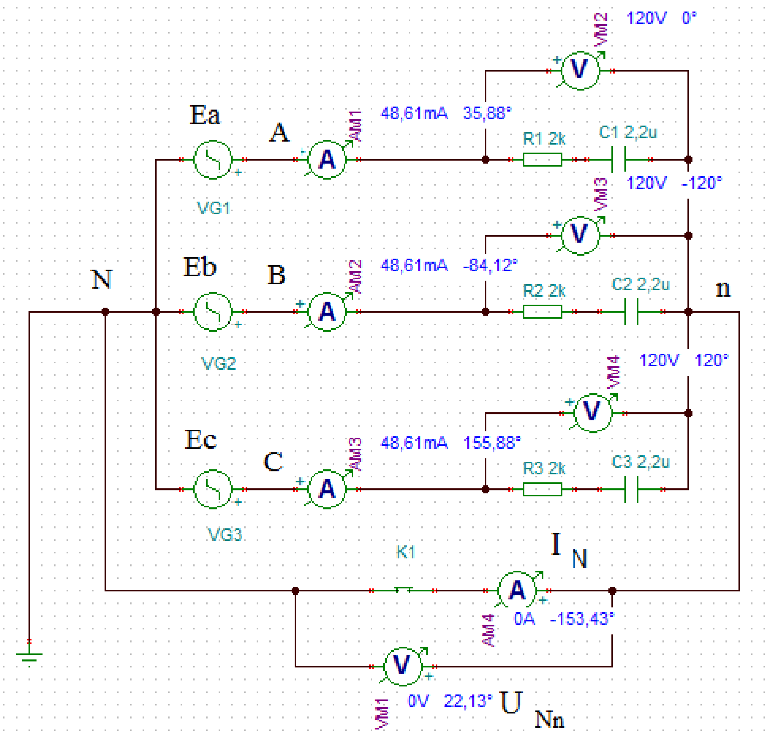


Рис.12.7

1. Для случая симметричной нагрузки при замкнутом ключе K1 выполнить *Analysis-AC Analysis-Calculate nodal voltages* и записать показания амперметров и вольтметров. Пояснить полученные показания.

2. Разомкнуть ключ K1. Повторить измерения. Убедиться, что вольтметр VM1, измеряющий *напряжение смещения нейтрали* U_{Nn}, показывает нулевое значение.

3. Установить величину резистора $R_1 = 4\,кОм$. Провести измерения по п. 1 и 2. Наблюдать появление тока в нулевом проводе и *напряжения смещения нейтрали* при несимметричной нагрузке. Без нулевого провода напряжения на фазах несимметричной нагрузки становятся неодинаковыми.

12.4. Несимметричная нагрузка в соединении звезда-звезда

В примере 12.2 мы видели, что при несимметричной нагрузке ток в нулевом проводе не равен нулю.

Без нулевого провода появляется *напряжение смещения нейтрали*, которое можно вычислить по методу двух узлов.

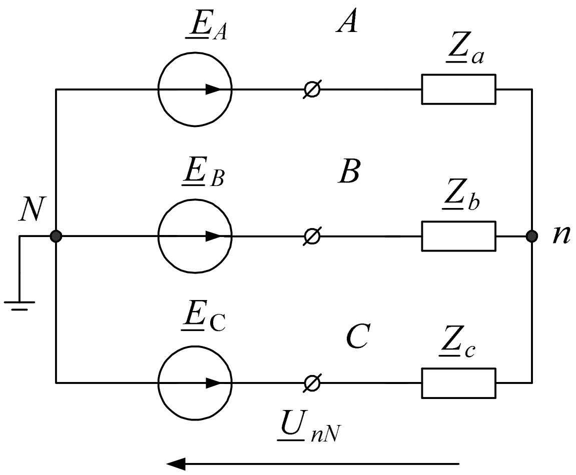


Рис. 12.8

В схеме (рис.12.8) находим:

$$\underline{U}_{nN} = \frac{\underline{E}_A\underline{Y}_A + \underline{E}_B\underline{Y}_B + \underline{E}_C\underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C}. \quad (12.14)$$

Линейные и фазные токи рассчитываем по закону Ома:

$$\underline{I}_A = \frac{\underline{E}_A - \underline{U}_{nN}}{\underline{Z}_A}, \quad (12.15)$$

$$\underline{I}_B = \frac{\underline{E}_B - \underline{U}_{nN}}{\underline{Z}_B}, \quad (12.16)$$

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{E}_C - \underline{U}_{nN}}{\underline{Z}_C}. \quad (12.17)$$

12.5. Соединение треугольник-треугольник

На рис.12.9 фазные генераторы и нагрузки соединены по схеме треугольник-треугольник.

Примем равной нулю начальную фазу ЭДС $\underline{E}_{BA} = \underline{U}_{ab} = E$. Тогда

$\underline{U}_{bc} = \underline{E}_{CB} = E \cdot e^{-j120^o}$, $\underline{U}_{ca} = \underline{E}_{AC} = E \cdot e^{+j120^o}$.

В треугольнике фазных ЭДС сумма напряжений по контуру равна нулю:

$$E + Ee^{-j120^o} + Ee^{+j120^o} =$$

$$= E\left(1+\cos\left(-120^o\right)-j\sin 120^o+\cos\left(120^o\right)+j\sin 120^o\right)=E\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=0\cdot$$

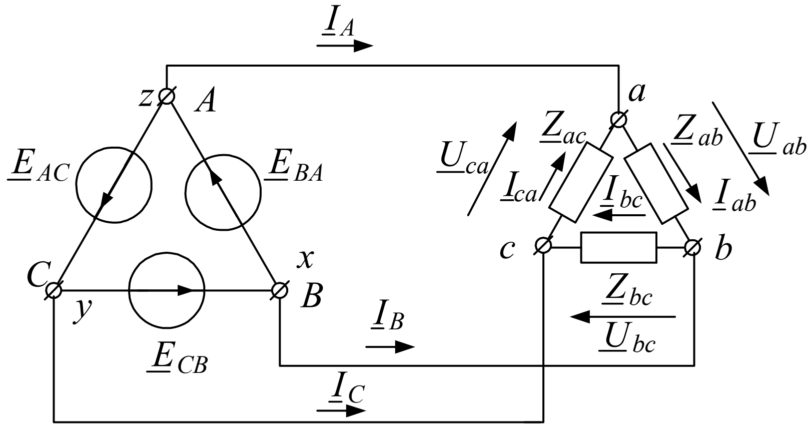


Рис. 12.9

Линейные напряжения равны фазным ЭДС: $\underline{U}_{ab}=\underline{E}_{BA}=E$, $\underline{U}_{bc}=\underline{E}_{CB}=E\cdot e^{-j120^o}$, $\underline{U}_{ca}=\underline{E}_{AC}=E\cdot e^{+j120^o}$. (12.18)

По модулю линейные напряжения равны фазным: $U_л = U_ф$.

В фазах нагрузки действуют фазные токи:

$$\underline{I}_{ab}=\frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}_{ab}},\ \underline{I}_{bc}=\frac{\underline{U}_{bc}}{\underline{Z}_{bc}},\underline{I}_{ca}=\frac{\underline{U}_{ca}}{\underline{Z}_{ca}}. \qquad (12.19)$$

Линейные токи:

$$\underline{I}_A=\underline{I}_{ab}-\underline{I}_{ca},\ \underline{I}_B=\underline{I}_{bc}-\underline{I}_{ab},\ \underline{I}_C=\underline{I}_{ca}-\underline{I}_{bc}. \qquad (12.20)$$

При симметричной нагрузке, когда $\underline{Z}_{ab}=\underline{Z}_{bc}=\underline{Z}_{ca}=Ze^{j\varphi}$, фазные токи равны по модулю: $I_{ab}=I_{bc}=I_{ca}=I_Ф$.

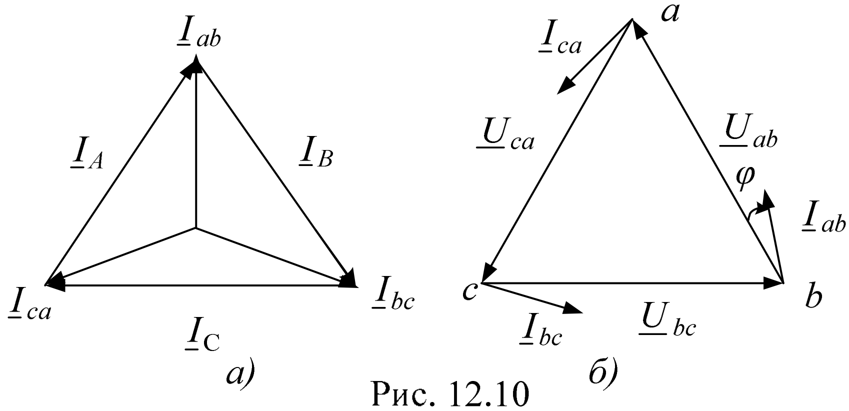


Рис. 12.10

На рис.12.10а показана *векторная диаграмма линейных и фазных токов* для соединения треугольник-треугольник при симметричной нагрузке.

Из диаграммы видно, что линейный ток больше фазного в $\sqrt{3}$ раз:

$$I_{л} = \sqrt{3}\, I_{Ф}. \qquad (12.21)$$

Векторная диаграмма линейных напряжений и фазных токов для симметричной нагрузки показана на рис.12.10б.

12.6. Выбор способа соединения потребителей

1. В случае неравномерной нагрузки (например, бытовой) потребителей соединяют треугольником или звездой с нулевым проводом.
2. При симметричной нагрузке возможно соединение потребителей треугольником и звездой без нулевого провода.

12.7. Мощность в трехфазной цепи

При любом соединении и любой нагрузке комплексная мощность каждой фазы равна:

$$\tilde{S} = \underline{U}_{Ф}\overset{*}{\underline{I}}_{Ф}. \qquad (12.22)$$

Суммарная мощность трех фаз:

$$\tilde{S}_{\Sigma} = \tilde{S}_{A} + \tilde{S}_{B} + \tilde{S}_{C}. \qquad (12.23)$$

Получаем для активной мощности:

$$P_{\Sigma} = P_{A} + P_{B} + P_{C}. \qquad (12.24)$$

Для реактивной мощности:

$$Q_{\Sigma} = Q_{A} + Q_{B} + Q_{C}. \qquad (12.25)$$

При симметричной нагрузке мощности фаз равны и суммарная активная мощность вычисляется по формуле:

$$P_{\Sigma} = 3U_{Ф}I_{Ф}\,\boldsymbol{cos}\,\varphi = \sqrt{3}U_{Л}I_{Л}\,\boldsymbol{cos}\,\varphi. \qquad (12.26)$$

12.8. Примеры расчета трехфазных цепей

Пример 12.3

В трехфазной цепи (рис.12.11) дано: $E_{ф} = 120\,В,\ R_{a} = 40\,Ом,$ $R_{b} = R_{c} = 60\,Ом$. Построить векторную диаграмму токов и найти ток нейтрали.

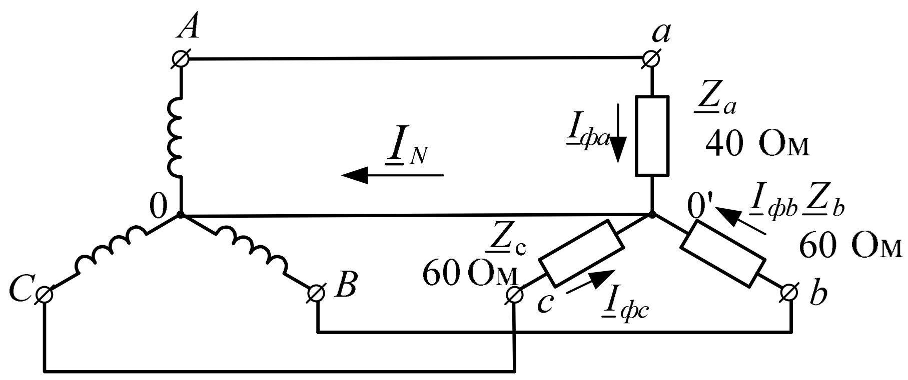


Рис. 12.11

Р е ш е н и е

1. Находим фазные токи:

$$\underline{I}_{фa} = \frac{\underline{E}_{фa}}{R_a} = \frac{120e^{j0^o}}{40} = 3e^{j0^o}\ A,$$

$$\underline{I}_{фb} = \frac{\underline{E}_{фb}}{R_b} = \frac{120e^{-j120^o}}{60} = 2e^{-j120^o}\ A,$$

$$\underline{I}_{фc} = \frac{\underline{E}_{фc}}{R_c} = \frac{120e^{j120^o}}{60} = 2e^{j120^o}\ A.$$

Находим ток нейтрали:

$$\underline{I}_N = \underline{I}_{фa} + \underline{I}_{фb} + \underline{I}_{фc} = 3 + 2e^{-j120^o} + 2e^{j120^o} =$$

$$= 3 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) + j2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\left(-\frac{1}{2}\right) + j2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3 - 1 - 1 = 1A\cdot$$

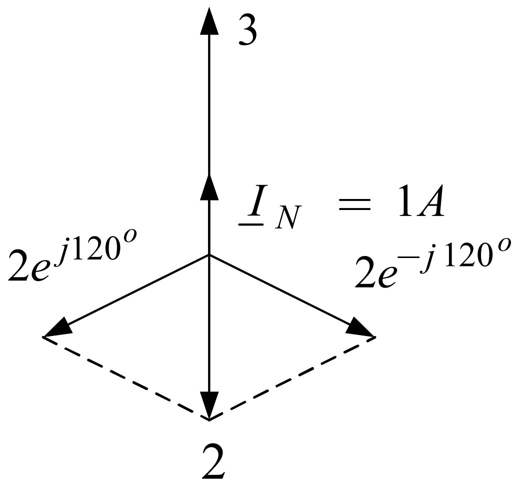


Рис. 12.12

Строим векторную диаграмму (рис.12.12).

Пример 12.4

В трехфазной цепи (рис.12.13) $E_ф = 120\,B$, $R_a = 20\,Ом$, $R_b = R_c = 40\,Ом$. Найти напряжение смещения нейтрали $U_{00'}$.

Р е ш е н и е

Решаем методом двух узлов:

$$\underline{U}_{00'} = \frac{\underline{E}_{фa}G_a + \underline{E}_{фb}G_b + \underline{E}_{фc}G_c}{G_a + G_b + G_c} =$$

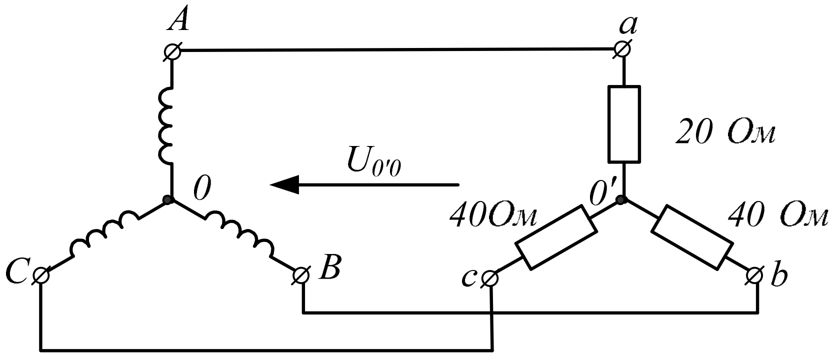


Рис. 12.13

$$=\frac{120\cdot\dfrac{1}{20}+120e^{-j120^o}\cdot\dfrac{1}{40}+120e^{j120^o}\,\dfrac{1}{40}}{\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{40}+\dfrac{1}{40}}=$$

$$=\frac{6+3\left(-\dfrac{1}{2}-j\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+3\left(-\dfrac{1}{2}+j\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\dfrac{1}{10}}=\frac{6-1{,}5-1{,}5}{\dfrac{1}{10}}=30B\,.$$

Пример 12.5

В трехфазной цепи с параметрами $E_ф = 127\,B$, $R_a = R_b = R_c = 40\,Ом$ произошло замыкание фазы А.

Построить векторную диаграмму напряжений и найти фазные токи.

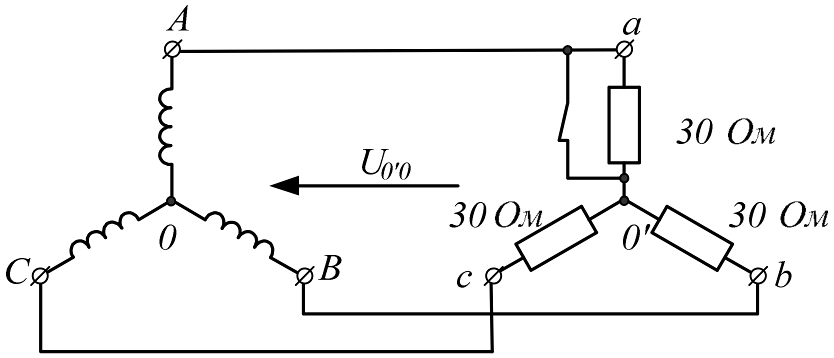


Рис. 12.14

Решение

После замыкания узел 0’ соединен с фазой $\underline{E}_{фa}$ (рис.12.15).

Фазы нагрузки b и c оказались подключенными к линейным напряжениям.

Находим фазные токи:

$$\underline{I}_{\phi b} = \frac{\underline{U}_{b0'}}{R} = \frac{\underline{E}_{\phi a}\sqrt{3}e^{-j150^o}}{40} = \frac{220e^{-j150^o}}{40} = 5{,}5e^{-j150^o}\ A$$

$$\underline{I}_{\phi c} = \frac{\underline{U}_{c0'}}{R} = \frac{\underline{E}_{\phi a}\sqrt{3}e^{j150^o}}{40} = \frac{220e^{j150^o}}{40} = 5{,}5e^{j150^o}\ A$$

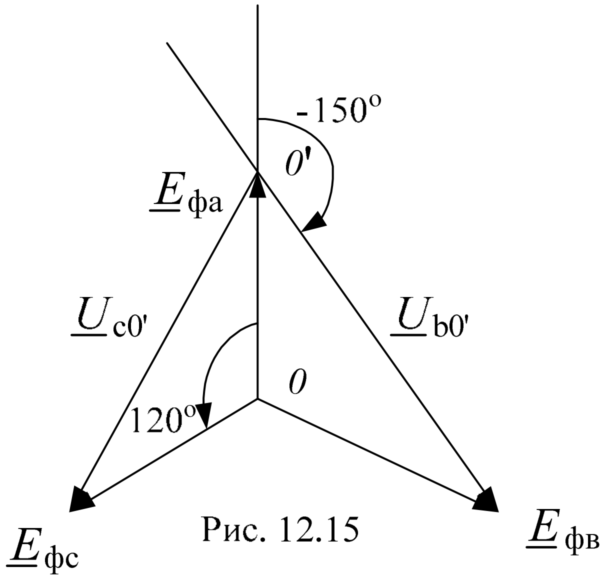


Рис. 12.15

Пример 12.6

В цепи (рис.12.16) $E_\phi = 127\,B, R_{ab} = R_{bc} = R_{ca} = 110\,Ом.$ Найти линейные токи.

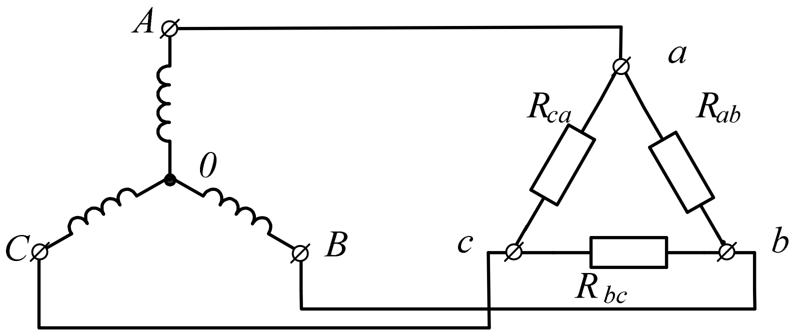


Рис. 12.16

Решение

Нагрузка включена треугольником. Находим действующие линейные напряжения:

$$U_л = U_{ab} = U_{bc} = U_{ca} = \sqrt{3}E_\phi = \sqrt{3}\cdot 127 = 220\,B.$$

Фазные токи: $I_{ab} = \dfrac{U_{ab}}{R_{ab}} = \dfrac{220}{110} = 2A = I_{bc} = I_{ca}$.

Линейные токи: $I_л = \sqrt{3} I_ф = 2\sqrt{3} A$.

Пример 12.7

В трехфазной цепи (рис.12.17) $E_ф$ =127 В. Построить векторную диаграмму токов и напряжений. Найти активную и реактивную мощность в цепи.

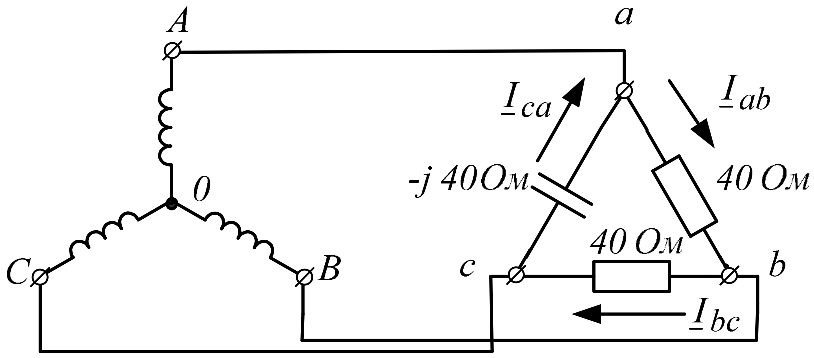


Рис. 12.17

Решение

1. Фазные нагрузки подключены к линейным напряжениям. Найдем фазные токи:

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{ab}}{40} = \frac{\underline{E}_a - \underline{E}_b}{40} = \frac{127\sqrt{3}e^{j30^o}}{40} = 5{,}5\,e^{j30^o}\,A,$$

$$\underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{bc}}{40} = \frac{220e^{-j90^o}}{40} = 5{,}5\,e^{-j90^o}\,A\ ,$$

$$\underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{ca}}{40} = \frac{220e^{j150^o}}{-j40} = 5{,}5\,e^{j240^o}\,A\,.$$

2. Строим векторную диаграмму токов и напряжений:

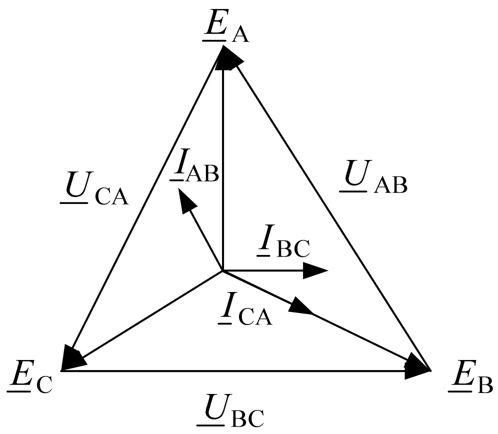


Рис. 12.18

3. Активная мощность выделяется в резисторах:

$$P = I_{ab}^2 R + I_{bc}^2 R = 2 \cdot 5{,}5^2 \cdot 40 = 2420\,Вт.$$

Реактивная мощность в емкости:

$$Q = I_{ca}^2 \cdot X_C = 5{,}5^2 \cdot 40 = 1210\,Вар.$$

Глава 13. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО И ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

13.1. Определение нелинейных цепей

Нелинейные электрические цепи содержат один или несколько нелинейных элементов (НЭ) с нелинейными вольт-амперными характеристиками, вебер-амперными и кулон - вольтными характеристиками.

В нелинейных цепях не выполняется принцип наложения. Поэтому нельзя применять методы контурных токов, узловых напряжений и т.п. Расчеты ведут графическими методами с использованием нелинейных характеристик.

13.2. Виды нелинейных элементов в цепях постоянного тока

Неуправляемые нелинейные элементы

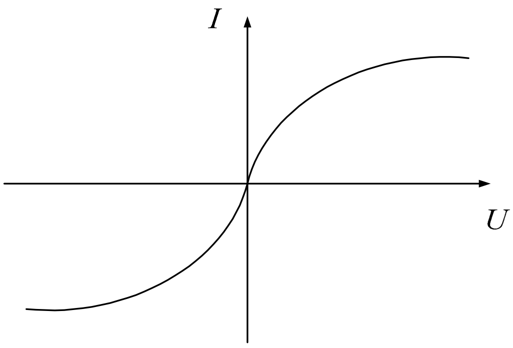


Рис. 13.1

В лампе накаливания при нагревании увеличивается сопротивление спирали. Вольт-амперная характеристика нелинейная и симметричная (рис.13.1):

$$f(x) = -f(-x).$$

Полупроводниковые диоды

Полупроводниковый диод изображен на рис.13.2а. При положительном напряжении на аноде диод открыт, его сопротивление мало и прямой ток может быстро увеличиваться (рис13.2б).

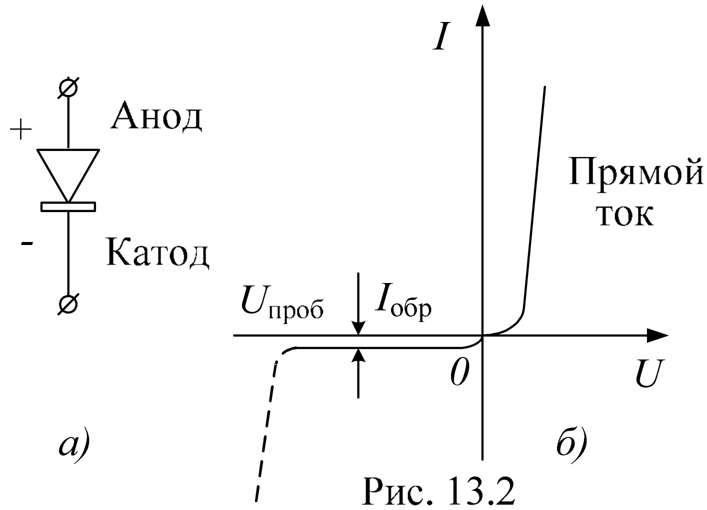


Рис. 13.2

При отрицательном напряжении на аноде диод закрыт, обратный ток $I_{обр}$ не превышает десятков микроампер. Если обратное напряжение превышает напряжение пробоя $U_{проб}$, обратный ток резко возрастает и диод выходит из строя. ВАХ диода (рис.13.2б) нелинейная.

С т а б и л и т р о н ы

Стабилитрон изображен на рис.13.3а. ВАХ стабилитрона при отрицательном напряжении на аноде $U_{стаб}$ имеет падающий участок лавинного пробоя. Лавинный пробой является обратимым, стабилитрон не разрушается и восстанавливается после снятия напряжения. Напряжение $U_{стаб}$ для каждого типа стабилитрона достаточно точно фиксировано. При изменении тока в пределах от $I_{\boldsymbol{min}}$ до $I_{\boldsymbol{max}}$ напряжение на стабилитроне меняется в очень малых пределах $\Delta U_{стаб}$. Включенный по схеме (рис.13.3в) стабилитрон КС156 стабилизирует выходное напряжение 5,6 В.

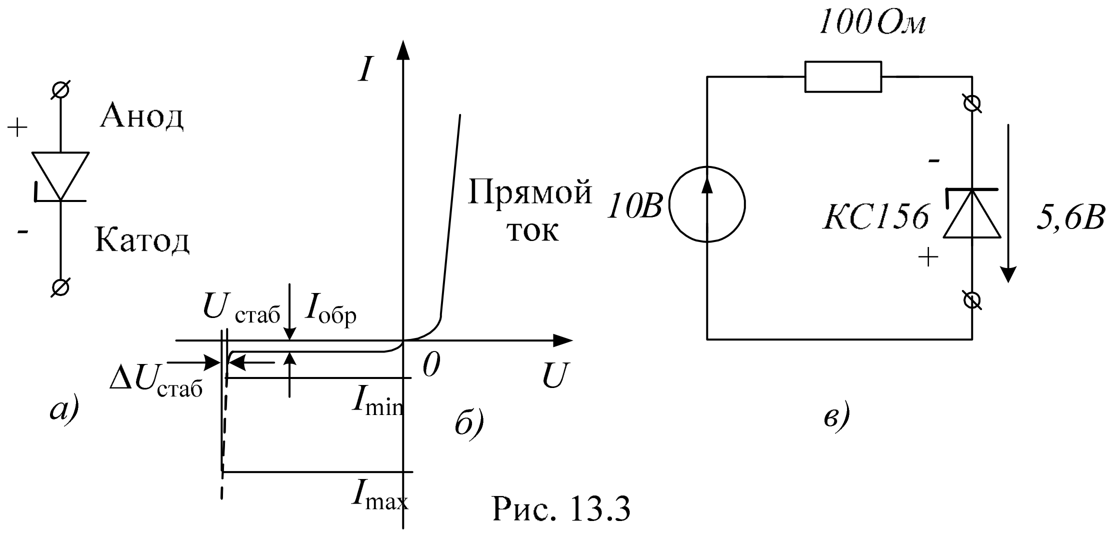


Рис. 13.3

У п р а в л я е м ы е Н Э т р а н з и с т о р ы

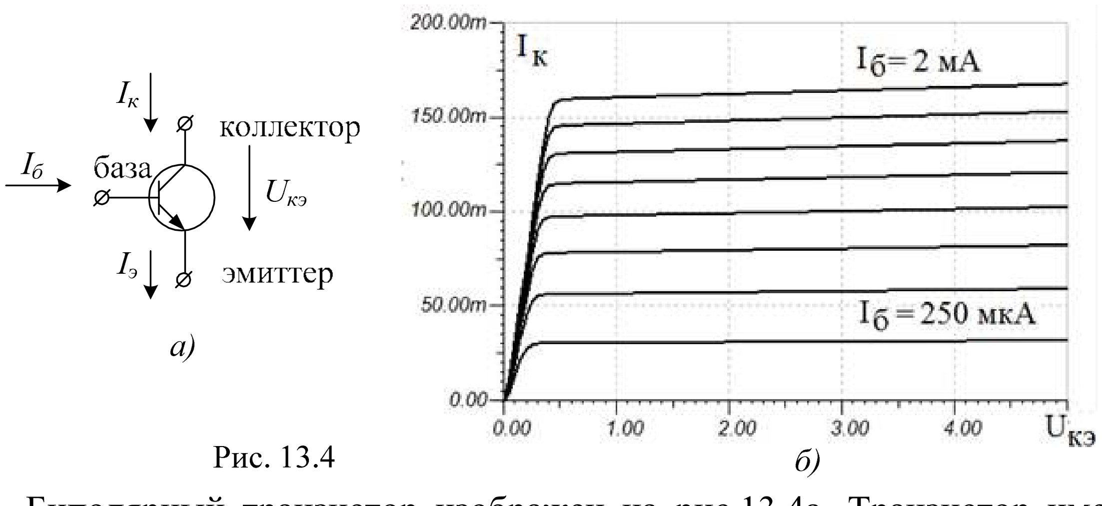


Рис. 13.4

Биполярный транзистор изображен на рис.13.4а. Транзистор имеет выводы: коллектор, база, эмиттер. Ток коллектора зависит от напряжения между коллектором и эмиттером $U_{кэ}$ и управляется током базы $I_б$. Семейство выходных вольтамперных характеристик биполярного транзистора показано на рис.13.4б.

13.3. Статическое и дифференциальное сопротивление нелинейного резистора

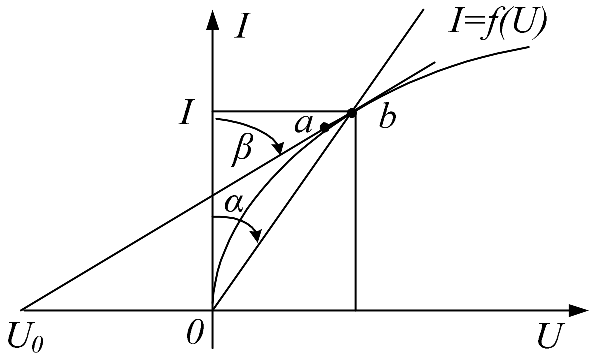


Рис. 13.5

На рис.13.5 изображена нелинейная характеристика $I = f(U)$.

Статическое сопротивление в точке «b» находят так:

$$R_{ст} = U/I. \qquad (13.1)$$

С учетом масштабов по осям:

$$R_{ст} = tg\alpha \frac{m_U}{m_I}. \qquad (13.2)$$

Дифференциальное сопротивление находят на малом линейном участке *ab*:

$$R_{диф} = \frac{dU}{dI} = tg\beta \frac{m_U}{m_I}. \qquad (13.3)$$

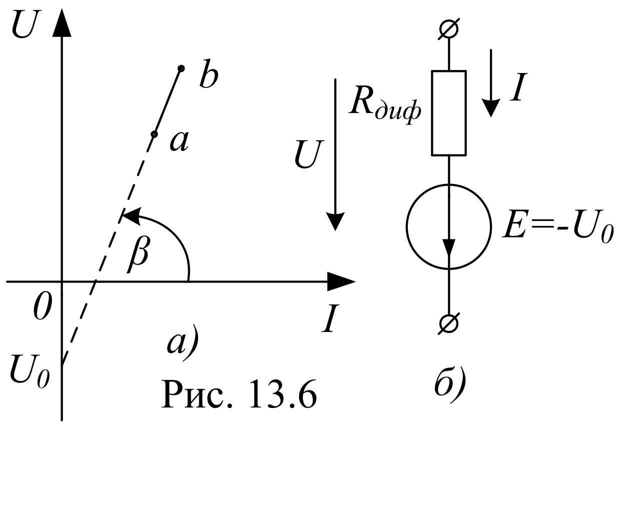


Рис. 13.6

На малом участке *ab* нелинейный резистор можно заменить линейной моделью с источником напряжения (рис.13.6) и пользоваться линейными методами расчетов.

Для линейной модели рис.13.6б запишем уравнение линейной ВАХ:

$$U = I \cdot R_{диф} - E. \qquad (13.4)$$

13.4. Расчет схем с нелинейными резисторами на постоянном токе

Последовательное соединение линейного и нелинейного резистора

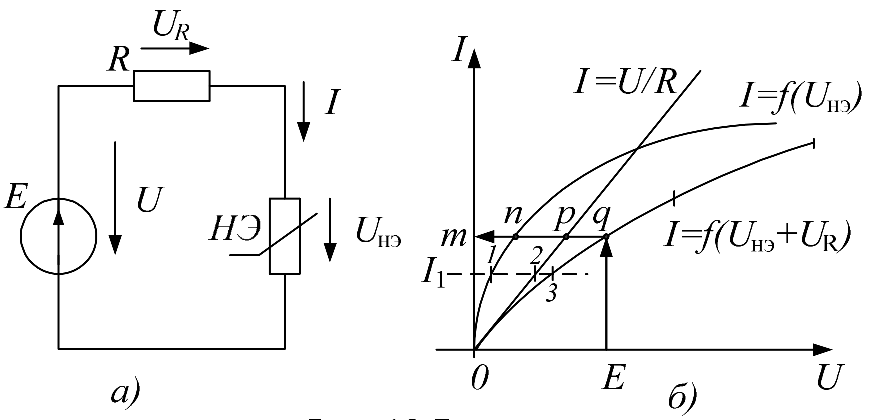


Рис. 13.7

На рис.13.7а показана схема последовательного соединения линейного резистора R и нелинейного резистора *НЭ*. На рис.13.7б изображены линейная ВАХ $I = U/R$ и ВАХ нелинейного резистора $I = f(U_{нэ})$.

Требуется найти ток в цепи *графическим способом*.

1-й способ. Построение результирующей ВАХ последовательного соединения суммированием напряжений.

Для каждого значения тока (например, для I_1) суммируем значения напряжений на вольт-амперных характеристиках и находим суммарную ВАХ $I = f(U_{нэ} + U_R)$.

На результирующей ВАХ находим точку *q* с абсциссой $U = E$ и ток на оси ординат в точке *m*.

2-й способ. Построение нагрузочной прямой

По схеме (рис.13.7а) имеем уравнение: $U_{нэ} = E - IR$ или:

$$I = \frac{E}{R} - \frac{U_{нэ}}{R}. \qquad (13.5)$$

Получили уравнение *нагрузочной прямой*.

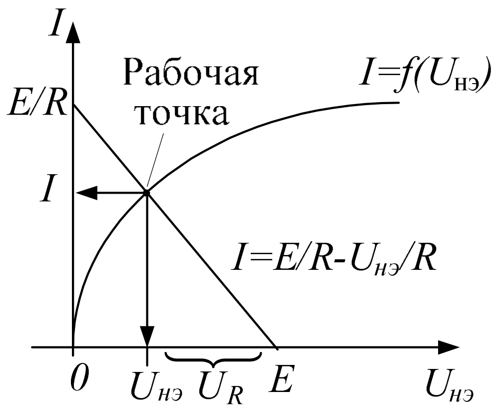


Рис. 13.8

Строим графики ВАХ и нагрузочной прямой (рис.13.8). Нагрузочная прямая на осях координат отсекает отрезки E/R и E.

Точку пересечения ВАХ с нагрузочной прямой называют *рабочей точкой*. В рабочей точке выполняется условие:

$$U_{нэ} + U_R = E. \qquad (13.6)$$

Находим ток I и напряжение $U_{нэ}$.

Сложную цепь с одним НЭ (рис.13.9) заменяем активным двухполюсником и эквивалентным генератором. Проводим графический расчет вторым методом.

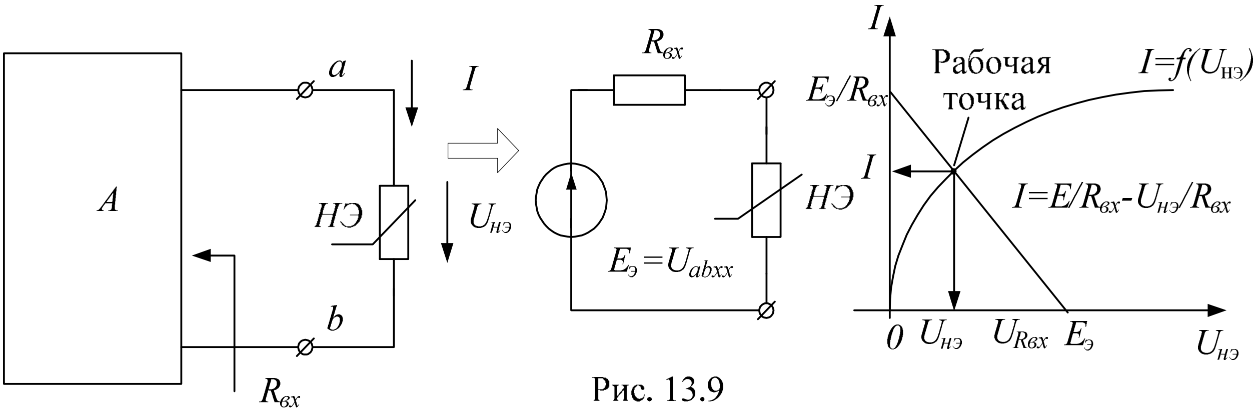


Рис. 13.9

13.5. Последовательное соединение двух нелинейных элементов

В схеме (рис.13.10а) два нелинейных элемента соединены последовательно. Применяют два способа *графического* расчета.

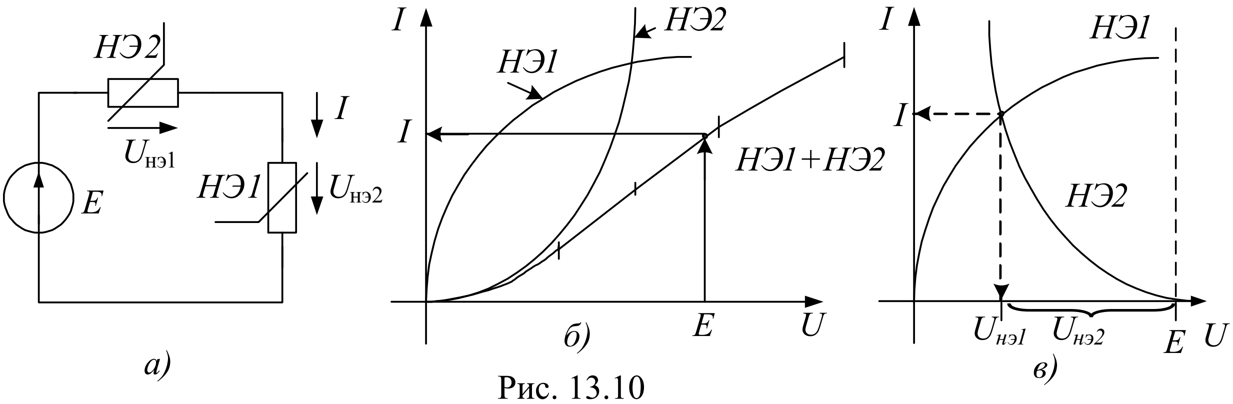


Рис. 13.10

В первом способе (рис.13.10б) суммируют напряжения двух нелинейных ВАХ и получают график результирующей ВАХ *НЭ1+НЭ2*. На нем для значения $U = E$ находят ток в цепи.

Во втором способе используют уравнение для напряжения на втором нелинейном элементе:

$$U_{нэ2} = E - U_{нэ1}. \qquad (13.7)$$

На чертеже (рис.13.10в) график ВАХ для второго НЭ надо строить по формуле:

$$I = f_{нэ2}(E - U_{нэ1}). \qquad (13.8)$$

Этот график будет зеркальным отражением исходной ВАХ второго НЭ относительно вертикальной оси, проведенной в точке с абсциссой E.

Точка пересечения двух графиков дает значение тока и напряжений на нелинейных элементах.

13.6. Параллельное соединение НЭ

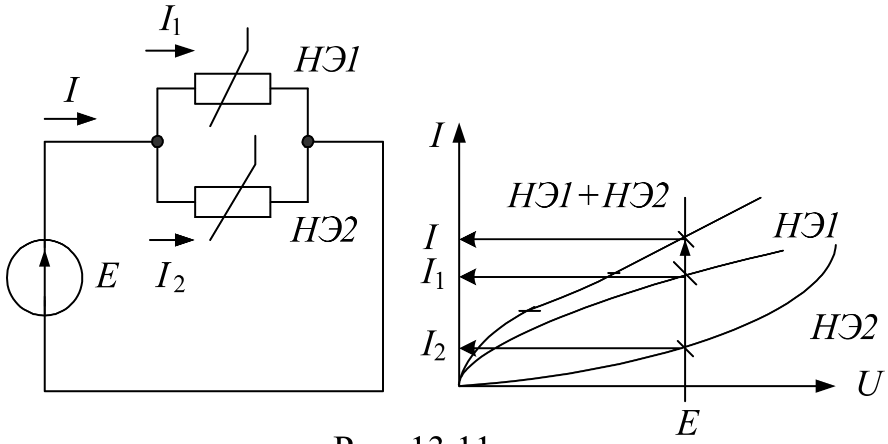


Рис. 13.11

Расчет токов в параллельном соединении НЭ (рис.13.11) можно провести, графически просуммировав токи двух графиков ВАХ для *НЭ1* и *НЭ2*. На результирующей ВАХ найдем входной ток I и токи I_1 и I_2.

13.7. Расчет разветвленной нелинейной цепи методом двух узлов

На рис.13.12а изображена разветвленная нелинейная цепь. Графики ВАХ нелинейных элементов показаны на рис.13.12б. Найти токи в цепи.

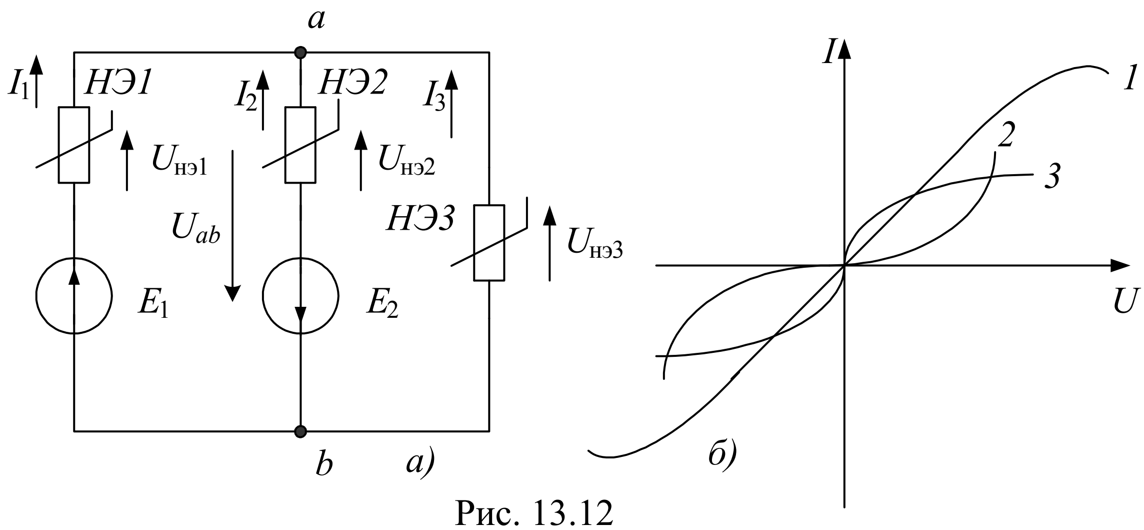


Рис. 13.12

Примем для определенности, что $E_1 = 3E_2$.

По первому закону Кирхгофа: $I_1 + I_2 + I_3 = 0$.

Составим уравнения по второму закону Кирхгофа для расчета напряжения U_{ab} в каждой ветви.

Для первой ветви:

$$U_{ab} = E_1 - U_{нэ1}. \tag{13.9}$$

Для второй ветви:

$$U_{ab} = -E_2 - U_{нэ2} \ . \tag{13.10}$$

Для третьей ветви:

$$U_{ab} = -U_{нэ3} \ . \tag{13.11}$$

Из уравнений (13.9) – (13.11) выразим напряжения на нелинейных элементах в функции от U_{ab}:

$$U_{нэ1} = E_1 - U_{ab}, \tag{13.12}$$

$$U_{нэ2} = -E_2 - U_{ab}, \tag{13.13}$$

$$U_{нэ3} = -U_{ab}. \tag{13.14}$$

Построим графики токов в нелинейных элементах в зависимости от U_{ab}, преобразуя ВАХ с учетом источников напряжения (рис.13.13). Так график тока в НЭ1 будет проходить через нуль, когда $U_{ab} = E_1$. При $U_{ab} < E_1$ напряжение $U_{нэ1}$ будет положительным и ток в НЭ1 будет возрастать.

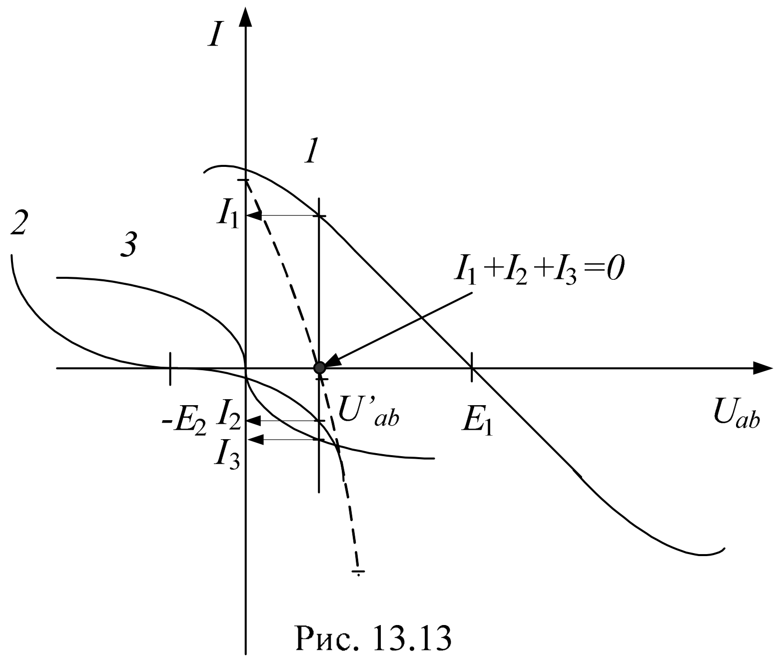


Рис. 13.13

Суммируем графики токов и строим пунктирную линию суммы токов.

Находим выполнение условия:

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0 \ .$$

Находим напряжение U'_{ab} и токи в ветвях.

Пример 13.1

На рис.13.14а показана схема с нелинейным резистором. Вольт-амперная характеристика $U_{НЭ}(I)$ изображена на рис.1314в. Найти ток в нелинейном резисторе и напряжение на нем.

Решение

1. Преобразуем схему рисю1314а к эквивалентному генератору. Отключим нелинейный резистор и найдем $U_{abxx} = 6В$ и $R_{вхab} = 1 Ом$.

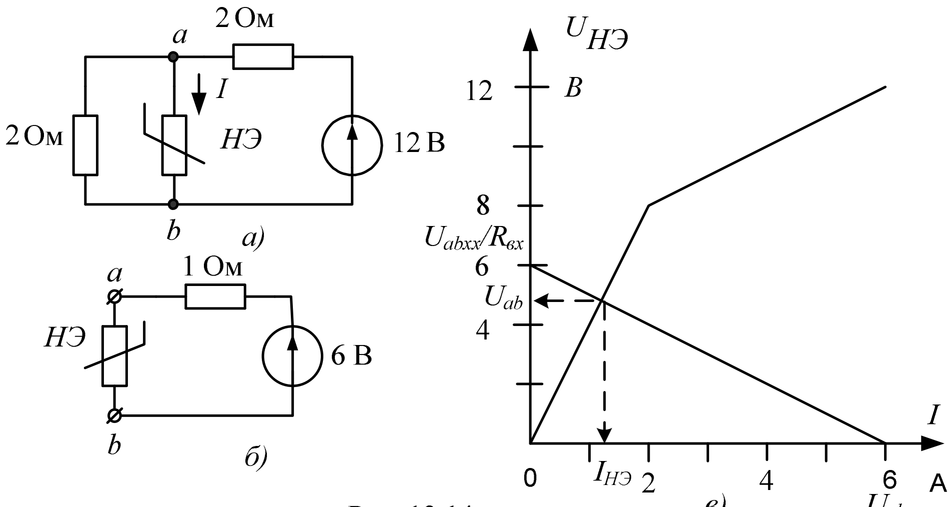


Рис. 13.14

2. Для схемы с эквивалентным генератором (рис.1314б) на графике ВАХ построим нагрузочную прямую. Пересечение нагрузочной прямой с ВАХ дает значение тока в НЭ и напряжения на нем.

13.8. Нелинейные цепи переменного тока

В нелинейных цепях переменного тока применяют резистивные, индуктивные и емкостные элементы.

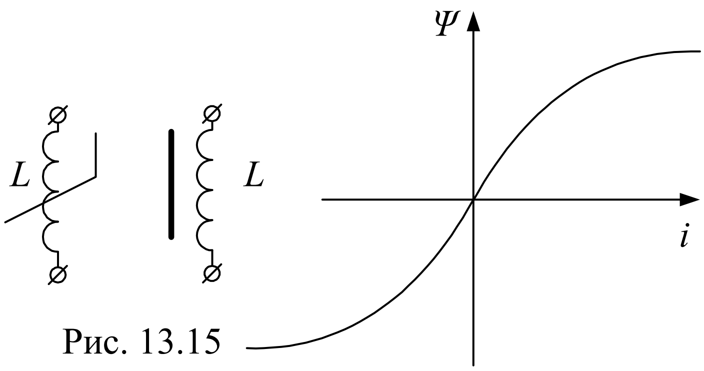


Рис. 13.15

Нелинейные резистивные элементы (нелинейные резисторы, диоды, стабилитроны, транзисторы) мы рассмотрели в параграфе 13.2.

Н е л и н е й н ы е и н д у к т и в н о с т и (рис.13.15) имеют сердечник из магнитного материала и нелинейную вебер-амперную характеристику $\psi(i)$. Потокосцепление рассчитывают по формуле:

$$\psi = wBS = w\Phi, \tag{13.15}$$

где: B – магнитная индукция в сердечнике, S - площадь сечения сердечника, w – число витков катушки.

Магнитная индукция нелинейно связана с напряженностью магнитного поля H в катушке, а напряженность по закону полного тока можно найти из формулы:

$$iw = Hl,$$

где l - длина магнитной линии.

Дифференциальную индуктивность определяют так:

$$L_{диф} = \frac{d\psi}{di}. \tag{13.16}$$

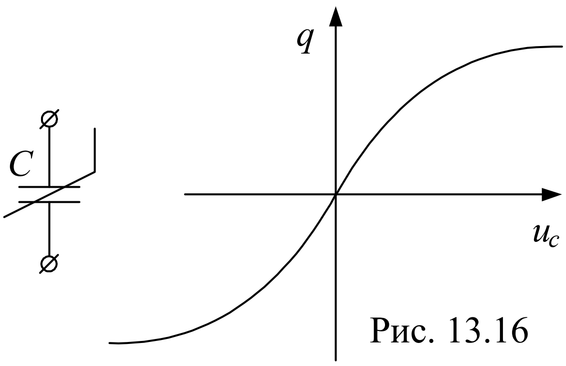


Рис. 13.16

Нелинейные конденсаторы изготавливают на основе сегнетоэлектриков. Они имеют нелинейную кулон-вольтную характеристику (рис.13.16).

Дифференциальную емкость нелинейного конденсатора находят так:

$$C_{диф} = \frac{dq}{du_C}. \qquad (13.17)$$

13.9. Свойства нелинейных цепей на переменном токе

В нелинейных цепях переменного тока происходят нелинейные преобразования сигналов. А именно:

1. Происходит преобразование (искажение) спектра сигнала.

2. Режим цепи зависит от предшествующего состояния.

3. Возможно умножение частоты и появление кратных гармоник $(\omega, 3\omega, 5\omega \ldots.)$.

4. Возможно деление частоты и получение более низких частот $(\omega, \frac{\omega}{3}, \frac{\omega}{5} \ldots)$.

5. Возможна генерация колебаний и возникновение автоколебаний в автогенераторах.

6. Возможна модуляция колебаний - управление амплитудой, фазой и частотой колебаний для передачи информации.

Пример 13.1

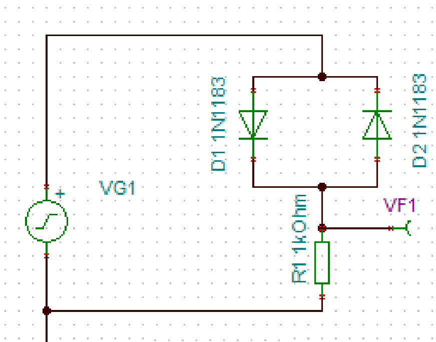


Рис.3.17

В схеме (рис.3.17) два параллельно включенных диода имеют результирующую ВАХ, изображенную на рис.13.8а. Амплитуда синусоидального сигнала генератора $U_{вх} = 0{,}7\,В$, частота $f = 50\,Гц$.

Выполнить моделирование и получить графики выходного напряжения на резисторе (рис.3.18б).

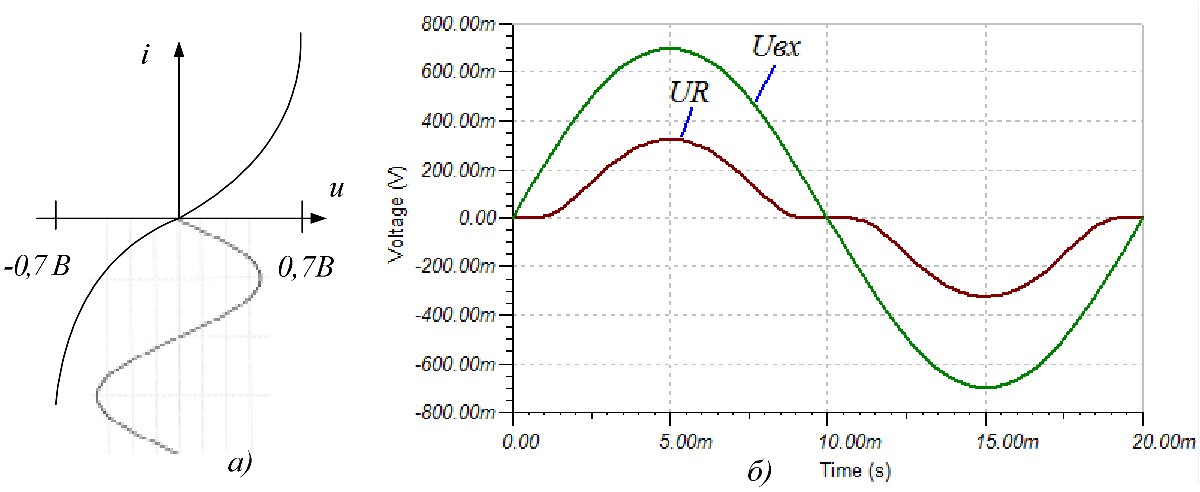


Рис. 13.18

13.10. Выпрямление переменного напряжения с помощью диодов

В бытовой электрической сети используют переменный синусоидальный ток с частотой 50 Гц, а для питание разнообразной электронной аппаратуры требуется постоянный ток. Преобразование переменного тока в постоянный ток называется *выпрямлением*.

Однополупериодный выпрямитель

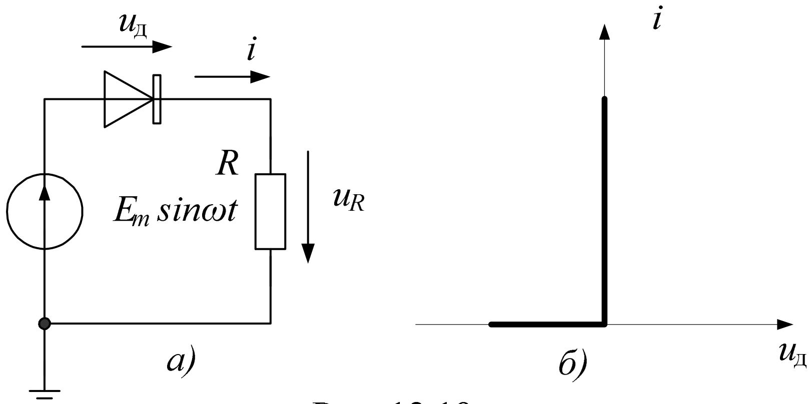


Рис. 13.19

Простейший однополупериодный выпрямитель содержит один полупроводниковый диод и нагрузку (рис.13.19а). ВАХ идеального диода показана на рис.13.19б. Для цепи выпрямителя запишем уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$iR + u_{д} = E_m \sin \omega t . \qquad (13.18)$$

Диод пропускает ток , во время одного полупериода, когда напряжение на аноде положительно. При отрицательном напряжении на аноде диод будет закрыт.

Пример 13.2

Выполнить моделирование однополупериодного выпрямителя и получить графики тока и напряжения на диоде. Амплитуда напряжения генератора равна 10 В, частота 50 Гц.

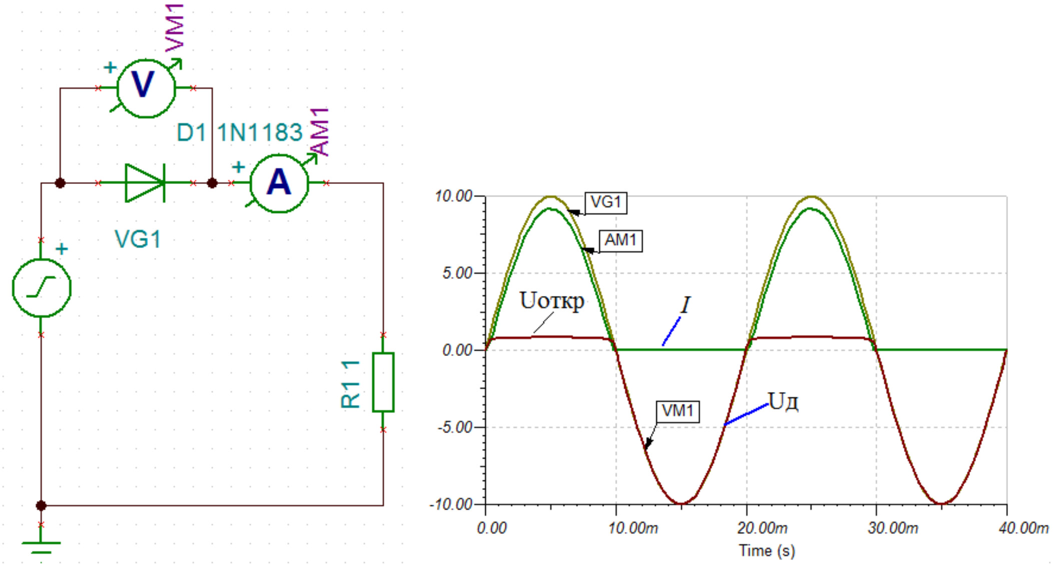


Рис.13.20

Графики показывают, что ток имеет пульсирующий характер и равен нулю при отрицательном входном напряжении. Напряжение на диоде в закрытом состоянии повторяет входное напряжение, а в открытом состоянии не превышает 0,7 В.

Постоянные составляющие равны среднему по периоду значению тока и напряжения на нагрузке:

$$\text{для тока } I_0 = \frac{I_m}{\pi}, \tag{13.19}$$

$$\text{для напряжения } U_0 = \frac{U_m}{\pi}. \tag{13.20}$$

Двухполупериодный выпрямитель

Пример 13.3

Схема *двухполупериодного выпрямителя с диодным мостом* показана на рис.13.21. Выполнить моделирование и получить графики тока.

Постоянные составляющие равны:

$$\text{для тока } I_0 = \frac{2I_m}{\pi}, \tag{13.21}$$

$$\text{для напряжения } U_0 = \frac{2U_m}{\pi}. \tag{13.22}$$

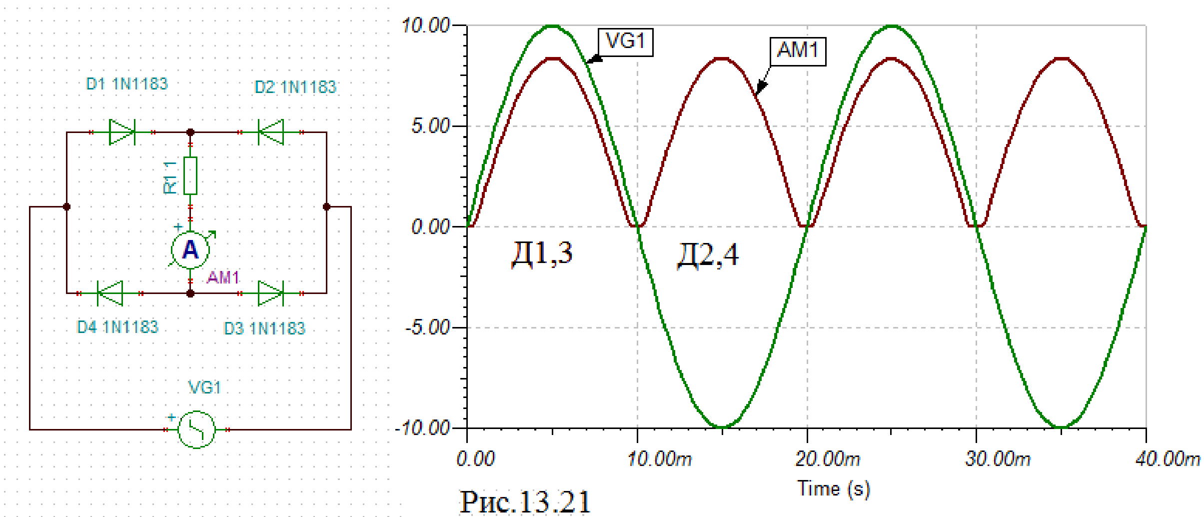


Рис.13.21

13.11. Сглаживание пульсаций выпрямленного тока

Недостатком простейших выпрямителей являются большие пульсации выходного напряжения, которые приводят к помехам в аппаратуре. Для сглаживания пульсаций параллельно нагрузке подключают емкость *С*.

Пример 13.4

Исследовать однополупериодный выпрямитель (рис.13.22) с нагрузкой $R_1 = 1\,кОм$ и сглаживающей емкостью $C_1 = 10\,мкФ$. Амплитуда напряжения генератора 10*В*, частота 50 *Гц*.

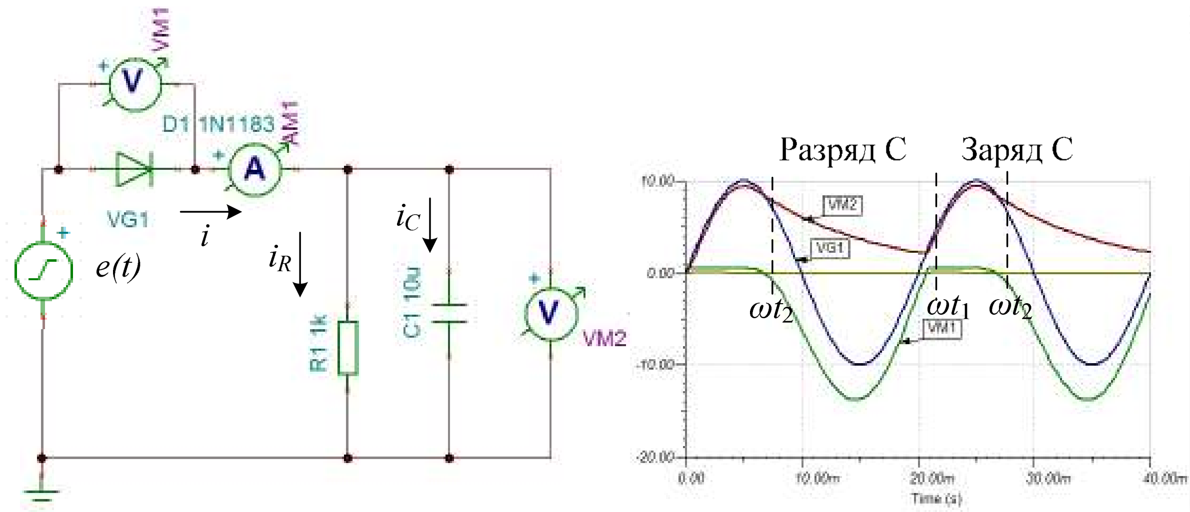


Рис. 13.20

Составим уравнения выпрямителя для схемы рис.13.20:

$$i = i_C + i_R\ ,$$

$$u_д + u_C = E_m \sin\omega t\,,\ \ i_R = \frac{u_C}{R},\ \ i_C = C\frac{du_C}{dt},$$

$$u_д = E_m \sin\omega t - u_C. \tag{13.23}$$

В момент ωt_2 становится $e(t) < u_C$, диод закрывается и происходит *разряд емкости*.

В момент ωt_1 становится $e(t) > u_C$. Диод открывается и происходит *заряд емкости*.

Если увеличивать емкость C, постоянная составляющая U_0 будет стремиться к E_m и пульсации сгладятся.

13.12. Расчет нелинейной цепи по первой гармонике напряжения и тока

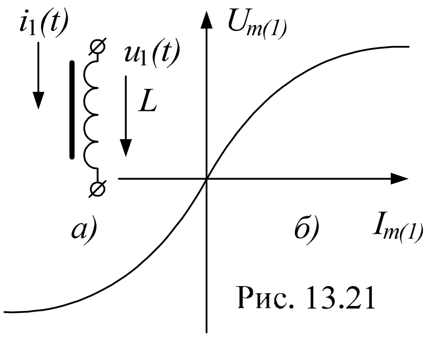


Рис. 13.21

На рис.13.21а показана нелинейная индуктивность с магнитным сердечником. Для приближенного расчета на переменном токе находят нелинейную зависимость напряжения первой гармоники от тока первой гармоники несинусоидального сигнала. Эту ВАХ (рис.13.21б) используют при расчете нелинейной цепи.

Пример 13.5

На рис.13.22а показана схема цепи с нелинейной индуктивностью, составленная для первой гармоники переменного сигнала . В индуктивности проходит ток с действующим значением $I_L = 1A$. Известна вольтамперная характеристика нелинейной индуктивности для первой гармоники (рис.13.22б).

Найти напряжение на входе и построить векторную диаграмму.

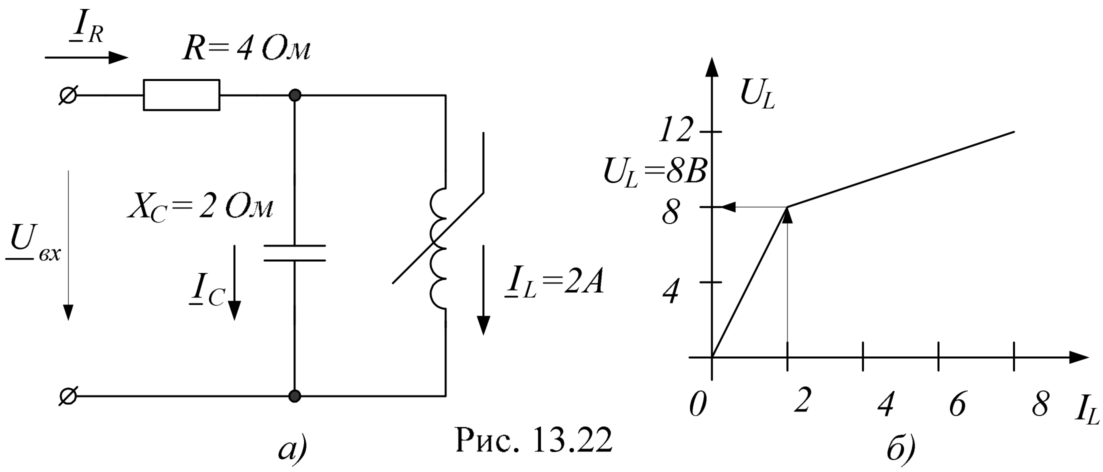


Рис. 13.22

Р е ш е н и е

1. Считаем, что $\underline{I}_L = 2e^{j0^0}$ А.

2. По ВАХ для тока $I_L = 2A$ находим действующее значение напряжения $U_L = 8\,B$.

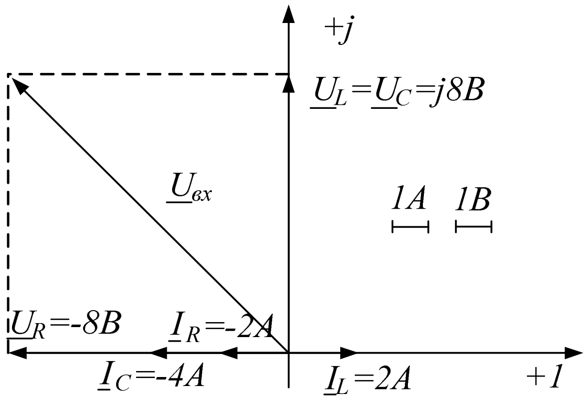


Рис. 13.23

3. Находим: $\underline{U}_C = \underline{U}_L = +j8B$, $\underline{I}_C = \dfrac{\underline{U}_C}{-j2} = -4A$,

$\underline{I}_R = \underline{I}_L + \underline{I}_C = 2 - 4 = -2A$, $\underline{U}_R = R \cdot \underline{I}_R = -8B$.

$\underline{U}_{вх} = \underline{U}_R + \underline{U}_L = -8 + j8 = 8\sqrt{2}e^{j135^0}\,B$.

4. Векторная диаграмма построена на рис.13.23.

Глава 14. МАГНИТНЫЕ ЦЕПИ

14.1. Определение

Магнитными цепями называется совокупность ферромагнитных тел и других сред, по которым под действием катушек с током проходят магнитные потоки.

На рис.14.1 показан соленоид, который имеет П-образный магнитный сердечник и подвижный якорь. В катушке соленоида с числом витков w проходит ток I. Он создает магнитный поток Φ и силу тяги F, притягивающую якорь.

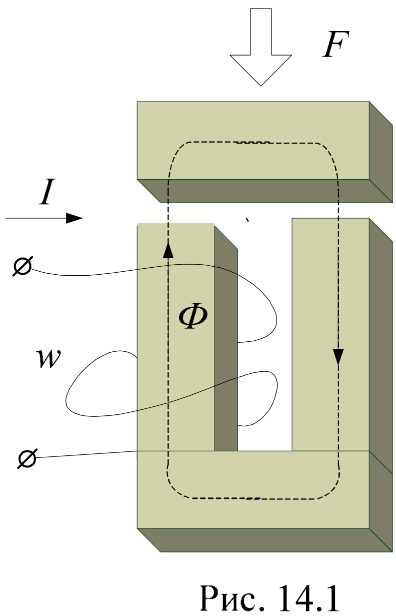


Рис. 14.1

14.2.Основные величины магнитного поля

Основными величинами, характеризующими магнитное поле, являются:

$\vec{B}$ - магнитная индукция [Тл] (тесла);

$\vec{J}$ - намагниченность, магнитный момент единицы объёма вещества, [А/м];

$\vec{H}$ - напряженность магнитного поля [А/м];

μ_0- магнитная постоянная [Гн/м].

Значение магнитной постоянной равно:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^7 \, Гн/_{M} = 1.257 \cdot 10^{-6} \, Гн/_{M}. \tag{14.1}$$

Основные величины связаны между собой зависимостью:

$$\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + \vec{J} \right). \tag{14.2}$$

Намагниченность связана с напряженностью магнитного поля:

$$\vec{J} = æ\vec{H}, \tag{14.3}$$

где æ - магнитная восприимчивость.

Векторы $\vec{J}$ и $\vec{H}$ совпадают по направлению.

Подставляем (14.3) в (14.2) и получим:

$$\vec{B} = \mu_0 \left(\vec{H} + æ\vec{H} \right) = \mu_0 (1 + æ) \vec{H} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu_a \vec{H}. \tag{14.4}$$

В формуле (14.4):

относительная магнитная проницаемость $\mu_r = 1 + æ$, (14.5)

μ_a - абсолютная магнитная проницаемость μ_a.

В воздушной среде: $\mu_r = 1$, $B = \mu_0 H$,

$$H_{возд} = \frac{B_{возд}}{\mu_0} = 0{,}8 \cdot 10^6 \, B_{возд}. \tag{14.6}$$

14.3. Закон полного тока

Ф о р м у л и р о в к а З а к о н а п о л н о г о т о к а

Если магнитное поле создаётся катушкой или витком с элементом тока, то линейный интеграл вдоль любого произвольного контура равен сумме токов, охваченных этим контуром:

$$\oint \vec{H}\vec{dl} = \sum I_k. \tag{14.7}$$

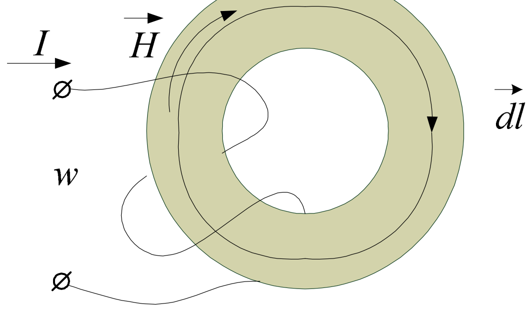
Положительное направление $\vec{dl}$ связанного с направлением тока по правилу Буравчика

Пример 14.1

Катушка с током I имеет w (рис.14.2) и намотана на кольцевой магнитный сердечник с радиусом R. Найти напряженность магнитного поля в сердечнике.

Р е ш е н и е

По закону полного тока:



$$\oint \vec{H}\vec{dl} = 2\pi RH = Iw.$$

Находим напряженность магнитного поля:

$$H = \frac{Iw}{2\pi R}.$$

Рис. 14.2

14.4. Магнитный поток *Ф* через поверхность *S*

Магнитный поток через поверхность S (рис.14.3) вычисляют как поток магнитной индукции через эту поверхность:

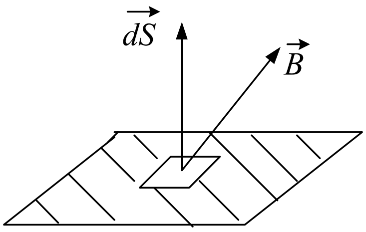


Рис. 14.3

$$\Phi = \int_s \vec{B}\vec{dS}\ , \qquad (14.8)$$

где:

$\vec{dS}$ - элемент поверхности;

$d\Phi = \vec{B}\vec{dS}$ - поток через элементарную поверхность.

14.5. Основные характеристики ферромагнитных материалов

Свойства ферромагнитных материалов характеризуются зависимостью магнитной индукции B от напряжения магнитного поля H. Ферромагнитные материалы обладают свойством *гистерезиса* – отставанием изменения магнитной индукции от изменения напряженности магнитного поля. Устойчивая симметричная петля намагничивания устанавливается после нескольких циклов перемагничивания.

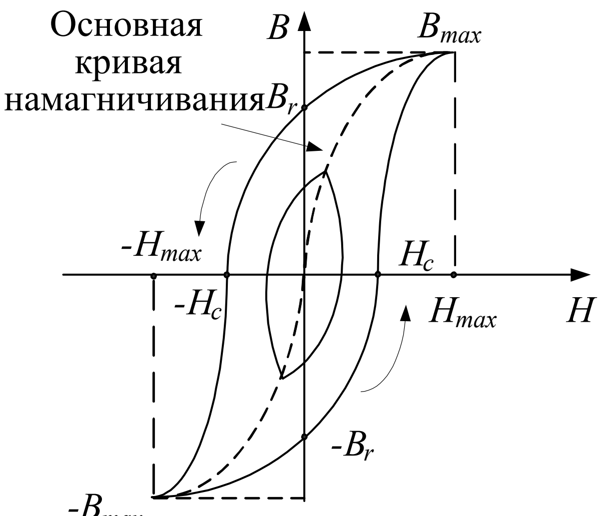


Рис. 14.4

Для разных значений максимальной напряженности перемагничивания получим семейство гистерезисных петель.

На рис.14.4 показаны гистерезисные петли. Они имеют следующие характерные параметры:

$H_{max}, -H_{max}$ - максимальная и минимальная напряженность перемагничивания;

$B_{max}, -B_{max}$ - максимальная и минимальная магнитная индукция в петле;

B_r - остаточная индукция при снятии внешнего магнитного поля;

H_c- коэрцитивная (задерживающая) сила, напряженность магнитного поля при $B = 0$.

Часть петли во втором квадранте называют кривой размагничивания. Магнитная индукция сохраняется при снятии магнитного поля. Это свойство используют для постоянных магнитов.

Зависимость геометрического места вершин гистерезисных петель *B* от *H* называют *основной кривой намагничивания*.

Расчеты магнитных цепей мы будем проводить по кривой намагничивания.

Ферромагнитные материалы подразделяют на следующие типы:

1. *Магнитомягкие* имеют малые площади гистерезисных петель и круто поднимающуюся основную кривую намагничивания. Применяются в переменных магнитных потоках (в трансформаторах, электродвигателях).

2. *Магнитотвердые* имеют большую площадь петли гистерезиса и полого поднимающуюся основную кривую намагничивания. Применяют для постоянных магнитов, магнитных роторов электродвигателей.

3. *Магнитодиэлектрики* получают путем смешения и спекания измельченного порошка магнитных частиц магнетита, железа или пермаллоя с диэлектриком. Относительная магнитная проницаемость μ_r достигает нескольких десятков.

4. *Ферриты* изготавливают из оксидов железа, никеля, цинка. Смесь формуют и обжигают. По электрическим свойствам ферриты являются полупроводниками. Относительная магнитная проницаемость μ_r достигает нескольких тысяч.

14.6. Основные законы магнитных цепей

На рис.14.5 показана разветвленная магнитная цепь с двумя намагничивающими катушками. Первая катушка имеет число витков w_1 и ток I_1. Вторая катушка имеет число витков w_3 и ток I_3. Магнитопроводы имеют *средние магнитные линии* l_1, l_2, l_3. Воздушный зазор в магнитном сердечнике равен l_B.

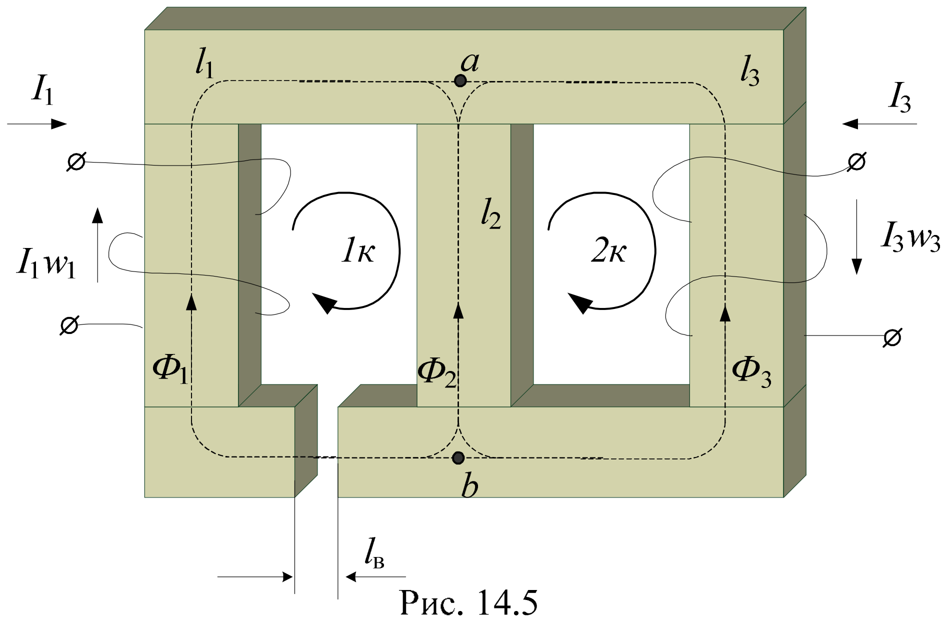


Рис. 14.5

Магнитодвижущей силой (МДС) катушки (обмотки) называют произведение числа витков катушки w на протекающий в ней ток: $I_1 w_1, I_3 w_3$. Направление МДС определяют по правилу буравчика и указывают на схеме стрелками.

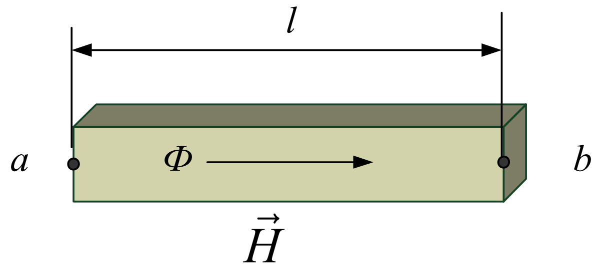


Рис. 14.6

Падением магнитного напряжения между точками *ab* магнитной цепи называют линейный интеграл:

$$U_{mab} = \int_a^b \vec{H} d\vec{l}. \qquad (14.9)$$

Если $\vec{H} = const$ и совпадает по направлению с $d\vec{l}$, то $U_{mab} = H \cdot l_{ab}$ (рис.14.6).

Первый закон Кирхгофа для магнитной цепи

По первому закону Кирхгофа для магнитной цепи *сумма магнитных потоков, сходящихся в узле, равна нулю*:

$$\sum \Phi_к = 0. \qquad (14.10)$$

В магнитной цепи рис.14.5 для узла a:

$$\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0. \qquad (14.11)$$

Второй закон Кирхгофа

Алгебраическая сумма падений напряжения вдоль любого замкнутого контура равна алгебраической сумме МДС вдоль того же контура:

$$\sum U_M = \sum I_к w_к . \qquad (14.12)$$

В магнитной цепи рис.14.5 получим:

1-й контур: $H_1 l_1 + H_{вз} l_{вз} - H_2 l_2 = I_1 w_1$. (14.13)

2-й контур: $H_2 l_2 - H_3 l_3 = I_3 w_3$. (14.14)

14.7. Расчет неразветвленной магнитной цепи

Пример 14.2

На рис.14.7 показана неразветвленная магнитная цепь. Левая ветвь ферромагнитного сердечника имеет сечение S_1 и среднюю магнитную линию l_1. Правая ветвь имеет сечение S_2 и среднюю магнитную линию l_2. В правой ветви есть воздушный зазор с размером δ. Задана основная кривая намагничивания сердечника (рис.14.8). Магнитное поле в сердечнике создается катушкой с числом витков w. Требуется создать в воздушном зазоре индукцию B_δ. Какой ток требуется для этого?

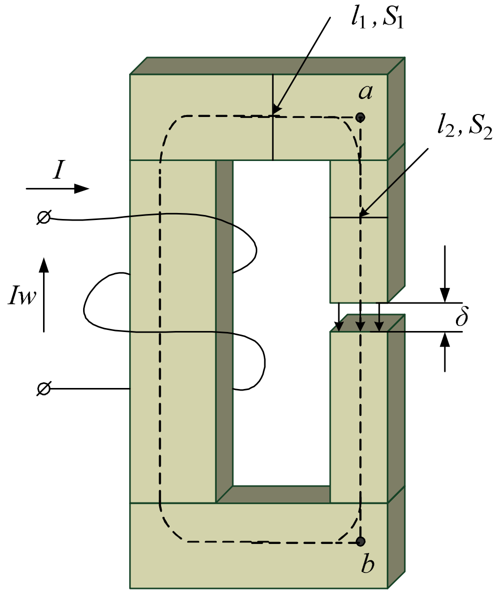


Рис. 14.7

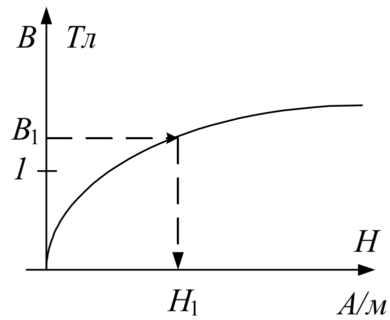


Рис. 14.8

Решение

1. Разбиваем магнитную цепь на три участка:

l_1 с сечением S_1; l_2 с сечением S_2, δ с сечением $S_\delta = S_2$.

Так как магнитная цепь неразветвленная, на всех участках проходит один и тот же магнитный поток $\varPhi = B_1 S_1 = B_2 S_2 = B_\delta S_\delta$.

2. По заданной магнитной индукции в зазоре B_δ находим магнитный поток $\varPhi = B_\delta S_\delta$.

3. На участке l_2 индукция $B_2 = B_\delta$, так как $S_2 = S_\delta$.

4. На участке l_1 имеем: $B_1 = \dfrac{\varPhi_1}{S_1} = \dfrac{B_\delta S_\delta}{S_1}$.

5. По кривой намагниченности находим напряженности в сердечнике H_1 и H_2. Напряженность в воздушном зазоре $H_\delta = \dfrac{B_\delta}{\mu_0} = 0{,}8 \cdot 10^6\,Вб$.

6. Вычисляем магнитодвижущую силу (МДС): $H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_\delta l_\delta = Iw$.

7. Вычисляем ток в катушке:

$$I = \frac{H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_\delta l_\delta}{w}.$$

14.8. Расчет разветвленной магнитной цепи

Пример 12.3

На рис.14.9. показана разветвленная магнитная цепь и основная кривая намагничивания сердечника. Даны размеры сердечника и зазора, параметры катушек $I_1 w_1$, $I_3 w_3$. Требуется найти магнитные потоки в ветвях.

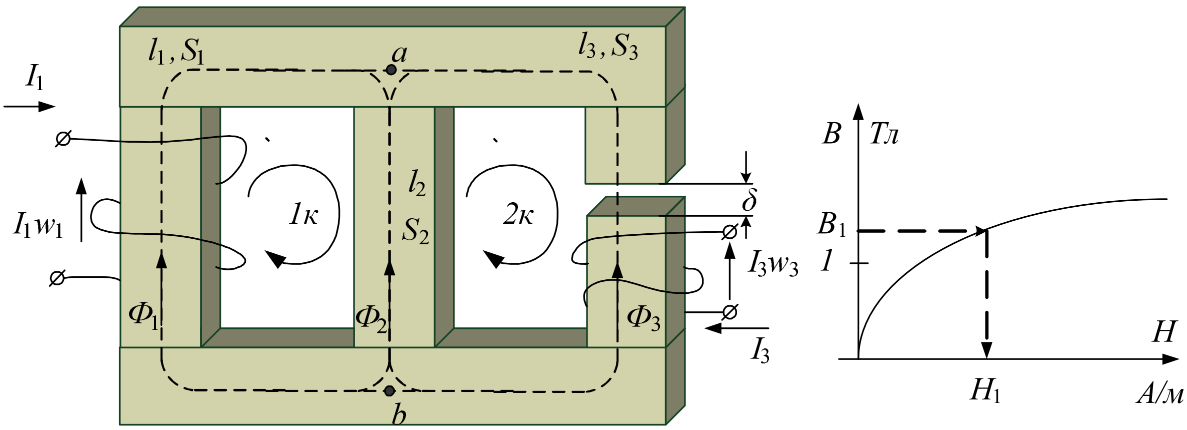


Рис. 14.9

Расчет разветвленной магнитной цепи проводят методом двух узлов аналогично расчету нелинейной цепи постоянного тока (§13.7).

Р е ш е н и е

Магнитная цепь формально аналогична нелинейной электрической цепи. Магнитные потоки аналогичны токам, МДС аналогичны ЭДС.

Находим разность магнитных потенциалов между узлами a и b.

Для первой ветви: $U_{мab} = I_1 w_1 - H_1 l_1$.

Для второй ветви: $U_{мab} = -H_2 l_2$.

Для третьей ветви: $U_{мab} = I_3 w_3 - H_3 l_3 - H_{вз}\delta$.

Далее для каждой ветви строим график зависимость магнитного потока от магнитного напряжения $\Phi_i = f_i\left(U_{мab}\right)$ (рис.14.10).

Например, для первой ветви известно $I_1 w_1$, l_1, S_1. Задаем $\Phi_1 = B_1 S_1 = 0$. Тогда $B_1 = 0, H_1 = 0, U_{мab} = I_1 w_1$.

Задаем произвольные значения Φ_1, вычисляем $B_1 = \dfrac{\Phi_1}{S_1}$, находим по кривой намагничивания соответствующие значения H_1 и вычисляем $U_{мab} = I_1 w_1 - H_1 l_1$. Получим график $\Phi_1 = f_1(U_{мab})$.

Аналогично строим графики $\Phi_2 = f_2(U_{мab})$, $\Phi_3 = f_3(U_{мab})$.

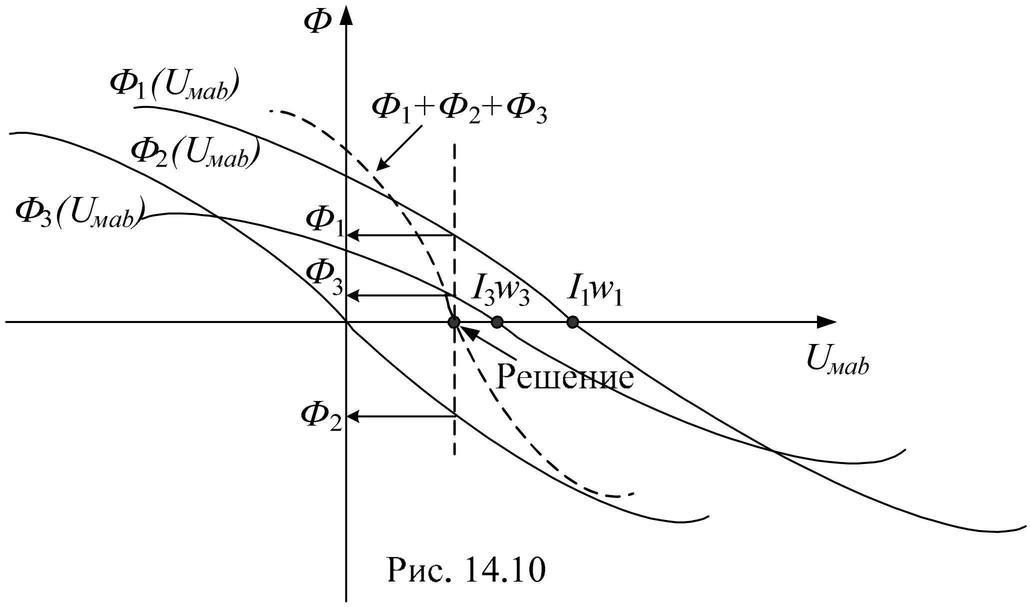


Рис. 14.10

Суммируем графики магнитных потоков и строим пунктирную линию $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$. В точке $\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 = 0$ находим решение и значения магнитных потоков в ветвях Φ_1, Φ_2, Φ_3.

Глава 15. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ МАШИНЫ

15.1. Классификация электрических машин

Электрические машины преобразуют механическую энергию в электрическую энергию и наоборот.

По назначению *электрические машины классифицируют* на следующие группы:

Электрические генераторы– преобразуют механическую энергию в электрическую. Применяют в электростанциях, автомобилях, самолетах, кораблях, автономных генераторах.

Электрические двигатели – преобразуют электрическую энергию в механическую. Применяют в качестве электрического привода в станках, электротранспорте, машинах и механизмах. В системах автоматического управления их используют в качестве исполнительных, регулирующих, программируемых органов.

Электрические микромашины небольшой мощности (до 600 Вт) применяют в бытовой технике и автоматических устройствах и разделяются на группы:

1. Силовые микродвигатели – привод механических узлов автоматических приборов (компьютеры, принтеры, бытовая техника, робототехника).

2. Управляемые (исполнительные) двигатели – преобразуют подводимый электрический сигнал в механическое перемещение вала и отрабатывают определенные команды. Применяются в робототехнике, системах наведения антенн, видеокамер и т.п.

3. Тахогенераторы – преобразуют механическое вращение вала в электрическое напряжение, пропорциональное частоте вращения вала.

4. Сельсины – машины синхронной связи, осуществляют синхронный и синфазный поворот или вращение нескольких механических не связанных между собой осей.

5. Микромашины гироскопических приборов – осуществляют вращение роторов гироскопов с высокой частотой и коррекцию их положения.

Классификация электрических машин по роду тока и принципу действия.

Электрические машины по роду тока делятся на машины переменного тока и машины постоянного тока.

1. *К машинам переменного тока* относятся: трансформаторы, асинхронные двигатели, синхронные генераторы и двигатели, синхронные микромашины, шаговые двигатели.

2. *К машинам постоянного тока* относятся генераторы постоянного тока, электродвигатели постоянного тока.

15.2. Создание вращающегося магнитного поля

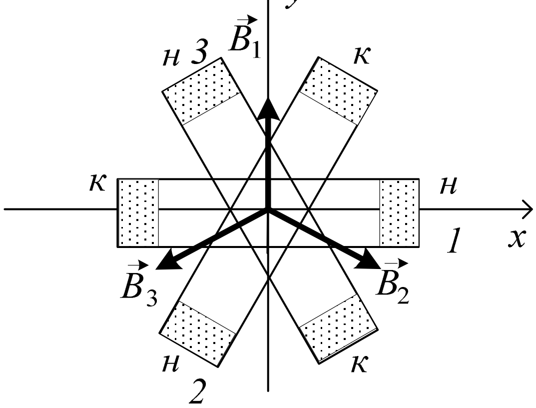


Рис. 15.1

Электрические двигатели переменного тока работают с использованием вращающегося магнитного поля **(ВМП)**

Вращающееся магнитное поле трехфазного тока создается с помощью трех катушек, сдвинутых в пространстве на 120° и питаемых трехфазным током (рис.15.1). На рис.15.1 обозначены номера обмоток (1, 2, 3), начала и концы (*Н, К*), векторы магнитной индукции, создаваемые катушками

($\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3$).Направление векторов $\vec{B}_i$ определяем по правилу Буравчика.

В катушках действуют токи:

$$i_1(t) = I_m \sin \omega t, \tag{15.1}$$

$$i_2(t) = I_m \sin(\omega t - 120°) \tag{15.2}$$

$$i_3(t) = I_m \sin(\omega t + 120°) \tag{15.3}$$

Каждый ток создает пульсирующее магнитное поле, направленное вдоль оси катушек. Магнитная индукция пропорциональна токам.

$$B_1(t) = B_m \sin \omega t, \tag{15.4}$$

$$B_2(t) = B_m \sin(\omega t - 120°), \tag{15.5}$$

$$B_3(t) = B_m \sin(\omega t + 120°). \tag{15.6}$$

Векторы магнитной индукции сдвинуты во времени (15.4-15.6) и в пространстве (рис.15.1).

Найдем проекции результирующего вектора магнитной индукции на оси x и y:

$$B_x(t) = B_2 \cos 30° - B_3 \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}\left[B_m(\sin \omega t - 120°) - B_m \sin(\omega t + 120°)\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} B_m \left[2 \cos \omega t \sin(-120°)\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} B_m 2 \cos \omega t \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2} B_m \cos \omega t. \tag{15.7}$$

$$B_y(t) = B_1 - B_2 \cos 60^0 - B_3 \cos 60^0 =$$

$$= B_m \sin \omega t - B_m \sin(\omega t - 120°) \cos 60° - B_m \sin(\omega t + 120°) \cos 60° =$$

$$B_m \sin \omega t - 0{,}5 B_m \left[\sin(\omega t - 120°) + \sin(\omega t + 120°)\right] =$$

$$B_m \sin \omega t - 0{,}5 B_m \left[2 \sin \omega t \cos(-120°)\right] =$$

$$= B_m \sin \omega t + 0{,}5 B_m \sin \omega t = \frac{3}{2} B_m \sin \omega t. \tag{15.8}$$

Найдем модуль результирующего вектора магнитной индукции:

$$|B(t)| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 B_m^2 \cos^2 \omega t + \left(\frac{3}{2}\right)^2 B_m^2 \sin^2 \omega t} = \frac{3}{2} B_m. \tag{15.9}$$

Текущая фаза вектора магнитной индукции:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{B_y}{B_x} = \frac{{}^{3}\!/_{2}\,\boldsymbol{\sin\omega t}}{-{}^{3}\!/_{2}\,\boldsymbol{\cos\omega t}} = -\ \text{tg}\ \omega t\,. \tag{15.10}$$

Следовательно, *результирующий вектор магнитной индукции* $\vec{B}(t) = \frac{3}{2}B_m e^{-j\omega t}$ *вращается в сторону катушки с отстающим током с угловой скоростью* ω (рис.15.2).

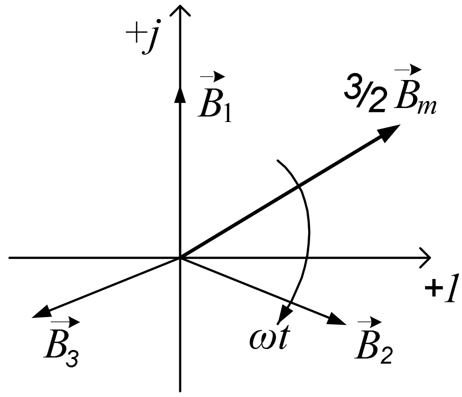


Рис. 15.2

Направление вращения определяется порядком следования фаз токов.

Для изменения направления вращения на противоположное можно поменять местами включение любых двух фаз на противоположное.

15.3. Вращающееся магнитное поле двухфазного тока

Двухфазная система имеет фазные токи: $i_1(t) = I_m\,\boldsymbol{\sin\omega t},\ i_2(t) = I_m\,\boldsymbol{\cos\omega t}$.

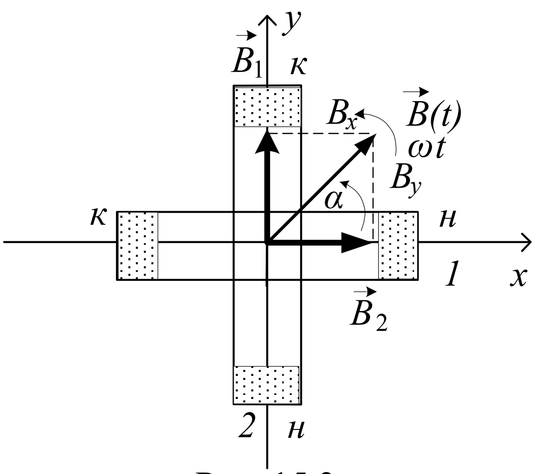


Рис. 15.3

Вращающееся магнитное поле (рис.15.3) можно получить с помощью двух катушек с магнитными индукциями:

$$B_y = B_1(t) = B_m\,\boldsymbol{\sin\omega t}\,,$$

$$B_x = B_2(t) = B_m\,\boldsymbol{\cos\omega t}\,.$$

Модуль вращающегося вектора $|B(t)| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = B_m$.

Текущая фаза:

$$\boldsymbol{tg}\,\alpha = \frac{B_y}{B_x} = \frac{\boldsymbol{\sin\omega t}}{\boldsymbol{\cos\omega t}} = \boldsymbol{tg}\,\omega t\,.$$

Вектор $\vec{B}(t) = B_m e^{j\omega t}$ вращается в сторону катушки с отстающим током.

15.4.Устройство асинхронного двигателя трехфазного тока

Асинхронные машины (АСМ) относятся к электрическим машинам переменного тока. Магнитное поле АСМ создается трехфазным, двухфазным или однофазным источником переменного напряжения. Потому АСМ бывают трехфазные, двухфазные и однофазные.

Трехфазный асинхронный двигатель (АСД) разработан в 1889 г. русским изобретателем, ученым и инженером Доливо-Добровольскими до сих пор используется благодаря простоте конструкции.

Мощность асинхронных двигателей от 60 Вт до 400 кВт.

Устройство трехфазной асинхронной машины показано на рис.15.4а.

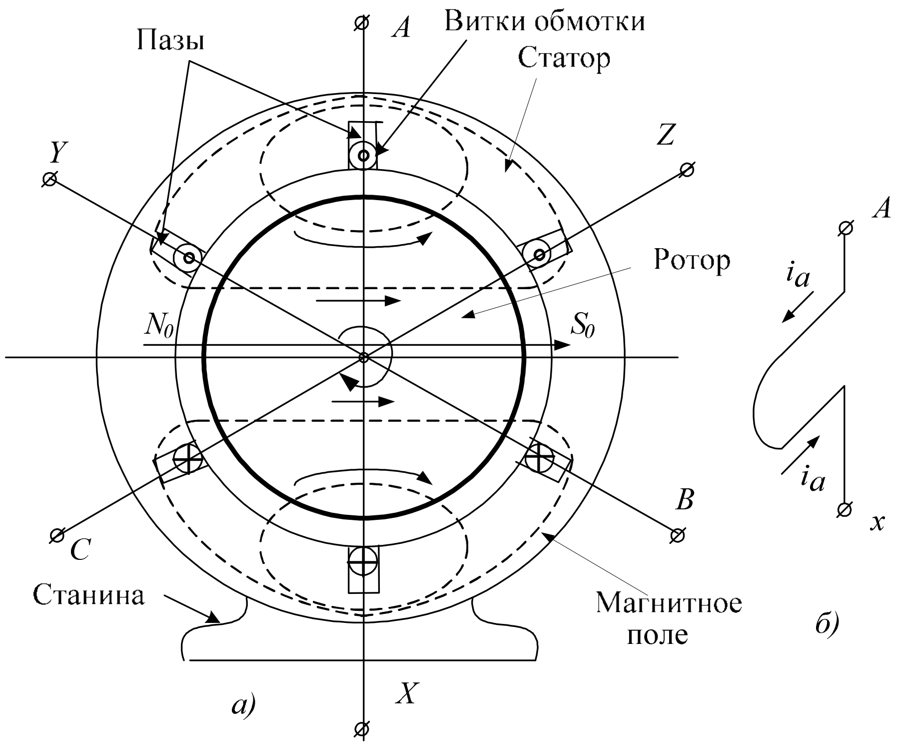


Рис. 15.4

Статор трехфазной АСМ состоит из чугунной станины, в которой закреплен магнитопровод с пазами для обмоток.

Все внешние провода обмоток подходят сзади (рис.15.4б). Для момента t_1 мгновенные значения трехфазных токов показаны на рис.15.5. Направления токов в обмотках статора АСМ обозначены на рис.15.4а. Три обмотки асинхронного двигателя создают вращающийся вектор магнитного поля $\boldsymbol{N_0S_0}$ с двумя полюсами $\boldsymbol{N_0}$ и $\boldsymbol{S_0}$.

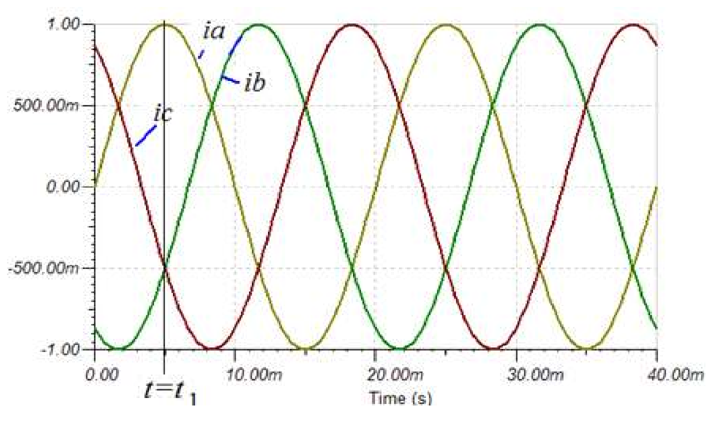


Рис. 15.5

Так как существуют 2 полюса ($\boldsymbol{N_0}$ и $\boldsymbol{S_0}$), то такая машина называется двухполюсная.

Количество пар полюсов магнитного поля обозначают $\boldsymbol{P}$. В двухполюсной машине $\boldsymbol{P}=1$.

ВМП вращается с частотой токов в статоре f_1. Период вращения $T = 1/f_1$.

Количество оборотов ВМП в минуту обозначают $n_1 = 60 f_1$.

Четырехполюсная АСМ имеет обмотку статора из шести катушек (рис.15.6а,б). Магнитное поле имеет две пары полюсов (***P***=2).

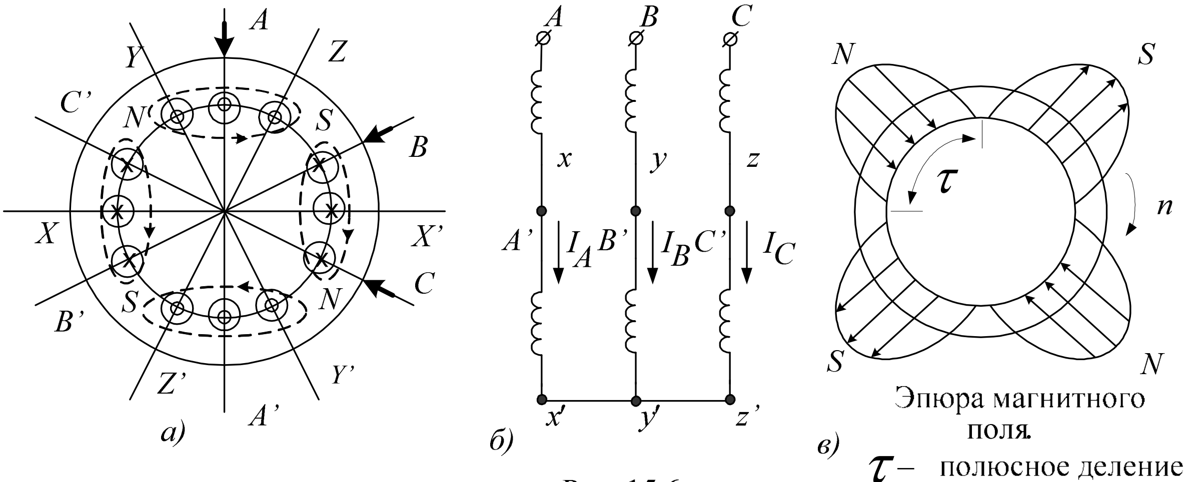


Рис. 15.6

Для фазы A в момент t1 ток проходит по проводникам $A \rightarrow x \rightarrow A' \rightarrow x'$.

На рис.15.6в показана эпюра магнитного поля. *Полюсное деление* τ определяют как длину части окружности, формирующей один магнитный полюс. Магнитные линии исходят из N и направлены к S. Магнитное поле вращается с частотой $n = \dfrac{60 f}{p}$, $p = 2$.

Изменяя конструкцию обмоток, число полюсов можно сделать любым. В результате снижается скорость вращения ВМП.

15.5. Магнитный поток полюса

Магнитный поток одного полюса можно рассчитать так:

$$\Phi_п = B_{ср} \tau l, \qquad (15.11)$$

где: τ - полюсное деление, l – активная длина проводника, $B_{ср}$ – среднее значение магнитной индукции.

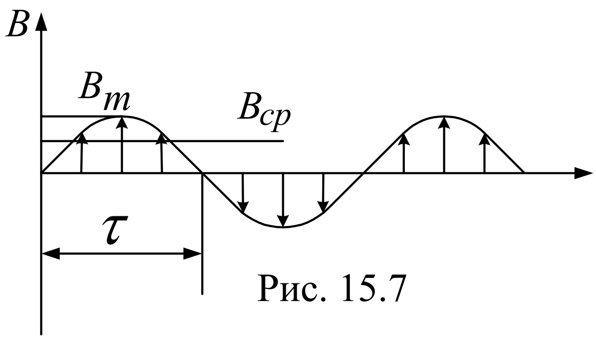


Рис. 15.7

График изменения магнитной индукции под полюсами по форме близок к синусоидальному (рис.15.7). Поэтому средняя магнитная индукция $B_{ср} = \dfrac{2B_м}{\pi}$.

15.6. Конструкция ротора асинхронных машин

В роторе асинхронной машины под действием вращающегося магнитного поля индуцируются токи, которые создают вращающий момент.

Применяют следующие типы роторов:

1. *Короткозамкнутый ротор* (типа «Беличье колесо»). Стержни ротора выполнены из меди или латуни и приварены к кольцам из того же материала. Стержни и кольца имеют очень малое сопротивление и образуют проводящую короткозамкнутую систему (рис.15.8).

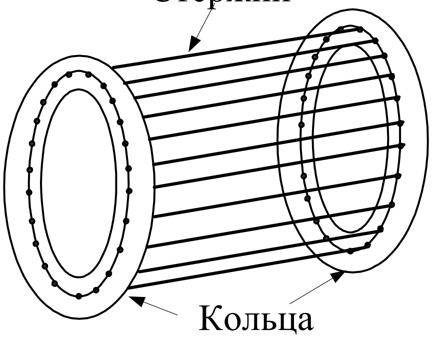


Рис. 15.8

Короткозамкнутый ротор является наиболее простым по конструкции и широко применяется в асинхронных двигателях различного назначения.

2. *Фазный ротор* имеет на роторе трехфазную обмотку, соединенную звездой (рис.15.9). Выводы фазных обмоток ротора присоединены к контактным кольцам. Кольца через скользящие по кольцам угольные щетки подключены к трехфазному реостату. Это позволяет улучшить пусковые характеристики и регулировать частоту вращения.

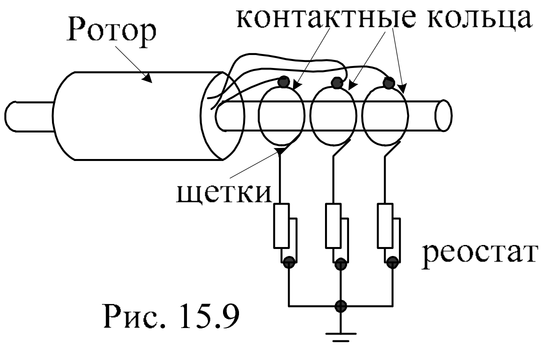


Рис. 15.9

15.7. Принцип действия асинхронного двигателя

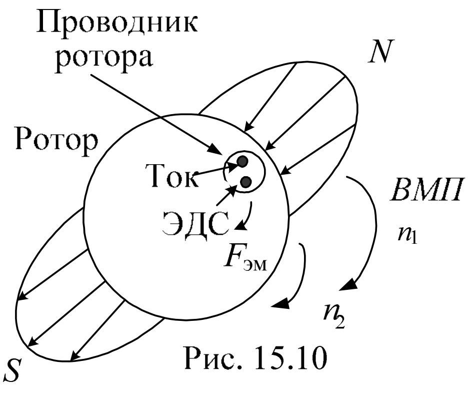


Рис. 15.10

Принцип действия асинхронного двигателя основан на силовом взаимодействии ВМП статора с токами, возникающими в обмотке ротора под действием наведенной в ней ЭДС. ВМП вращается с частотой n_1, пересекает проводники ротора и наводит в них ЭДС. По форме ЭДС, наводимая в роторе, близка к синусоидальной, прямопропорциональна относительной скорости проводника в магнитном поле и значению магнитной индукции. В замкнутых проводниках обмотки ротора возникает синусоидальный ток, отстающий по фазе от ЭДС, так как обмотка ротора имеет индуктивный характер. Направление тока определяем по правилу правой руки. На проводник с током действует электромагнитная сила $F_{эм}$, направленная по правилу левой руки. В результате проводник и ротор вращаются в направлении вращения ВМП со скоростью $n_2<n_1$. Если бы n_2 стало равным n_1, то ВМП не пересекало бы проводники и наводимая ЭДС равнялась бы нулю.

В установившемся режиме электромагнитные силы будут уравновешены механическими силами торможения.

Скольжение характеризует неравенство частот вращения ротора и ВМП:

$$S=\frac{n_1-n_2}{n_1}. \qquad (15.12)$$

В процентах скольжение выражают так:

$$S=\frac{n_1-n_2}{n_1}100\%. \qquad (15.13)$$

В номинальном режиме S составляет несколько процентов.

15.8. Схема замещения обмоток ротора

В неподвижном роторе наводится ЭДС:

$$E_{2н}=C_{E_2}\cdot f_1\cdot\Phi_{п}, \qquad (15.14)$$

где C_{E_2} - коэффициент, зависящий от геометрических размеров АСМ, числа витков в обмотках статора и ротора и т.п.

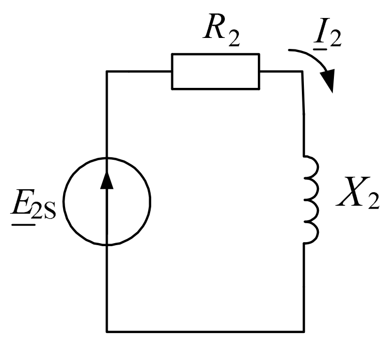


Рис. 15.11

Для подвижного ротора в результате скольжения наводимая ЭДС уменьшается и составляет:

$$E_{2s}=S\cdot E_{2н}=C_{E_2}\cdot f_1\cdot\Phi_{п}\cdot S. \qquad (15.15)$$

Если частота скольжения $f_2=S\cdot f_1$, реактивное сопротивление ротора будет равно:

$$X_2=S\cdot 2\pi f_1 L_2=S\cdot X_{2н}. \qquad (15.16)$$

Схема замещения обмотки ротора показана на рис. 15.11.

Находим ток ротора:

$$I_2=\frac{E_2}{\sqrt{R_2^2+X_2^2}}=\frac{S\cdot E_{2н}}{\sqrt{R_2^2+\left(X_{2н}\cdot S\right)^2}}=\frac{E_{2н}}{\sqrt{\left[\frac{R_2}{S}\right]^2+X_{2н}^2}}. \qquad (15.17)$$

В неподвижном роторе (S=1):

$$I_{2н} = \frac{E_{2н}}{\sqrt{R_2^2 + X_{2н}^2}}. \tag{15.18}$$

По мере раскручивания двигателя скольжение S уменьшается и при синхронной частоте (S=0) I_2=0.

Сдвиг фаз между током и ЭДС ротора:

$$tg\varphi_2 = \frac{X_2}{R_2} = \frac{S \cdot X_{2н}}{R_2} = \frac{S \cdot \omega_1 L_2}{R_2}, \tag{15.19}$$

$$\boldsymbol{cos}\,\varphi_2 = \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + \left(S \cdot X_{2н}\right)^2}}. \tag{15.20}$$

15.9. Вращающий момент асинхронного двигателя

В общем случае вращающий момент $M = \dfrac{P}{\omega}$, где:

$$P = E_{2s} I_2 \,\boldsymbol{cos}\,\varphi_2 \tag{15.21}$$

– активная мощность, выделенная в роторе, ω - угловая скорость.

В асинхронном двигателе вращающий момент зависит от скольжения:

$$M = \frac{E_{2n}S}{f} I_2 \,\boldsymbol{cos}\,\varphi_2 = C\Phi \frac{E_{2n}S}{\sqrt{R_2^2 + \left(X_{2н} \cdot S\right)^2}} \cdot \frac{R_2}{\sqrt{R_2^2 + \left(X_{2н} \cdot S\right)^2}} =$$

$$= C\Phi \frac{E_{2н} \cdot R_2}{\dfrac{R_2^2}{S} + S X_{2н}^2}. \tag{15.22}$$

График зависимости вращающего момента от скольжения показан на рис.15.12.

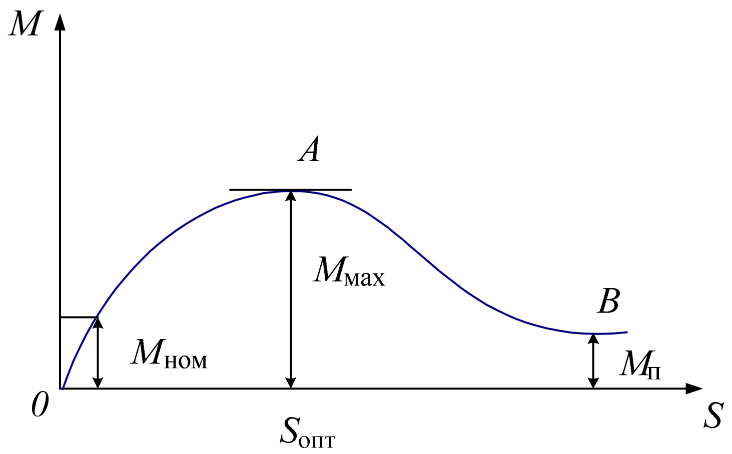


Рис. 15.12

На графике рис.15.12 обозначены:

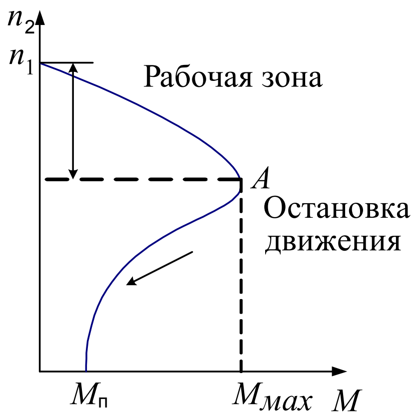


Рис. 15.13

$M_{ном}$ – номинальный момент $(S \approx 3 \div 5\%)$,

$M_{мах}$ – максимальный момент $(S \approx 10 \div 14\%)$,

$M_п$– пусковой момент $(S = 100\%)$ (требуется для запуска вращения двигателя).

Для асинхронного двигателя обычно выполняется:

$M_{max} \approx (2 \div 3) \cdot M_{ном}$, $M_п \approx M_{ном}$.

На кривой (рис.15.12) отмечены два участка:

ОА – *устойчивая работа* двигателя под нагрузкой. С ростом нагрузки увеличивается S, ток ротора увеличивается, момент M тоже увеличивается.

АВ – *неустойчивая работа* двигателя, снижение оборотов. С ростом скольжения уменьшается момент, двигатель замедляется и останавливается. Возникает перегрев двигателя.

Механическая характеристика асинхронного двигателя показана на рис.15.13. Это зависимость частоты вращения n_2 от момента на валу. Увеличение M до максимального значения приводит к остановке двигателя.

Вращающий момент M пропорционален квадрату напряжения сети.

15.10. Оптимальное скольжение

Оптимальное скольжение соответствует максимальному вращающему моменту (15.22):

$$M = C\Phi \frac{E_{2н} \cdot R_2}{\dfrac{R_2^2}{S} + SX_{2n}^2}.$$

Найдем минимум знаменателя этого выражения:

$$\frac{d}{dS}\left[\frac{R_2^2}{S}+SX_{2\text{н}}^2\right]=-\frac{R_2^2}{S^2}+X_{2\text{н}}^2=0. \qquad (15.23)$$

Следовательно:

$$S_{опт}=\frac{R_2}{X_{2\text{н}}}. \qquad (15.24)$$

Меняя R_2, можно изменить зависимость M от S (рис.15.12).

При оптимальном скольжении получим максимальный момент:

$$M_{max}=C\Phi\frac{E_{2\text{н}}}{2X_{2\text{н}}}. \qquad (15.25)$$

15.11. Коэффициент полезного действия и коэффициент мощности асинхронного двигателя

Коэффициент полезного действия (КПД) асинхронного двигателя вычисляют по формуле:

$$\eta=\frac{P_1-\left(P_м+P_с+P_{мех}+P_{доб}\right)}{P_1}, \qquad (15.26)$$

где:

P_1 – мощность, потребляемая из сети;

$P_м$ – мощность потерь в обмотках (в меди);

$P_с$ - мощность потерь в стали магнитопровода;

$P_{мех}$ - мощность механических потерь;

$P_{доб}$ - мощность добавочных потерь за счет пульсации магнитного поля в ребристых конструкциях ротора и статора.

Для современных асинхронных двигателей $\eta=0{,}9\div0{,}95$.

В номинальном режиме коэффициент мощности:

$$\cos\varphi=\frac{P}{S}=0{,}7\div0{,}9.$$

В режиме холостого хода $\cos\varphi=0{,}2\div0{,}3$.

15.12. Синхронные машины переменного тока

В синхронных электрических машинах ротор и магнитное поле тока статора вращаются синхронно с одно и той же частотой вращения.

Синхронные машины (СМ) обратимы и могут работать в генераторном и двигательном режиме.

Применение синхронных машин

Трехфазные синхронные генераторы мощностью до 1200МВт вырабатывают электроэнергию на гидроэлектростанциях (ГЭС) и тепловых электростанциях ТЭС.

Синхронные двигатели работают в прокатных станах, насосах, компрессорах и имеют мощность до десятков мегаватт.

Синхронные генераторы и двигатели малой мощности, микродвигатели применяют в автомобилях, автономных источниках питания, автоматических устройствах, робототехнике, бытовой технике.

15.13. Устройство трехфазной синхронной машины

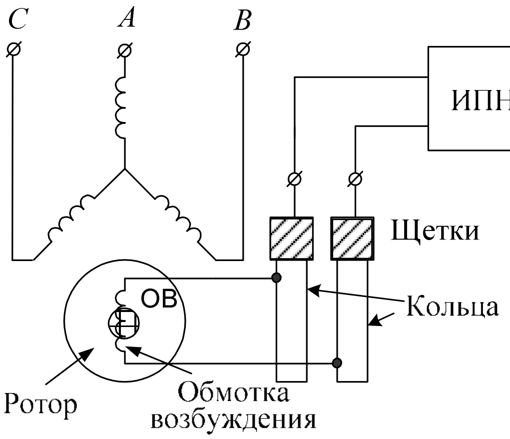


Рис. 15.14

Статор синхронной машины устроен также как у асинхронной. Катушки статора создают вращающееся магнитное поле.

Ротор СМ представляет собой электромагнит. Обмотка ротора называется *обмоткой возбуждения* и подключается через *два контактных кольца и щетки* к независимому источнику постоянного напряжения.

По конструкции роторы бывают:

Явнополюсные – имеют выступающие полюсы с полюсными наконечниками, на которые надеты катушки (рис.15.15).

Неявнополюсные роторы (рис.15.16) имеет распределенную обмотку возбуждения, уложенную в пазы цельной стальной поковки. Применяют такие роторы в больших генераторах и двигателях.

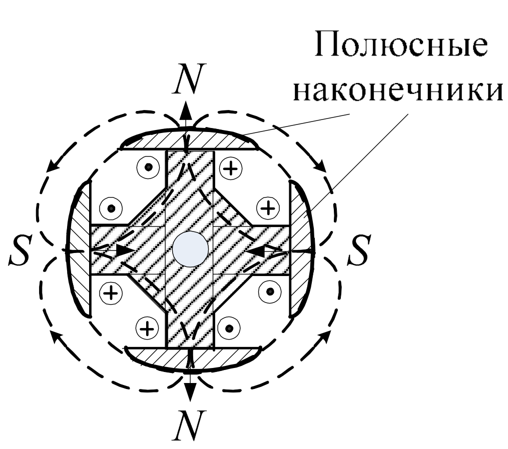


Рис. 15.15

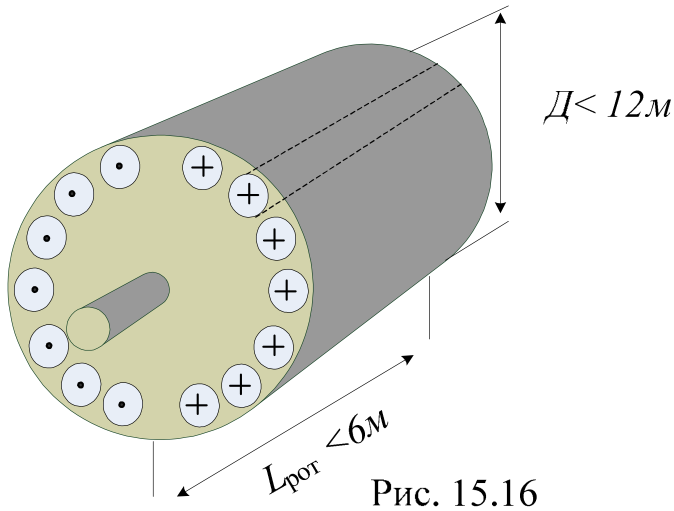


Рис. 15.16

Число пар полюсов ротора и статора одинаково. Число оборотов в минуту связано с частотой тока и числом пар полюсов:

$$n_2 = \frac{60f}{p}. \qquad (15.27)$$

Для гидроэлектростанции диаметр ротора может составлять Д = 12м, длина L=2,5 м, число пар полюсов 2*p*=42 (*p*=21), *n*=143 об/мин. При этом частота тока $f = \frac{143 \cdot 21}{60} = 50\text{Гц}$.

Мощность источника постоянного напряжения (ИПН) для обмотки возбуждения составляет $1 \div 3\%$ от $P_{\text{ген.}}$

15.14. Принцип действия синхронного генератора

В синхронном генераторе обмотка возбуждения ротора создает магнитное поле. Ротор вращается под действием внешнего привода (двигатель, гидротурбина) с частотой n_2 оборотов в минуту.

Силовые линии *магнитного поля ротора* (основного поля) возбуждают в трехфазной обмотке статора синусоидальные ЭДС e_{0A}, e_{0B}, e_{0C}, сдвинутые по фазе на 120°. Направление ЭДС определяют по правилу правой руки.

Частота ЭДС: $f = \frac{pn_2}{60}$, n_2 – частота вращения ротора, p – число пар полюсов.

Если к обмоткам статора подключить симметричный активный приемник, то возникнут токи i_{0A}, i_{0B}, i_{0C}, которые создадут вращающееся *магнитное поля статора* (ВМП).

Частота вращения поля статора: $n_1 = \frac{60f}{p} = \frac{60pn_2}{60p} = n_2$. В этом заключается смысл синхронности.

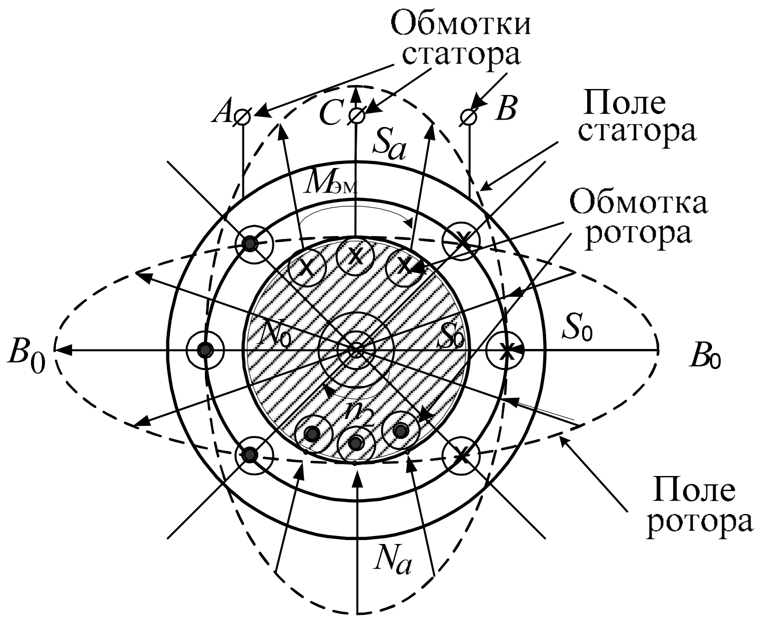


Рис. 15.17

ВМП статора воздействует на проводники ротора и вызывает тормозящий электромагнитный момент $M_{эм}$. В установившемся режиме электромагнитный момент равен вращающему моменту первичного двигателя ($M_{эм}$=$M_{вращ.}$).

Ориентация магнитного статора в пространстве зависит от характера нагрузки и определяется углом сдвига фаз между ЭДС E_0 и током I_0.

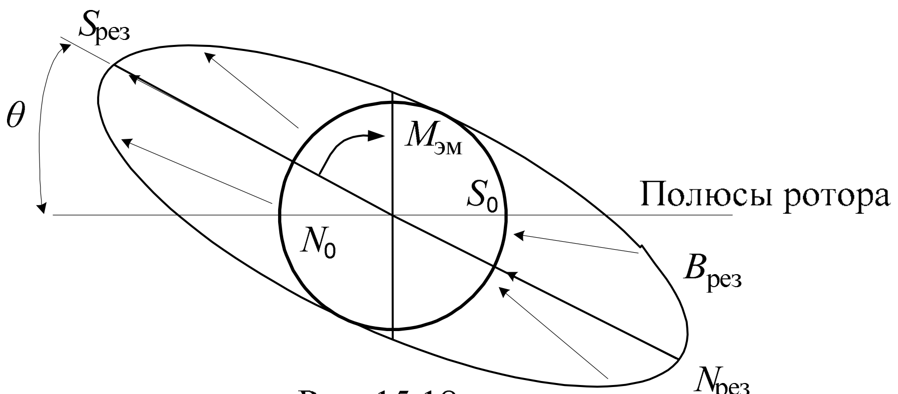


Рис. 15.18

Сложение ВМП статора и поля ротора дает *результирующее поле*, сдвинутое в пространстве на угол θ относительно оси полюсов ротора. Угол θ называют *угол рассогласования.*

В генераторе полюса ротора являются ведущими, тянущими за собой результирующее поле.

15.15. Уравнение электрического состояния и схема замещения фазы синхронного генератора

В фазной обмотке статора синхронного генератора основное магнитное поле ротора индуцирует ЭДС взаимной индукции:

$$e_0(t) = -\frac{d\psi_0(t)}{dt} = -\omega\psi_{0m}\cos\omega t \qquad (15.28)$$

с действующим значением

$$E_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} f\psi_{0m} = 4{,}44 f\psi_{0m}, \qquad (15.29)$$

где ψ_{0m} - амплитуда потокосцепления поля ротора с обмоткой статора.

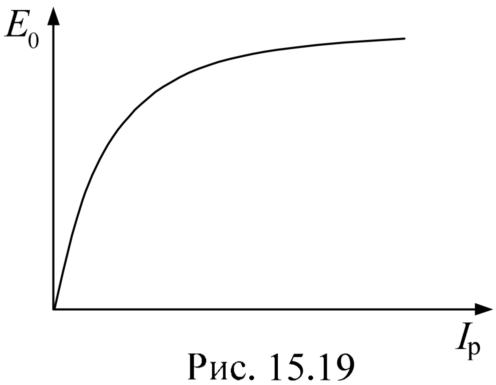


Рис. 15.19

Характеристикой холостого хода синхронного генератора называют зависимость напряжения на зажимах генератора E_0 в режиме холостого хода от тока возбуждения ротора I_p(рис.15.19). Эта зависимость повторяет кривую намагничивания $B(H)$ и позволяет оценить насыщение магнитопровода.

Токи трехфазной обмотки статора создают ВМП. Результирующее потокосцепление с фазой обмотки статора: $\psi_{рез} = \psi_o + \psi_a$, где ψ_a- потокосцепление магнитного поля токов статора с фазой обмотки статора, которое наводит в обмотке статора ЭДС самоиндукции $e_a(t) = -\dfrac{d\psi_a(t)}{dt}$.

Результирующая ЭДС статорной обмотки:

$$\underline{E}_{рез} = \underline{E}_o + \underline{E}_a. \qquad (15.30)$$

Векторная диаграмма статорной обмотки

Векторную диаграмму тока и напряжений в статорной обмотке (рис.15.20) строим в следующем порядке:

1. Строим с произвольной фазой вектор потокосцепления основного магнитного поля $\underline{\psi}_0$.

2. Строим $\underline{E}_o$, наводимую в фазной обмотке статора и отстающую от $\underline{\psi}_0$ на 90°.

3. Считая нагрузку статора индуктивной, строим $\underline{I}_{ст}$.

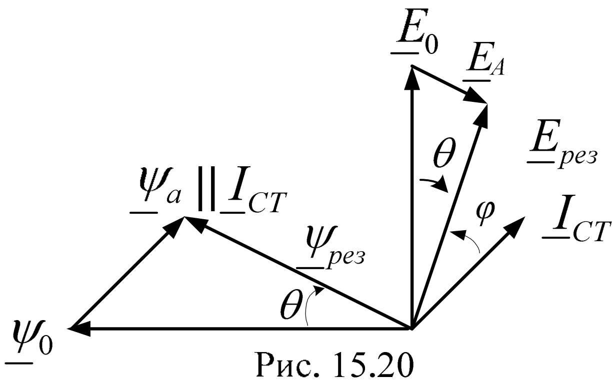


Рис. 15.20

4. Строим вектор потокосцепления магнитного поля токов статора с фазной обмоткой статора $\underline{\psi}_a \| \underline{I}_{cm}$.

5. Строим ЭДС самоиндукции статора $\underline{E}_a$.

6. Строим результирующее потокосцепление $\underline{\psi}_{рез} = \underline{\psi}_0 + \underline{\psi}_a$.

7. Строим результирующую ЭДС статорной обмотки $\underline{E}_{рез} = \underline{E}_0 + \underline{E}_a$.

Направление $\underline{\psi}_{рез}$ (результирующего поля) отстает от $\underline{\psi}_o$ (основного поля) на угол рассогласования θ. Результирующая ЭДС $\underline{E}_{рез}$ также отстает от $\underline{E}_0$ на угол θ.

Схема замещения фазы обмотки статора

В обмотке статора действует результирующая ЭДС $\underline{E}_{рез} = \underline{E}_0 + \underline{E}_a$. Сопротивление обмотки статора считаем активным и равным R. Схема замещения фазы обмотки статора показана на рис. 15.21.

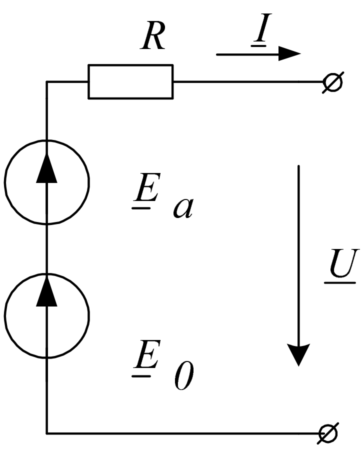


Рис. 15.21

По второму закону Кирхгофа: $\underline{U} + R\underline{I} = \underline{E}_0 + \underline{E}_a$.

По теореме замещения заменим $\underline{E}_a = -jX\underline{I}$ падением напряжения на индуктивном сопротивлении обмотки X. Это сопротивление X называют синхронным индуктивным сопротивлением. Обычно $R << X$, тогда $\underline{E}_0 \approx \underline{U} + jX\underline{I}$.

Получили вторую схему замещения фазы генератора (рис.15.22). Векторная диаграмма для этой схемы показана на рис.15.23.

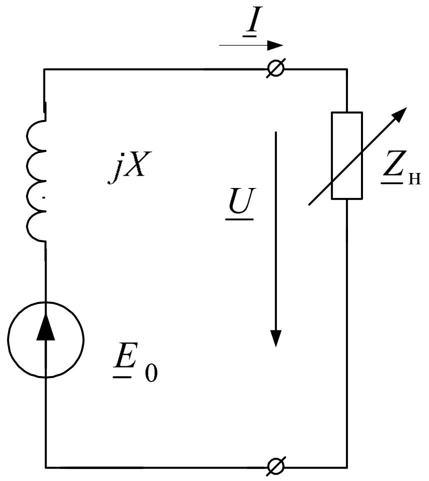


Рис. 15.22

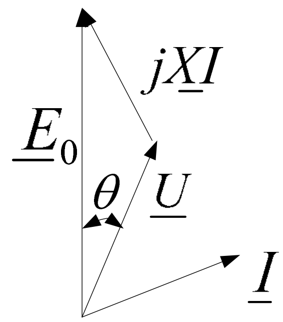


Рис. 15.23

Внутреннее сопротивление синхронного генератора имеет индуктивный характер. Вектор $\underline{E}_o$ опережает $\underline{U}$ на угол θ .

15.16. Внешние характеристики синхронных генераторов

Внешние характеристики определяют зависимости напряжения на выходе генератора от тока нагрузки. На рис.15.24 показаны внешние характеристики для активной и индуктивной нагрузки. Изменение напряжения может составлять несколько десятков процентов. Для стабилизации напряжения применяют автоматические стабилизаторы тока возбуждения $I_{возб}$, реагирующие на значение U. При резком увеличении активного тока статора ротор тормозится, снижается напряжение и частота. Важным показателем исправности энергосистем является частота сети
$(f = 49{,}9\,Гц)$.

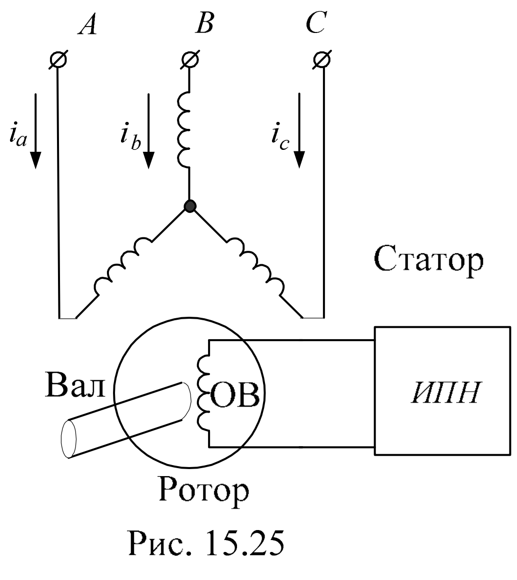


Рис. 15.25

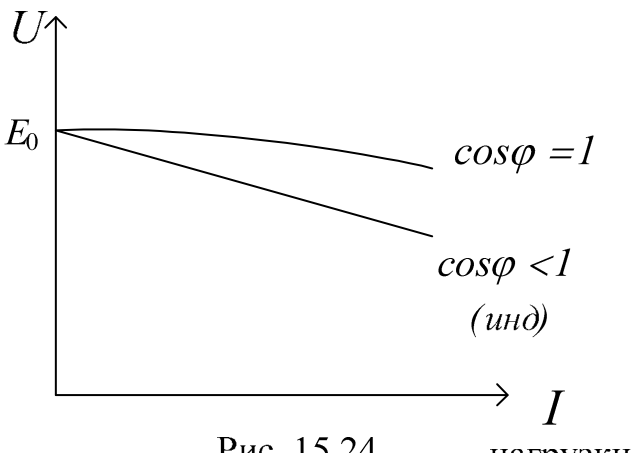


Рис. 15.24

15.17. Принцип действия и особенности работы синхронного двигателя

Схема синхронного двигателя показана на рис.15.25. Обмотки статора синхронного двигателя (СД) подключены к трехфазной цепи и создают

ВМП с частотой $n_1 = \dfrac{60f}{p}$. Ток возбуждения обмоток ротора создает постоянное магнитное поле (МП). Взаимодействие ВМП статора и МП ротора создает вращающий электромагнитный момент. Ротор вращается с частотой $n_1 = \dfrac{60f}{p}$.

Если есть момент сопротивления $\left(M_c > 0\right)$, ось магнитного поля ротора смещается на угол θ в сторону отставания (рис.15.26).

В установившемся режиме момент сопротивления $M_c = M_{эм}$,

$$M_{эм} = M = \frac{P}{\Omega_1} = \frac{3E_oU\,\boldsymbol{sin}\,\theta}{\Omega_1\,X} = M_{\boldsymbol{max}} \cdot \boldsymbol{sin}\,\theta, \qquad (15.31)$$

где $\Omega_1 = \dfrac{2\pi n_1}{60}$ - угловая скорость ВМП статора,

$$M_{\boldsymbol{max}} = \frac{3E_oU}{\Omega_1 X}. \qquad (15.32)$$

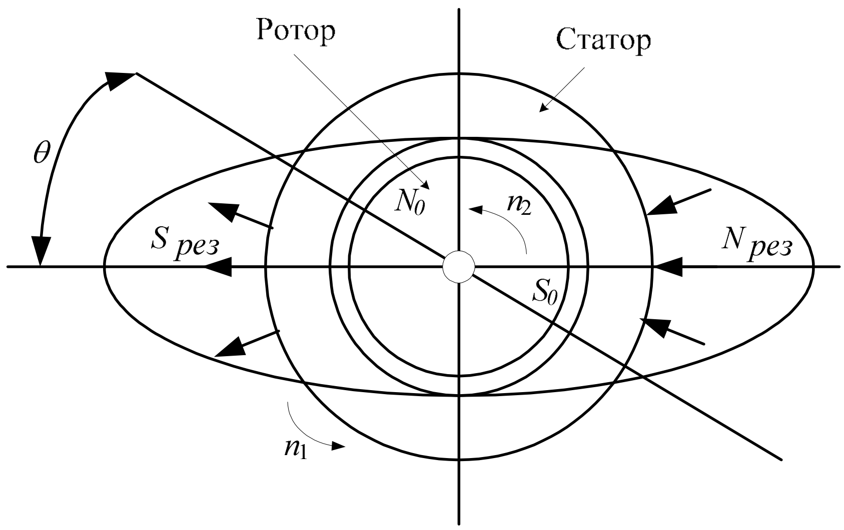


Рис. 15.26

Схема замещения обмотки статора синхронного двигателя

На рис.15.27а показана замещения обмотки статора синхронного двигателя.

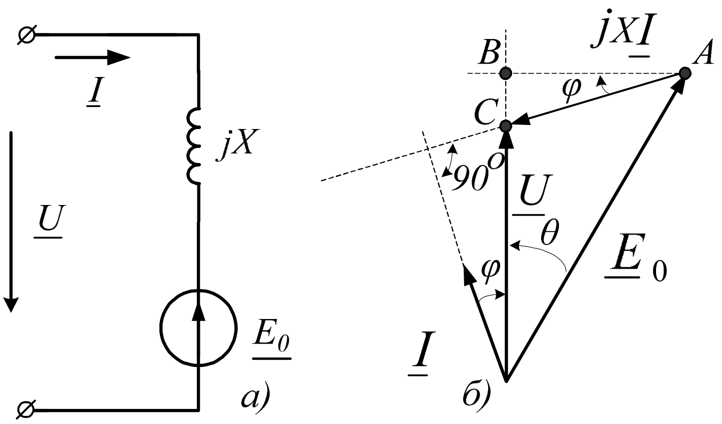


Рис. 15.27

В схеме замещения: E_0 - противо -ЭДС, наводимая в статоре, X - синхронное сопротивление. Входное напряжение обмотки $\underline{U} = \underline{E}_0 + jX\underline{I}$.

Вектор ЭДС E_0, связанный с положением полюсов ротора, при наличии нагрузки на валу отстает от вектора напряжения сети, с которым связано положение полюсов результирующего ВМП (рис.15.27б).

В треугольнике ΔABC:

$$XI\,\boldsymbol{cos}\,\varphi = E_0\,\boldsymbol{sin}\,\theta,\; I\,\boldsymbol{cos}\,\varphi = \frac{E_0\,\boldsymbol{sin}\,\theta}{X}. \tag{15.33}$$

Угловые характеристики синхронного двигателя

Это зависимости электромагнитной мощности P или электромагнитного момента M от θ.

Полная активная мощность трехфазного СД:

$$P = 3UI\,\boldsymbol{cos}\,\varphi = \frac{3E_oU}{X}\boldsymbol{sin}\,\theta = P_{\boldsymbol{max}}\,\boldsymbol{sin}\,\theta. \tag{15.34}$$

Электромагнитный момент:

$$M_{эм} = \frac{P}{\Omega_1} = \frac{3E_oU}{X\Omega_1}\boldsymbol{sin}\,\theta = M_{\boldsymbol{max}}\,\boldsymbol{sin}\,\theta. \tag{15.35}$$

Перегрузочная способность двигателя определяется коэффициентом:

$$\lambda_{\boldsymbol{max}} = \frac{M_{\boldsymbol{max}}}{M_{ном}} = \frac{1}{\boldsymbol{sin}\,\theta}, \tag{15.36}$$

который зависит от напряжения сети и тока возбуждения ротора. Номинальный момент $M_{ном}$ соответствует углу рассогласования $\theta \le 30^0$. Поэтому $\lambda > 2$.

Синхронный двигатель обладает свойством саморегулирования. При изменении момента сопротивления на валу изменяется угол рассогласования θ и электромагнитный момент становится равным моменту сопротивления. При этом изменяется активная мощность и ток статора. Зависимости мощности и момента синхронного двигателя от угла рассогласования называют угловыми характеристиками (рис.15.28). На нисходящих ветвях работа неустойчивая и невозможна. С увеличением тока ротора, магнитное поле становится сильнее и угол согласования уменьшается. Если момент сопротивления $M_c > M_{max}$, ротор остановится, увеличится ток статора и произойдет перегрев двигателя.

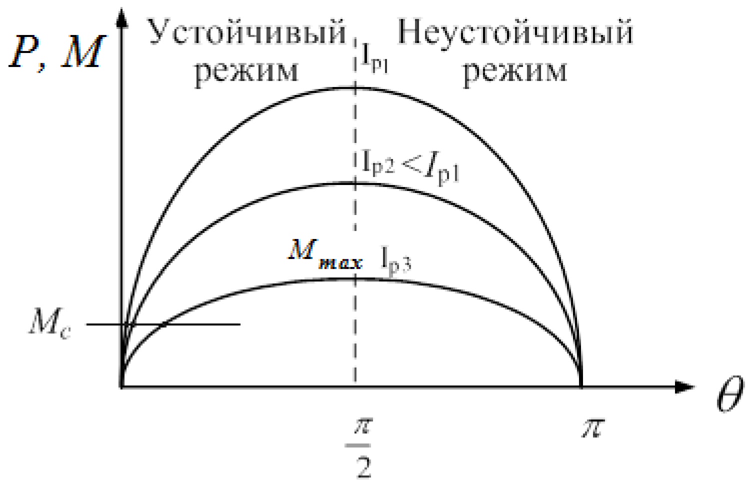


Рис.15.28

Пуск синхронного двигателя

При запуске синхронного двигателя быстровращающееся ВМП статора действует на неподвижный инерционный ротор со знакопеременной силой и не может разогнать его.

Для предварительного разгона применяют короткозамкнутую обмотку типа «беличье колесо».

После асинхронного разгона обмотку возбуждения ротора подключают к источнику постоянного напряжения (ИПН) и двигатель переходит в синхронный режим.

15.18. Синхронные микродвигатели

Применяют в автоматических устройствах для приводов механизмов с постоянной частотой вращения. Мощность микродвигателей составляет от долей до сотен Вт. Эти двигатели не имеют обмотки возбуждения на роторе.

В зависимости от типа ротора различаются микродвигатели:

- с постоянными магнитами;
- гистерезисные;
- реактивные.

Синхронные микродвигатели с постоянными магнитами

На рис.15.29 изображен ротор микродвигателя, который содержит постоянные магниты с большой коэрцитивной силой ($H_c > 50 кА / м$). В полюсах ротора имеются стержни короткозамкнутой пусковой обмотки для разгона двигателя. Магниты залиты пластмассовой заливкой. ВМП статора вращает магнитный ротор с постоянной скоростью. Свойства и рабочие характеристики не отличаются от синхронного двигателя с электромагнитным возбуждением.

Недостатком такого двигателя является высокая стоимость постоянных магнитов, выполняемых из редкоземельных материалов.

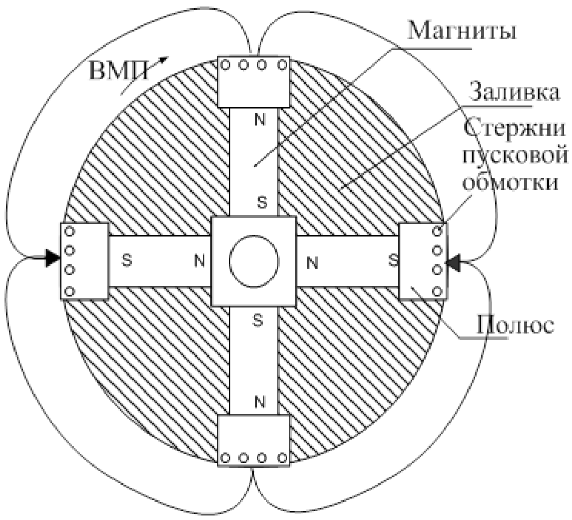


Рис.15.29

Гистерезисные двигатели

Вращающий момент возникает за счет явления гистерезиса при перемагничивании ротора. Магнитный материал ротора намагничивается и перемагничивается под действием ВМП токов статора.

На рис.15.30 полюс N намагнитил элементарную область ротора. При повороте ВМП за счет гистерезиса состояние намагниченности ротора сохраняется и возникает тангенциальная сила F, создающая гистерезисный вращающий момент $M_Г$ и вращающая ротор.

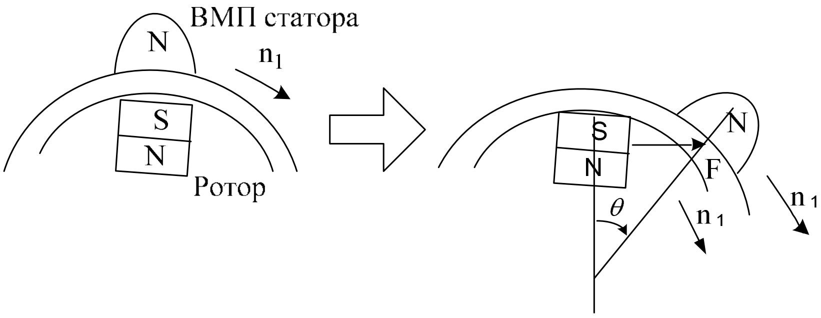


Рис.15.30

В синхронном режиме момент сопротивления $M_C < M_\Gamma$, перемагничивания материала не происходит, и гистерезисный двигатель работает как синхронный двигатель с постоянными магнитами. При этом должно быть $\theta < \theta_\Gamma \approx 20^o - 25^o$.

Если $M_C > M_\Gamma$, ротор перемагничивается и двигатель переходит в асинхронный режим. Этот режим не экономичен, так как потери на перемагничивание достаточно велики.

Энергетические показатели гистерезисных двигателей не очень высокие: КПД $\approx 50 \div 60\%$, $\cos\varphi = 0{,}4 \div 0{,}6$.

Реактивные двигатели

Роторы реактивных двигателей выполняют из пакетов магнитомягкой листовой электротехнической стали, залитой алюминием (рис.15.31).

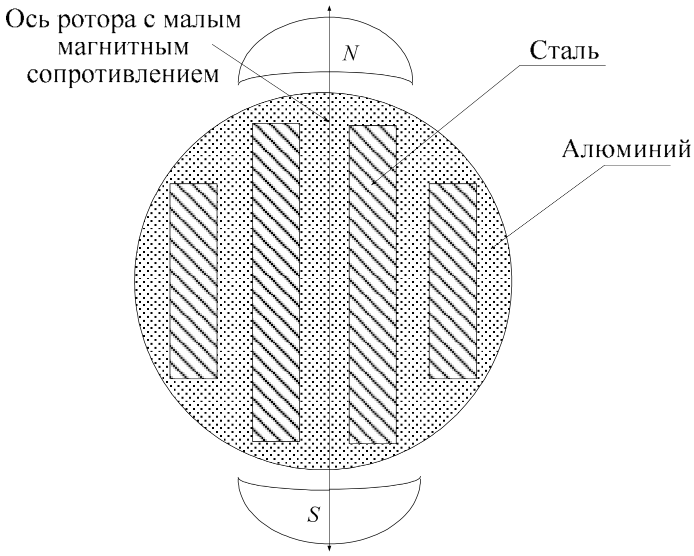


Рис.15.31

Это обеспечивает разное магнитное сопротивление ротора в радиальных направлениях. Стальные зоны имеют малое магнитное сопротивление, и ротор стремится занять положение, при котором магнитный поток ВМП проходит по оси полюсов с наименьшим магнитным сопротивлением. Реактивные двигатели имеют простую конструкцию, низкая стоимость, но малый вращающий момент.

Шаговый двигатель

Шаговый двигатель (ШД) это микродвигатель, у которого поворот ротора на фиксированный угол происходит после подачи на статорные обмотки управляющих импульсов прямоугольной формы. Управляющие импульсы формируются электронным коммутатором.

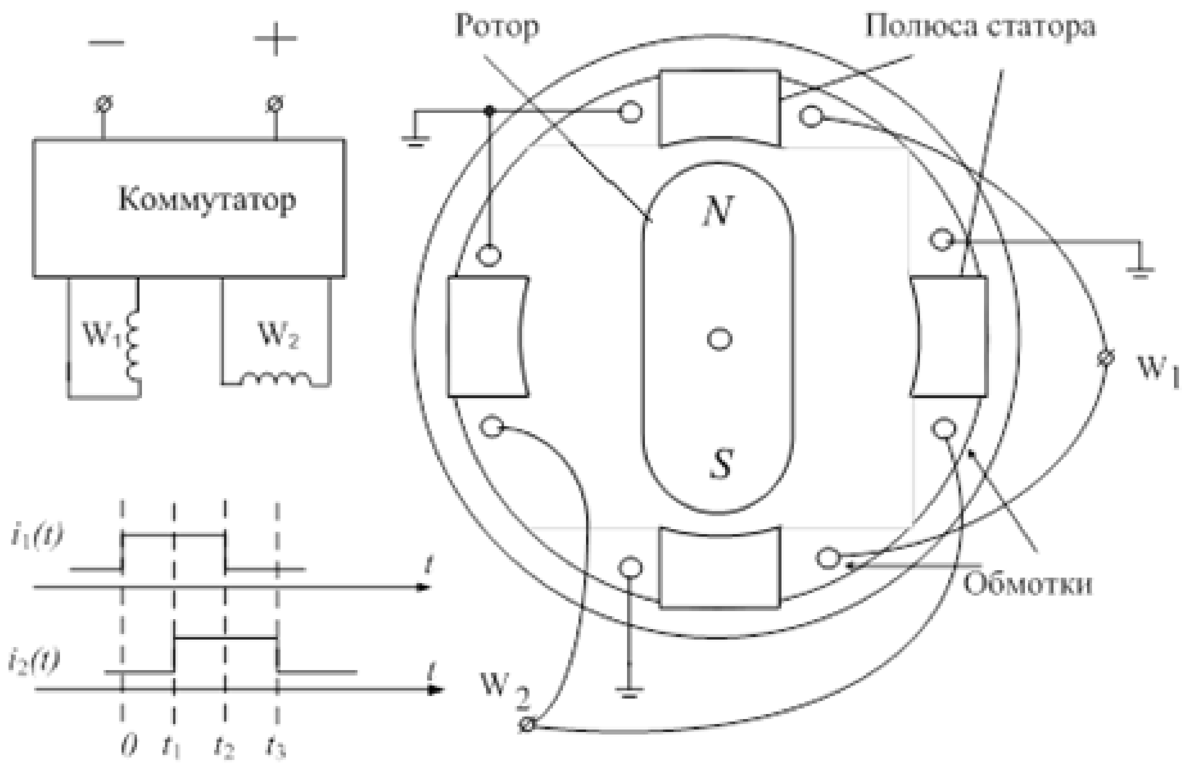


Рис.15.32

Шаговый двигатель (рис.15.32) имеет явнополюсный ротор с постоянными магнитами. Статор имеет обмотки W_1 и W_2. Коммутатор переключает токи $i_1(t)$ и $i_2(t)$ в обмотках по определенной диаграмме. В результате магнитное поле статора занимает определенные фиксированные положения (рис.15.33) и ротор поворачивается шагами на фиксированный угол $\nu = \dfrac{360^o}{2p}$, $2p$ - число полюсов на статоре.

В современных ШД угол поворота на один шаг ν составляет от $1{,}8^o$ до 15^o.

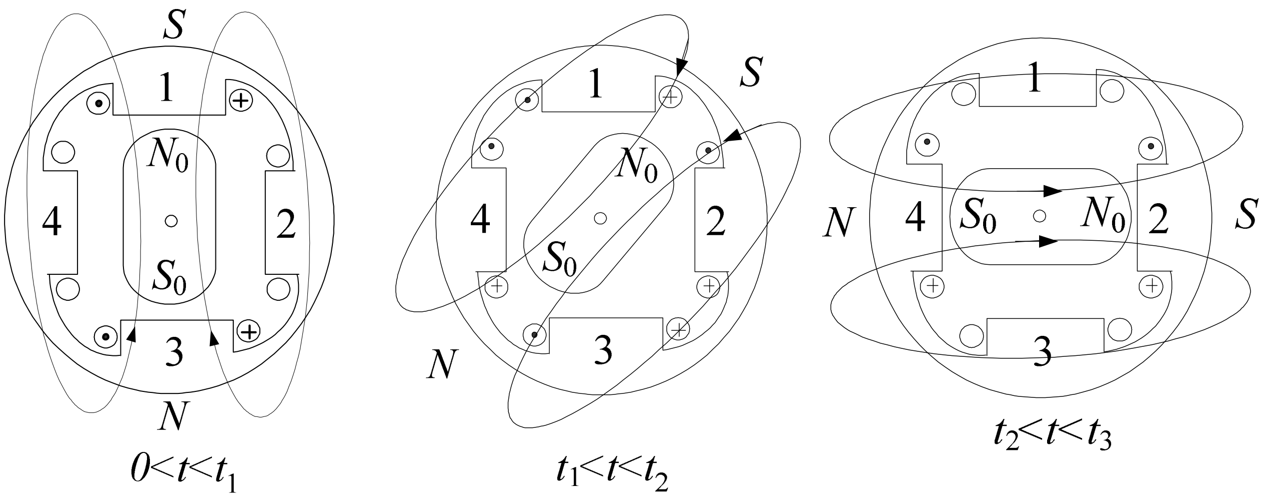


Рис.15.33

15.19. Электрические машины постоянного тока

Электрические машины постоянного тока (МПТ) применяются в устройствах электроприводов с высокой частотой вращения. Входят в состав автомобильного, корабельного, самолетного оборудования. Двигатели имеют мощность от долей ватта до десятков киловатт. Мощные двигатели постоянного тока используется для вращения винтов больших судов, в прокатных станах.

Устройство машин постоянного тока (МПТ)

Устройство машины постоянного тока показано на рис.15.34.

Неподвижная часть МПТ – статор содержит *полюсные наконечники* с обмотками возбуждения.

Подвижная часть - якорь представляет собой цилиндр, на поверхности которого в пазах расположена *якорная обмотка*.

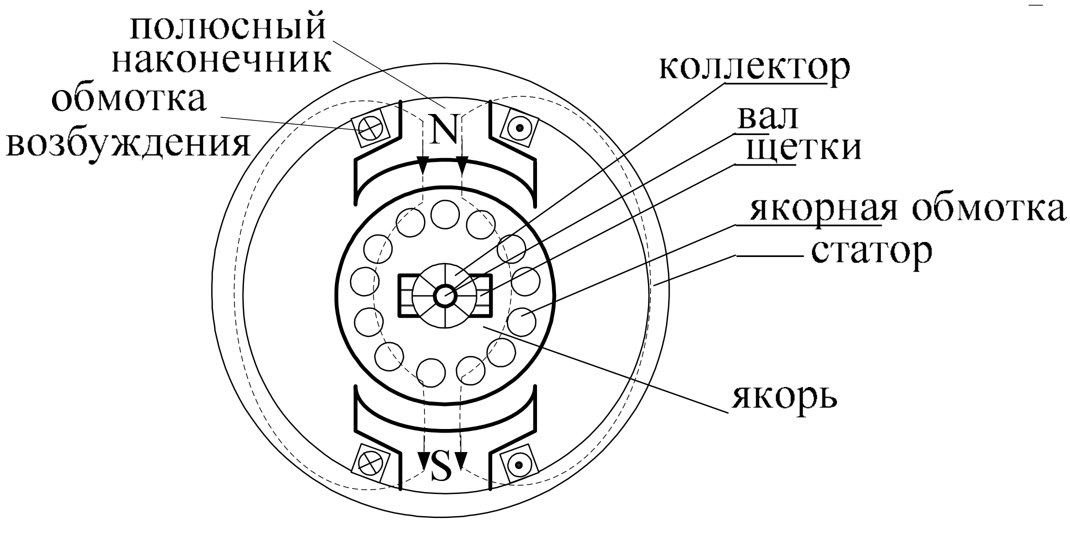


Рис.15.34

Обмотка якоря состоит из витков, охватывающих якорь вдоль оси. Витки объединяются в секции. Секцией называется часть обмотки якоря, состоящая из одного или нескольких последовательно соединенных витков, присоединенных своими концами к *медным коллекторным пластинам*, которые следуют друг за другом по схеме обмотки и изолированы друг от друга. Коллектор это цилиндр, состоящий из изолированных медных пластин.

Секция (рис.15.35) состоит из двух активных сторон (*ab*,*cd*), которые располагаются вдоль оси машины под полюсами разной полярности.

На рис.15.36 показана линейная развертка полюсного наконечника. Под полюсным наконечником магнитная индукция B_n почти постоянна, а вне его равна нулю.

Рис.15.35

В секциях обмотки якоря при вращении возникает ЭДС. ЭДС максимальна, если шаг обмотки соответствует полюсному делению $\tau = \dfrac{\pi D_Я}{2p}$,

$D_Я$ -диаметр якоря, p - число пар полюсов.

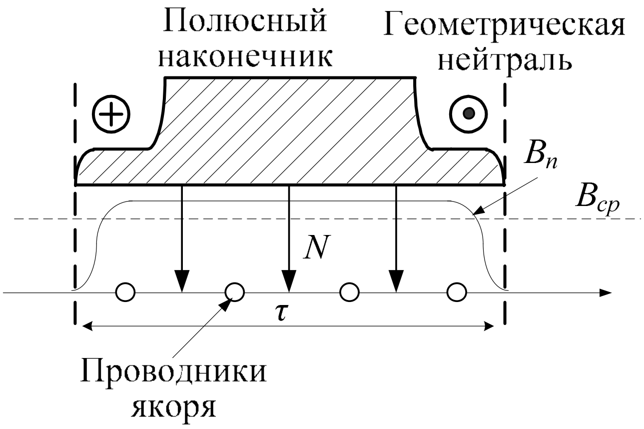


Рис.15.36

Геометрической нейтралью называют линию, проведенную между магнитными полюсами в точке, где B_n=0.

Электрический контакт с вращающимся коллектором осуществляется с помощью угольных щеток, причем щетки установлены на геометрических нейтралях.

Схематическое изображение МПТ показано на рис.15.37.

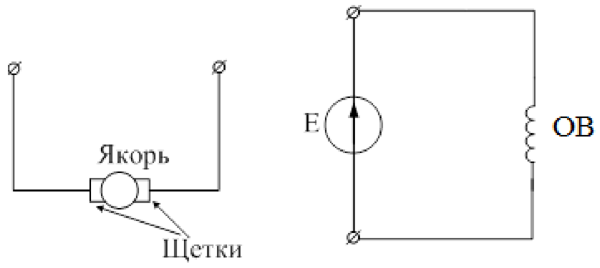


Рис.15.37

Принцип действия машин постоянного тока в генераторном и двигательном режиме

Генератор постоянного тока (ГПТ)

На рис.15.38 показан чертеж генератора постоянного тока.

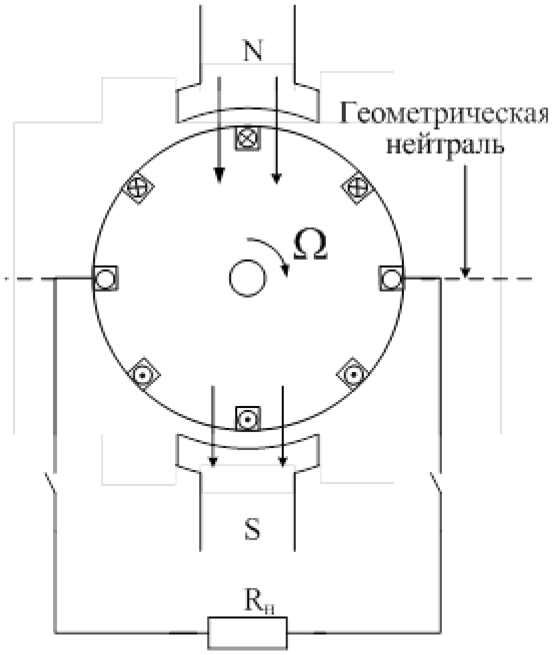


Рис.15.38

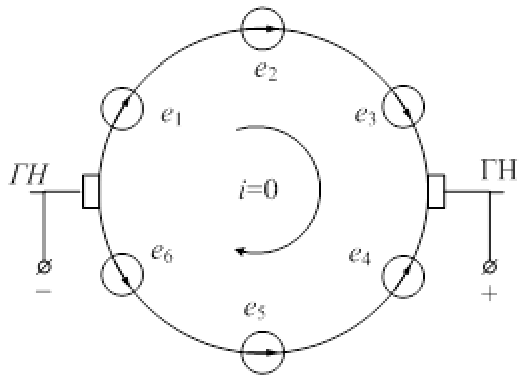


Рис.15.39

Якорь ГПТ приведен во вращение с угловой скоростью Ω. Обмотка возбуждения (не показана) подключена к источнику постоянного напряжения. Внешняя цепь отключена. Проводники якоря пересекают магнитное поле с индукцией B. Обмотка якоря является замкнутым контуром, так как все секции соединены через коллектор. Под каждым полюсом находится одинаковое число проводников, поэтому алгебраическая сумма мгновенных значений ЭДС всех последовательно соединенных проводников равна нулю (рис.15.39).

Щетки расположены на геометрической нейтрали и делят обмотку якоря на *две параллельные ветви* с равными алгебраическими суммами ЭДС. Поэтому ток в контуре обмоток якоря равен нулю при размыкании нагрузки.

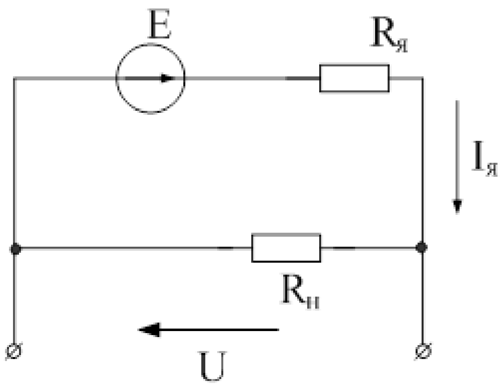


Рис.15.40

Схема замещения цепи якоря генератора показана на рис.15.40, где $R_я$ - эквивалентное сопротивление параллельно соединенных ветвей обмотки. Ток в проводниках якоря создает тормозящий электромагнитный момент равный вращающему моменту привода.

Уравнение электрического состояния ГПТ записывают так:

$$E = U + R_Я I_Я. \tag{15.37}$$

Умножаем на ток якоря $I_Я$:

$$EI_Я = UI_Я + R_Я I_Я{}^2 = P + \Delta P_{эл}. \tag{15.38}$$

Здесь: P - мощность приемника, $\Delta P_{эл}$ - мощность потерь в обмотках якоря; $EI_Я = P_{эм} = P_{мех} = M\Omega$ - электромагнитная мощность, равная механической мощности привода.

Принцип действия двигателя постоянного тока (ДПТ)

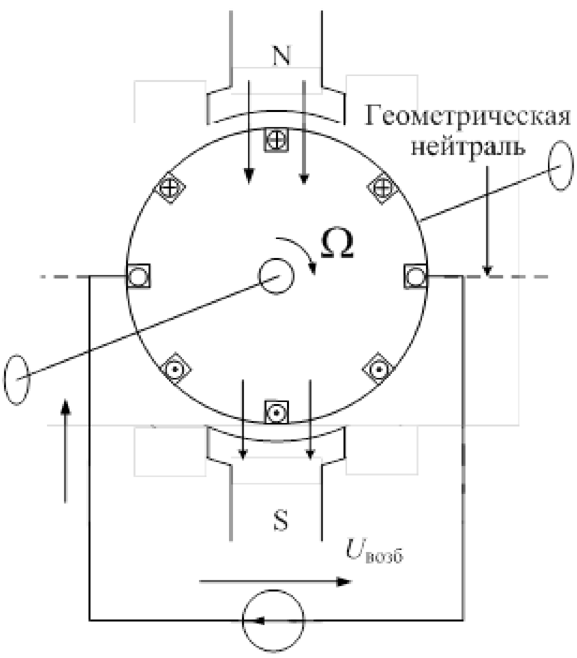


Рис.15.41

Обмотки возбуждения и якоря подключены к источнику постоянного напряжения. По правилу левой руки определяем направление электромагнитных сил $F_{эм}$, создающих вращающий электромагнитный момент. Якорь двигателя вращается с угловой скоростью Ω, если $M_{эм} = M_c$ (момент сопротивления). В обмотке якоря наводится противо - ЭДС E, противоположная направлению тока.

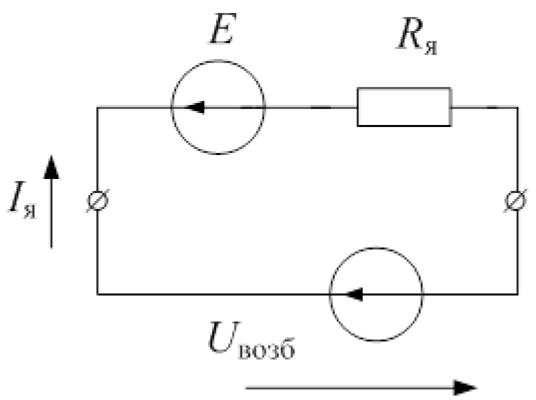


Рис.15.42

На рис.15.42 показана схема замещения якорной цепи ДПТ.

Уравнение ДПТ имеет вид:

$$U = E + R_Я I_Я; \qquad (15.39)$$

$$I_Я = \frac{U - E}{R_Я}. \qquad (15.40)$$

Составим баланс мощностей цепи якоря:

$$UI_Я = EI_Я + R_Я I_Я{}^2, \qquad (15.41)$$

или:

$$P_э = P_{эм} + P_{эя}, \qquad (15.42)$$

где: $P_э$ - потребляемая якорем электрическая мощность, $P_{эм}$ - электромагнитная мощность, $P_{эя}$ - мощность потерь в якоре.

Электромагнитная мощность равна механической мощности:

$$EI_Я = P_{эм} = P_{мех} = M\Omega.$$

ЭДС якоря и электромагнитный момент

ЭДС якоря равна сумме мгновенных ЭДС проводников одной из параллельных ветвей обмотки якоря:

$$E = \frac{pN}{2\pi a}\Omega\Phi_п = \frac{pN}{60a}n\Phi_п, \qquad (15.43)$$

где:

p – число пар полюсов;

N – общее количество проводников якоря;

$2a$ – количество параллельных ветвей;

$a = p$ – количество щеточных узлов, равное числу пар полюсов статора;

$n = \dfrac{60\Omega}{2\pi}$ – количество оборотов в минуту;

$\Phi_п$ – магнитный поток в зазоре под полюсом.

Обозначим $C_E = \dfrac{pN}{60a}$, (15.44)

тогда: $E = C_E n\Phi_п$, C_E - электрическая константа, коэффициент двигателя.

ЭДС якоря E пропорциональна скорости вращения и магнитному потоку.

Электромагнитный момент:

$$M_{ЭМ} = \frac{P_{ЭМ}}{\Omega} = \frac{EI_{Я}}{\Omega} = \frac{pN}{2\pi a}\Phi_{п} I_{Я} = C_{м}\Phi_{п} I_{Я}, \qquad (15.45)$$

$$\text{где: } C_{м} = \frac{pN}{2\pi a} \qquad (15.46)$$

- механический коэффициент двигателя.

Электромагнитный момент $M_{ЭМ}$ пропорционален магнитному потоку полюса и току ротора. Он является тормозящим в генераторе и вращающим в двигателе.

Если указана номинальная мощность $P_{НОМ}$(кВт), то:

$$M_{ном} = 9{,}55 \cdot 10^{3} \frac{P_{ном}}{n_{ном}} (н \cdot м). \qquad (15.47)$$

Искрение в щеточном контакте

На рис.15.43 изображен коллектор машины постоянного тока. При вращении якоря коллекторные пластины соприкасаются со щеткой, секции замыкаются щеткой и переходят из одной параллельной ветви в другую.

При коммутации может наблюдаться нежелательное *искрение в щеточном контакте*.

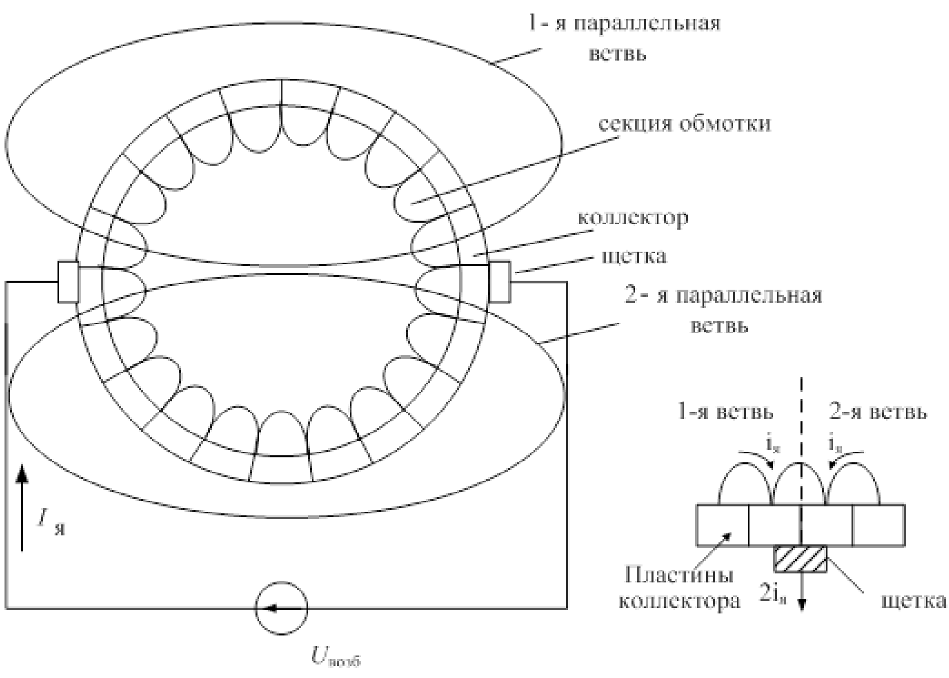


Рис.15.43

Причины искрения

1. *Механические причины*: некачественное изготовление коллектора, загрязнение.

2. *Электромагнитные причины*: секция имеет индуктивность L_S и накапливает электромагнитную энергию. В момент разрыва тока происходит коммутация индуктивности и возникает искра.

Для уменьшения искрения в двигателе устанавливают дополнительные полюсы статора на геометрических нейтралях. Катушки возбуждения включают последовательно в цепь якоря. Магнитный поток дополнительных полюсов компенсирует реактивную ЭДС в номинальных режимах.

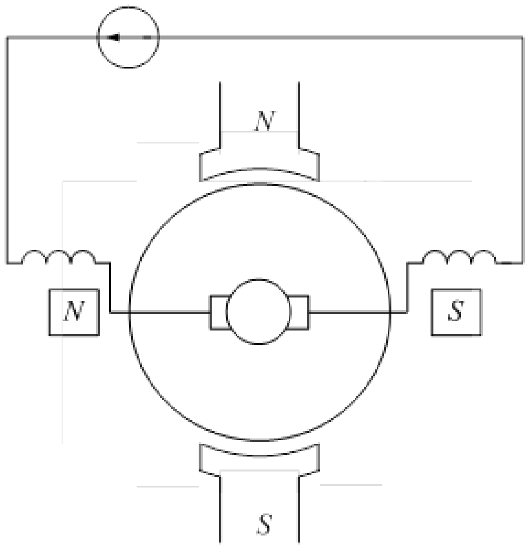


Рис.15.44

Способы возбуждения машин постоянного тока

Используют четыре варианта питания обмотки возбуждения машин постоянного тока:

1. Независимое возбуждение (рис. 15.44), в котором катушка возбуждения питается от независимого источника постоянного напряжения.

2. Параллельное возбуждение (рис.15.45), в котором катушка возбуждения включена параллельно якорю МПТ и питается от обмотки якоря.

3. Последовательное возбуждение (рис.15.46), в котором через катушку возбуждения проходит ток якоря ($I_В = I_Я$). Катушка возбуждения должна быть выполнена толстым проводом.

4. Смешанное возбуждение (рис.15.47), в котором используют одну параллельную катушку *ОВ1* и одну последовательную *ОВ2*.

Способы возбуждения сильно влияют на электрические свойства генераторов и механические свойства двигателей постоянного тока.

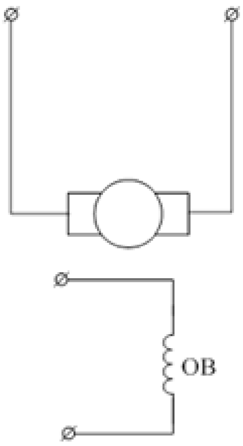


Рис.15.44

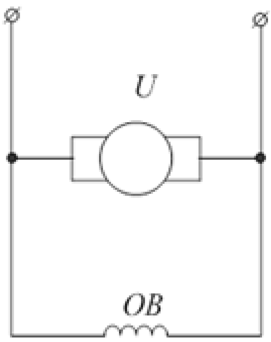


Рис.15.45

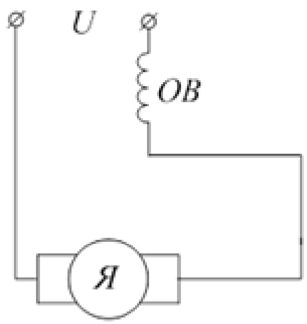


Рис.15.46

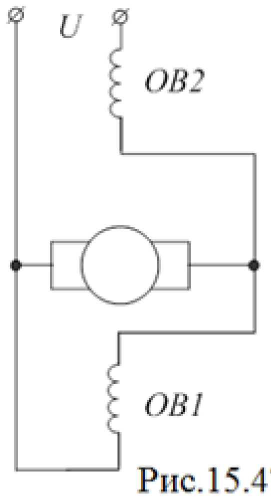


Рис.15.47

Генераторы постоянного тока независимого возбуждения

Схема генератора постоянного тока независимого возбуждения показана на рис.15.48. Ток возбуждения можно регулировать реостатом R_B.

Ток возбуждения и магнитный поток не зависят от нагрузки генератора.

Характеристика холостого хода (рис.15.49) $E = f\left(I_B\right)$ это зависимость напряжения на выходе генератора от тока возбуждения при отключенной нагрузке $R_H = \infty$. При этом ток якоря равен нулю $I_Я = 0$, количество оборотов постоянно $n = const$.

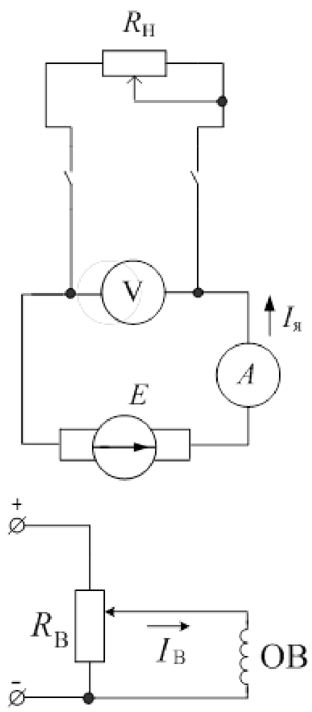


Рис.15.48

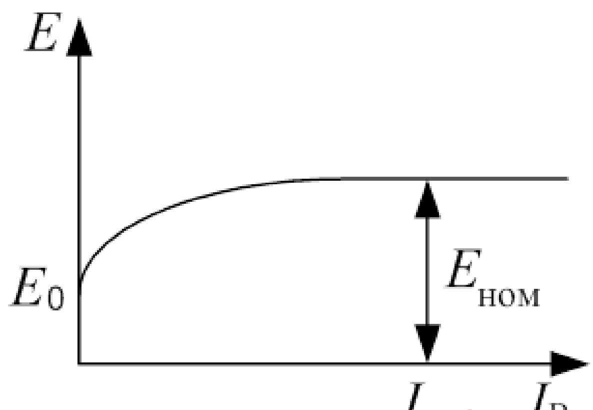


Рис.15.49

Характеристика холостого хода $E = f\left(I_B\right)$ подобна зависимости намагничивания $B(H)$. При $I_B = 0$ возникает остаточная ЭДС E_0.

Внешняя характеристика

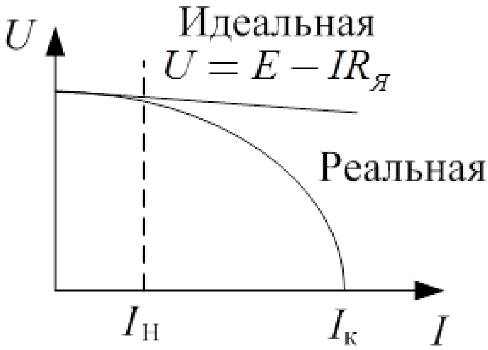


Рис.15.50

Это зависимость напряжения генератора от тока нагрузки: $U = f(I)\left(n = const, R_B = const\right)$. Снимают внешнюю характеристику при отсутствии размагничивающего действия якоря и насыщения магнитной системы. Реально напряжение на зажимах генератора снижается быстрее, чем в идеальной зависимости $U = E - I_Я R_Я$.

Регулировочная характеристика

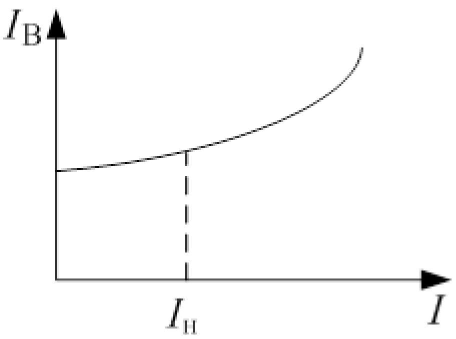


Рис.15.51

Это зависимость тока возбуждения от тока нагрузки для поддержания постоянного напряжения на зажимах генератора.

$$I_B = f(I)\ (n = const; U = const)$$

Недостаток генератора с независимым возбуждением: требуется отдельный источник питания для обмотки возбуждения. Поэтому чаще применяют генераторы с самовозбуждением.

Генераторы постоянного тока с самовозбуждением

Питание обмотки возбуждения главных полюсов осуществляется самим генератором (рис.15.52). По схеме мы видим, что $I_Я = I + I_B$, причем: $I_B \cong 1 \div 3\% I_Я$.

Характеристика холостого хода аналогична характеристике генератора с независимым возбуждением. *Внешняя характеристика* показана на рис. 15.53. Напряжение на зажимах падает быстрее, чем у генератора с независимым возбуждением. При критическом значении тока $I_{кр}$ ток возбуждения становится недостаточным и происходит срыв генерации. Напряжение быстро падает, ток нагрузки уменьшается до значения тока короткого замыкания $I_к$. При этом ток возбуждения $I_B = 0$, напряжение на зажимах мало и короткое замыкание не опасно.

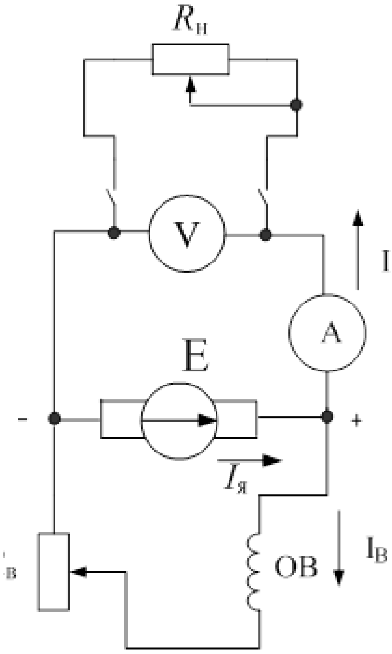


Рис.15.52

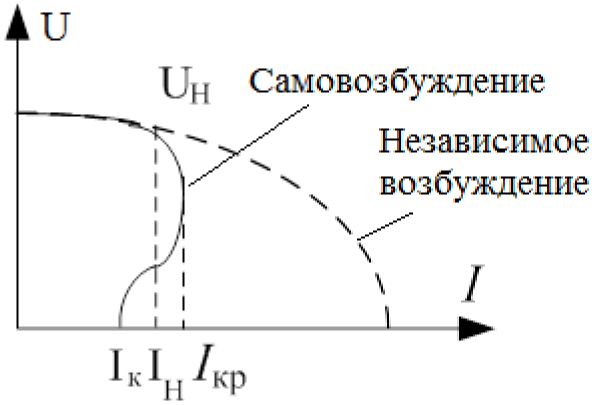


Рис.15.53

Генераторы постоянного тока смешанного возбуждения

Схема ГПТ смешанного возбуждения показана на рис.15.54. Такой генератор имеет последовательную (сериесную) обмотку возбуждения С и параллельную (шунтовая) обмотку Ш. Согласное включение обмоток обеспечивает высокую стабильность напряжения (рис.15.55, график 1).

Встречное включение обмоток обеспечивает постоянство тока при изменении напряжения и применяется для сварки (рис.15.55, график 2).

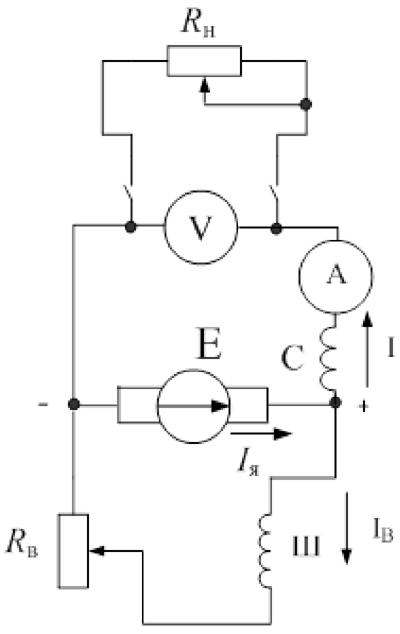


Рис.15.54

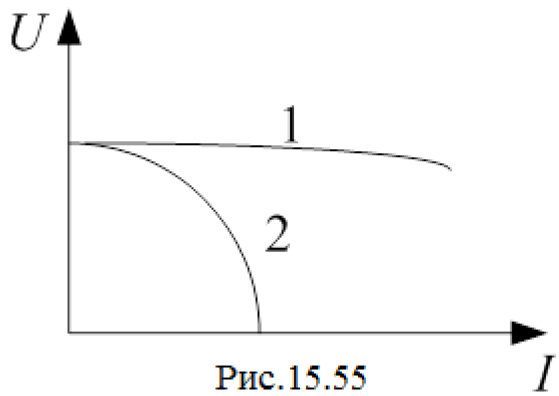


Рис.15.55

15.20. Двигатели постоянного тока независимого и параллельного возбуждения

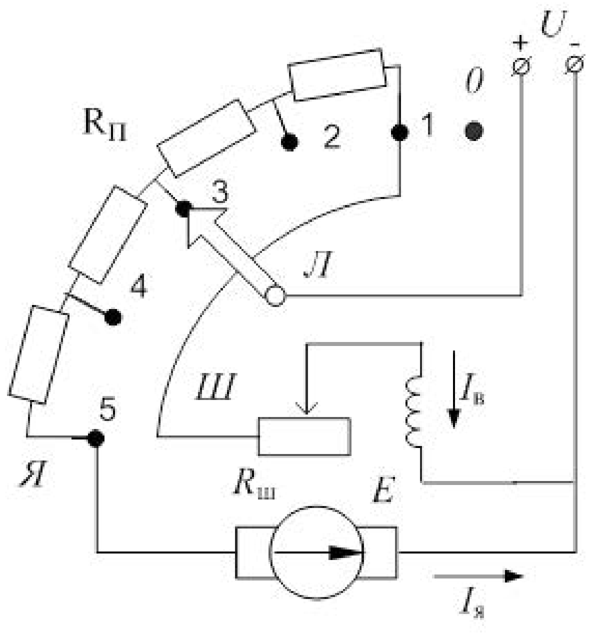


Рис.15.56

На схеме (рис.15.56): Л – линия; Я – якорь; Ш – шунт; $R_{п}$ - пусковой реостат; $R_{ш}$ - реостат шунта возбуждения.

Из положения *0* ручку переводят в положение 5 (Я), ток якоря увеличивается, двигатель увеличивает обороты.

Цепь возбуждения подключена к сети непосредственно через дуговой контакт Ш.

Вращающий момент:

$$M = F\frac{DN}{2} = B_{CP} l I_1 \frac{DN}{2},$$

где:

F – сила, действующая на один проводник обмотки якоря; *D* – диаметр якоря; *N* – общее число проводников якоря; I_1 – ток в одном проводнике якоря; *l* – действующая длина проводника; B_{CP} - среднее значение индукции в зазоре.

Второй способ расчета момента:

$$M = C_M \Phi I_Я .$$

15.21. Механические характеристики ДПТ

Это зависимость частоты вращения от момента на валу двигателя при условии ($U_я = const, I_B = const$).

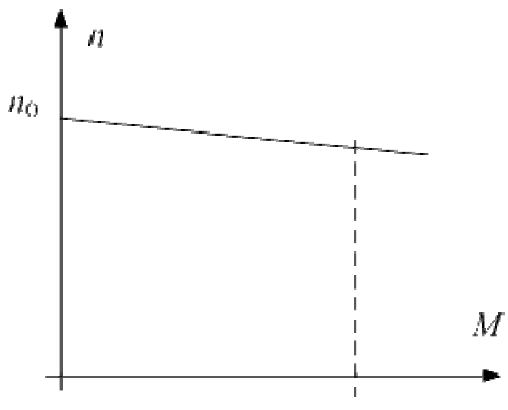


Рис.15.57

$$U = E + I_Я R_Я = C_E n\Phi + \frac{M}{C_M \Phi} R_Я$$

(*E* – противо-ЭДС).

Выразим *n*:

$$n = \frac{U}{C_E \Phi} - \frac{R_Я}{C_E C_M \Phi^2} M = n_0 - kM .$$

Частота изменяется незначительно. Характеристика жесткая.

15.22. Регулировка частоты вращения ДПТ независимого и параллельного возбуждения

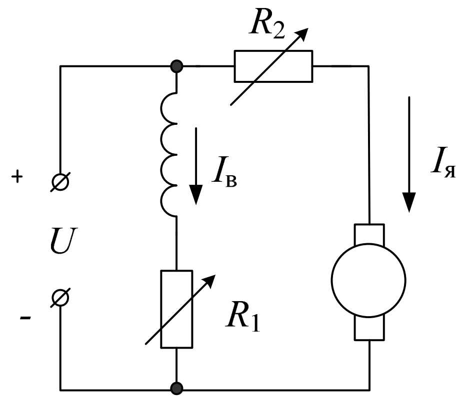


Рис.15.58

Из уравнения двигателя: $n = \dfrac{U - I_Я R_Я}{C_E \Phi} \cong \dfrac{U}{C_E \Phi}$, так как $R_Я$<< (сотые доли Ома).

Регулируют ток возбуждения и ток якоря (рис.15.58). Реверсирование получают изменением направления тока возбуждения или тока якоря.

Возможна плавная регулировка в больших пределах (до 1000 раз).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. – М.: Гардарики, 2006. – 638с.

2. Электротехника и ТОЭ в примерах и задачах /В.А. Прянишников и др. – Санкт-Петербург.: «КОРОНА принт», 2001.- 234с.

3. Прянишников В.А. Теоретические основы электротехники. Курс лекций. – Санкт-Петербург.: «Корона принт», 2000. – 368с.

4. Немцов М.В. Электротехника и электроника: Учебник для вузов.- М.: Издательство МЭИ, 2003.- 616 с.

5. Алехин В.А. Электротехника. Лабораторный практикум с использованием Миниатюрной электротехнической лаборатории МЭЛ, компьютерного моделирования, Mathcad. - М.: МИРЭА, 2008, 2010.

6. Алехин В.А. Электротехника и электроника. Лабораторный практикум с использованием миниатюрной электротехнической лаборатории МЭЛ, компьютерного моделирования, Mathcad и LabVIEW. - М.: МИРЭА, 2010, 2013.

7. Алехин В.А. Электротехника и электроника. Компьютерный лабораторный практикум в программной среде TINA-8. - М.: МИРЭА, 2013.

8. Алехин В.А. Расчет электрических цепей в MATHCAD.–М.: МИРЭА, 2006, № 0568.

9. М.М. Кацман. Электрические машины автоматических устройств. – М.:ФОРУМ, ИНФРА-М, 2002.

10. Макаров Е.Г. Инженерные расчеты в Mathcad. Учебный курс.- СПб.: Питер, 2003. – 448с.

СОДЕРЖАНИЕ