

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ  
РАДИОТЕХНИКИ, ЭЛЕКТРОНИКИ И АВТОМАТИКИ  
(МИРЭА)»

**МАГНИТНО-СВЯЗАННЫЕ ЦЕПИ.  
ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ.  
КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
В СРЕДЕ «TINA-8»  
Часть 3**

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ  
ДЛЯ ЛАБОРАТОРНО-ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ  
Для студентов всех форм обучения

МОСКВА 2012

Автор: В.А. Алехин.

Редактор: В.Ю. Маслов

Методические указания для лабораторно-практических занятий по электротехнике содержат теоретические сведения, расчетные задания, компьютерное моделирование и контрольные задания по разделам «Магнитно-связанные цепи» и «Переходные процессы». Изучается и используется современная программа компьютерного моделирования электронных схем «TINA-8». Работая по методическим указаниям, студенты могут самостоятельно освоить расчеты электрических цепей, проверить результаты расчетов на компьютерных моделях, выполнить на компьютерных моделях интересные исследования. Контрольные задания позволяют проверить усвоение материала и могут быть многовариантными как в курсовой работе. Такое содержание методических указаний может способствовать формированию у студентов профессиональных компетенций.

Материал предназначен для студентов специальностей 230101, 230105, 210301, 220201, 220401, 210105, 210108, 210104, изучающих дисциплины «Общая электротехника», «Теоретические основы электротехники», «Электротехника», «Электротехника, электроника и схемотехника».

Печатаются по решению редакционно-издательского совета Московского государственного технического университета радиотехники, электроники и автоматики (МИРЭА).

Рецензенты: Р.М. Закалюкин, В.Н. Цыпкин

© Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики (МИРЭА), 2012

## ВВЕДЕНИЕ

Данные методические указания являются второй частью комплекса методических указаний для лабораторно-практических занятий по линейным электрическим цепям и включают в себя разделы «Электрические цепи с магнитно-связанными катушками» и «Переходные процессы».

В методических указаниях приведены описания лабораторных работ и практических заданий, которые выполняются в среде TINA-8, которая является весьма эффективной программой компьютерного моделирования, разработанной компанией Texas Instruments. Методические указания разделены на отдельные модули. Каждый модуль содержит краткие теоретические сведения по конкретному вопросу, простое расчетное задание и компьютерное моделирование, подтверждающее расчет. В процессе изучения модулей будут закрепляться навыки работы с программой TINA-8. Ограниченный объем методических указаний не позволяет разместить в них весь теоретический материал. Поэтому студенты должны дополнительно изучать конспекты лекций, учебники, учебные пособия, описания программы [1, 3, 4, 6-8]. Наряду с компьютерным моделированием экспериментальное исследование электрических цепей можно выполнить в аналоговой лаборатории кафедры теоретических основ электротехники, используя «Миниатюрную электротехническую лабораторию МЭЛ.

### **Лабораторно-практическое задание №3**

## **ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ С МАГНИТНО-СВЯЗАННЫМИ КАТУШКАМИ**

### **3.1. Краткие теоретические сведения и расчет простых неразветвленных цепей**

Катушки называют магнитно-связанными, если они имеют общее магнитное поле и взаимно влияют друг на друга. При изменении тока в одной катушке за счет изменения общего магнитного поля во второй катушке наводится напряжение взаимной индукции.

На рис.3.1 катушки индуктивности  $L_1$  и  $L_2$  магнитно-связанные. На схеме это обозначается стрелкой с указанием взаимной индуктивности катушек  $M_{21}$ . Взаимная индуктивность  $M_{21}$  является коэффициентом пропорциональности между напряжением взаимной индукции, наводимым во второй катушке, и производной тока в первой катушке:  $u_{2M}(t) = M_{21} \frac{di_1}{dt}$ . Знак наводимого напряжения зависит от направления намотки катушек и направления токов в них. Если магнитные поля, создаваемые токами в катушках, складываются, такое включение катушек называют *согласным* и напряжения самоиндукции и взаимной индукции складываются. Если магнитные поля катушек вычитаются, включение катушек называют *встречным* и напряжения самоиндукции и взаимной индукции вычитаются. В электрических схемах у магнитно-связанных катушек обозначают «*Одноименные зажимы*», маркируя их звездочками или кружочками. Если токи в катушках одинаково направлены относительно одноименных зажимов, включение является *согласным*. Если токи в катушках направлены неодинаково относительно одноименных зажимов, включение является *встречным*. В линейных электрических цепях по принципу взаимности  $M_{21} = M_{12} = M$ . Коэффициент  $M$  называют взаимной индуктивностью катушек.

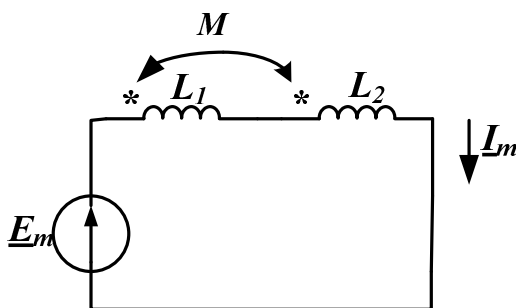


Рис.3.1а. Согласное включение катушек

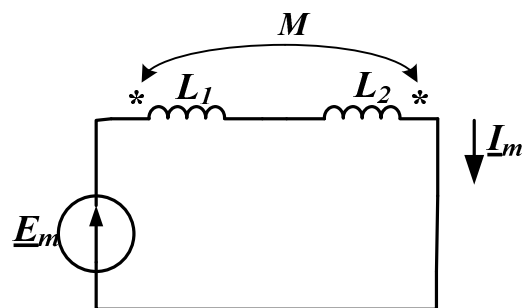


Рис.3.1б. Встречное включение катушек

В схеме рис. 3.1а катушки включены согласно. Составим уравнение по второму закону Кирхгофа:

$$e(t) = u_{L_1} + u_{L_2} = L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + 2M \frac{di}{dt} \quad (3.1)$$

В символической форме получим уравнение:

$$\underline{E}_m = j\omega L_1 \underline{I}_m + j\omega L_2 \underline{I}_m + 2jM \underline{I}_m = j\omega L_{\text{экв}} \underline{I}_m, \quad (3.2)$$

где:  $L_{\text{экв}} = L_1 + L_2 + 2M$ .

Для встречного включения (Рис.3.1б):

$$\underline{E}_m = j\omega L_1 \underline{I}_m + j\omega L_2 \underline{I}_m - 2jM \underline{I}_m = j\omega L_{\text{экв}} \underline{I}_m \quad (3.3)$$

$$\text{и } L_{\text{экв}} = L_1 + L_2 - 2M.$$

### Расчетное задание № 5

В схемах рис.3.1а и рис.3.1б  $L_1=2$  мГн,  $L_2=4$  мГн,  $M=2$  мГн. Источник напряжения формирует сигнал  $e(t) = 1 \cdot \sin 1000t$  В. Рассчитать по формулам (3.2) и (3.3) комплексную амплитуду тока при согласном и встречном включении катушек.

### Компьютерное моделирование задания №5

1. Собрать модель схемы с согласным включением катушек (рис.3.2). В модели использованы связанные катушки (*Coupled Inductors*) из группы *Transformers*.

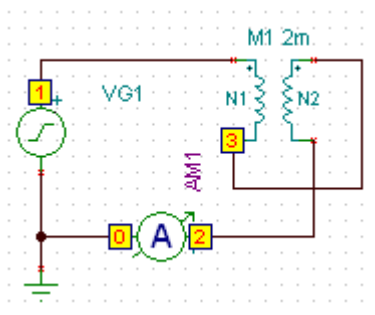


Рис.3.2. Модель с согласным включением катушек

2. Установить параметры связанных катушек. Первая катушка с числом витков N1 имеет индуктивность  $L_1's=2$  мГн. Вторая катушка с числом витков N2 имеет индуктивность  $L_2's=4$  мГн. Взаимная индуктивность  $M1=2$  мГн (рис.3.3).

3. В генераторе напряжения установить амплитуду сигнала 1В, частоту 159,155 Гц, что соответствует угловой частоте  $\omega = 1000 \frac{1}{c}$  (Рис.3.4). Включить режим *Analysis-AC Analysis – Table of AC results*. Результаты показаны на рис.3.5.

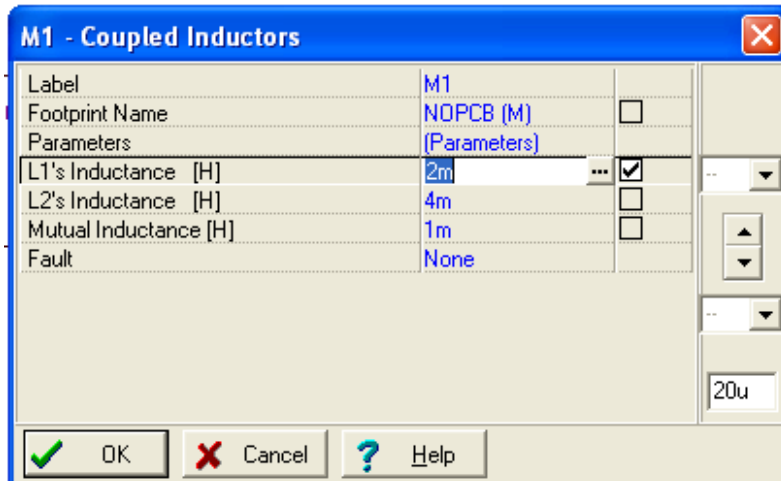


Рис.3.3. Панель установки параметров связанных индуктивностей

**Важное замечание:** В программе TINA-8 в таблице результатов анализа на переменном токе указываются амплитудные значения токов и напряжений!

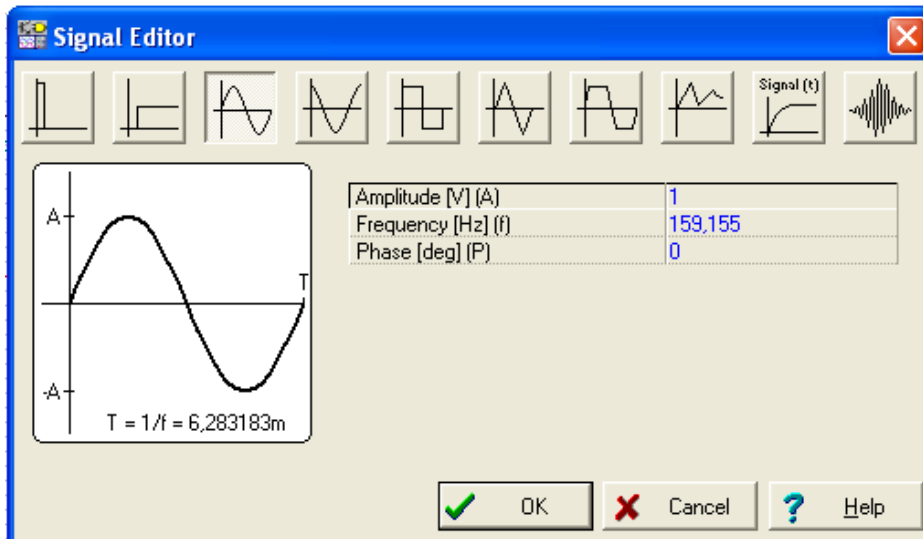


Рис.3.4. Установка режима генератора напряжения

Значение амплитуды тока в амперметре равно 125 мА. Значит эквивалентное сопротивление двух согласно включенных катушек равно 8 Ом. В модели измерен ток в генераторе напряже-

ния между узлами [1-0]  $I_{\_VG1}[1,0] = 125e^{+j90^\circ}$ . В исходной схеме ток имеет противоположное направление и равен  $I_m = 125e^{-j90^\circ}$  мА. Сравните результаты моделирования и расчета.

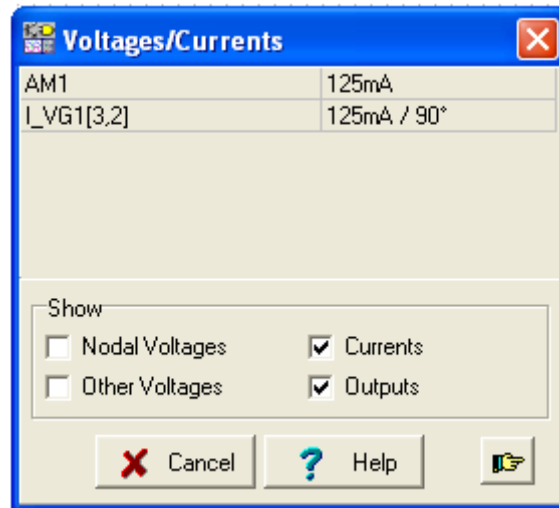


Рис.3.5. Результаты моделирования для согласно включенных катушек

2. Провести аналогичное моделирование для катушек при встречном включении. Сравнить результаты расчета и моделирования.

### 3.2. Составление уравнений для сложных цепей с магнитными связями

Для расчета сложных цепей с магнитными связями составляют уравнения по законам Кирхгофа или по методу контурных токов. Метод узловых напряжений менее удобен, так как напряжения взаимной индукции выражаются через токи. Нельзя применять метод эквивалентного генератора, если есть магнитная связь внутренних и внешних цепей. Нельзя применять преобразование треугольник – звезда в схемах с взаимными индуктивностями.

При составлении уравнений можно пользоваться следующим правилом определения знаков в напряжениях взаимной индукции:

**Правило знаков:**

Напряжение  $\underline{U}_{ks}$ , наводимое на элемент  $k$ , равно  $+j\omega M_{ks}I_s$ , если направление обхода элемента  $k$  и ток  $I_s$  одинаково направлены относительно одноимённых зажимов (рис.3.6).



Рис.3.6. Правило знаков

### Расчетное задание №6

Составить уравнения по законам Кирхгофа для расчета цепи (рис.3.7). Вычислить токи в ветвях.

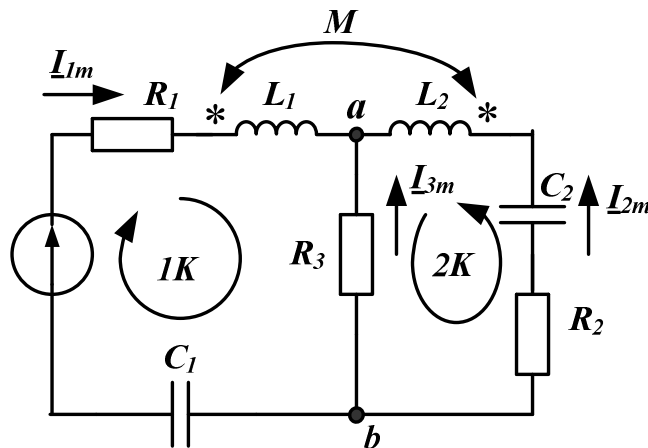


Рис.3.7. Схема разветвленной цепи с взаимной индуктивностью

Составим в символической форме три уравнения по первому и второму закону Кирхгофа для конкретных численных значений сопротивлений элементов и входного напряжения.

Исходные данные:  $E_m=16$  В,  $R_1=2$  Ом,  $R_2=2$  Ом,  $R_3=2$  Ом,  $X_{L1}=4$  Ом,  $X_{L2}=4$  Ом,  $X_M=2$  Ом,  $X_{C1}=2$  Ом,  $X_{C2}=4$  Ом.



$$\begin{aligned} \underline{I}_{1m} + \underline{I}_{2m} + \underline{I}_{3m} &= 0 \\ \underline{I}_{1m}R_1 + jX_{L_1}\underline{I}_{1m} + jX_M\underline{I}_{2m} - \underline{I}_{3m}R_3 - jX_{C_1}\underline{I}_{1m} &= \underline{E}_m \quad (3.4) \\ jX_{L_2}\underline{I}_{2m} + jX_M\underline{I}_{1m} - jX_{C_2}\underline{I}_{2m} + \underline{I}_{2m}R_2 - \underline{I}_{3m}R_3 &= 0 \end{aligned}$$

*Пояснения.* Знак плюс в напряжении взаимной индукции ( $jX_M\underline{I}_{2m}$ ) во втором уравнении взят по *Правилу знаков*, так как направление обхода первого контура «входит» в зажим со звездочкой, и ток  $\underline{I}_2$  во второй катушке «входит» в зажим со звездочкой. По той же причине в третьем уравнении с плюсом взято напряжение взаимной индукции ( $jX_M\underline{I}_{1m}$ ).

Решить уравнения и найти токи рекомендуется, используя Mathcad. Программа расчета приведена в [4].

### Компьютерное моделирование задания №6

Собрать схему (рис.3.8). Установить частоту генератора синусоидального сигнала  $f=159,155$  Гц, амплитуду сигнала 16 В. Параметры магнитно-связанных катушек:  $L_1's=4$  мГн,  $L_2's=4$  мГн,  $M_1=2$  мГн. При этом угловая частота  $\omega = 1000 \frac{1}{c}$  и реактивные сопротивления катушек и взаимной индуктивности соответствуют исходным данным. Получить таблицу результатов (рис.3.9).

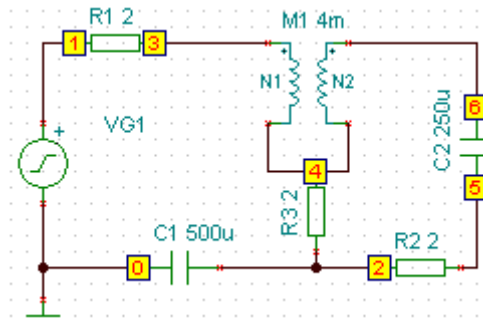


Рис.3.8. Схема компьютерного моделирования разветвленной цепи с взаимной индуктивностью

В таблице (рис.3.9) направления токов в элементах цепи определяется последовательностью нумерации узлов в квадратных скобках. Так ток генератора  $\underline{I}_{VG1}$  направлен от узла 1 к узлу 0 и имеет фазу  $180^\circ$ . Ток  $\underline{I}_{R1}$  направлен от узла 1 к узлу 3 и имеет нулевую фазу.

I_R1[1,3]	4A / -20,49u°
I_R2[2,5]	2,83A / -135°
I_R3[2,4]	2,83A / 135°
I_VG1[1,0]	4A / 180°

Show

Nodal Voltages       Currents

Other Voltages       Outputs

Cancel      Help

Рис.3.9. Таблица результатов моделирования разветвленной цепи с взаимной индуктивностью

Сравните результаты расчетов и моделирования.

### 3.3. Развязка магнитно-связанных цепей

Развязкой называется замена магнитно-связанных цепей эквивалентными цепями без магнитных связей.

#### Правила развязки

1. Если одноименные зажимы двух магнитно-связанных индуктивностей *одинаково расположены* относительно узла (рис.3.10.а), то эти две индуктивности можно заменить эквивалентной схемой (рис.3.10.б) с тремя индуктивностями без магнитной связи.

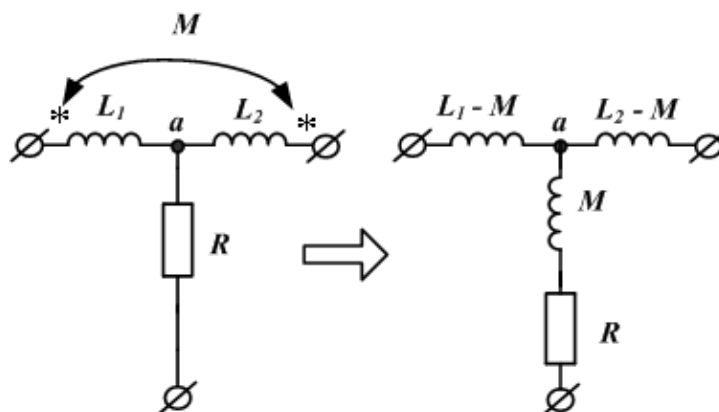


Рис.3.10.а

Рис.3.10.б

2. Если одноименные зажимы двух магнитно-связанных индуктивностей *неодинаково расположены* относительно узла

(рис.3.11.а), то эти две индуктивности можно заменить эквивалентной схемой (рис.3.11.б) с тремя индуктивностями без магнитной связи. Индуктивность с отрицательным значением ( $-M$ ) имеет расчетный характер.

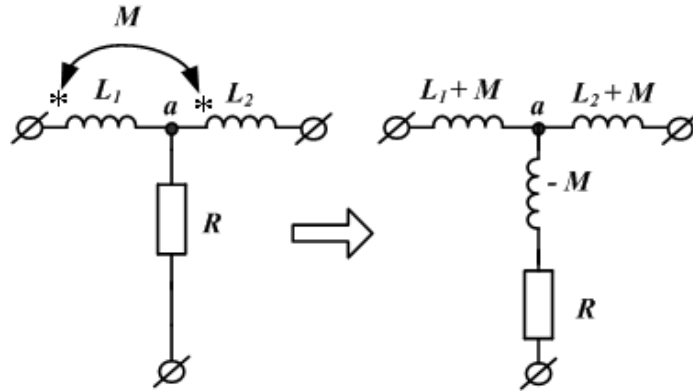


Рис.3.11.а

Рис.3.11.б

Выполним расчет схемы (рис.3.7) методом развязки

В схеме (рис.3.7) одноименные зажимы катушек одинаково расположены относительно узла  $a$ . Поэтому для развязки применяем эквивалентную схему рис.3.10.б. Преобразованная схема без магнитных связей показана на рис.3.11.

На схеме (рис.3.11) у каждого элемента указаны значения комплексных сопротивлений в Омах. Комплексная амплитуда источника напряжения равна 16 В. Расчет схемы легко провести в ручную. Находим эквивалентное сопротивление двух параллельных ветвей между узлами  $a-b$ :

$$\underline{Z}_{ab} = \frac{(2 + j2 - j4) \cdot (2 + j2)}{2 + j2 - j4 + 2 + j2} = 2 \text{ Ом.}$$

Находим входное сопротивление цепи:

$$\underline{Z}_{ex} = 2 + j2 + 2 - j2 = 4 \text{ Ом.}$$

Находим первый ток:  $\underline{I}_1 = \frac{E}{\underline{Z}_{ex}} = \frac{16}{4} = 4 \text{ А.}$

Находим напряжение между узлами:

$$\underline{U}_{ab} = \underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_{ab} = 8 \text{ В.}$$

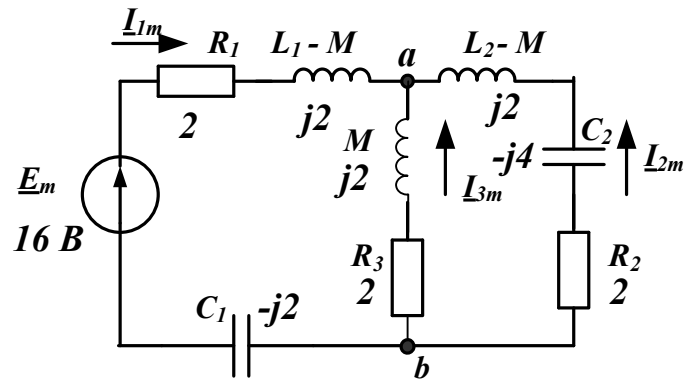


Рис.3.11. Эквивалентная схема цепи после развязки

Находим токи во второй и третьей ветви:

$$\underline{I}_2 = \frac{-8}{2 - j2} = -2 - j2 \text{ A} = 2,83e^{-j135^\circ},$$

$$\underline{I}_3 = \frac{-8}{2 + j2} = -2 + j2 \text{ A} = 2,83e^{+j135^\circ}.$$

Итак, с помощью развязки мы очень просто получили те же результаты.

### 3.4. Линейный трансформатор

*Трансформатором* называется устройство для передачи энергии из одной части цепи в другую посредством электромагнитной индукции.

Схема линейного трансформатора показана на рис. 3.12. В первичной обмотке действует источник переменного напряжения  $\underline{E}_1$ , первичная обмотка имеет индуктивность  $L_1$  и сопротивление  $R_1$ . Вторичная обмотка имеет индуктивность  $L_2$  и сопротивление  $R_2$ .

Во вторичной обмотке трансформатора включена комплексная нагрузка  $\underline{Z}_H = R_H + jX_H$ .

Составим уравнения трансформатора по второму закону Кирхгофа. Направления обхода контуров показаны на схеме.

$$\begin{aligned} R_1 + j\omega L_1 \underline{I}_1 - j\omega M \underline{I}_2 &= \underline{E}_1 \\ \underline{I}_2 \cdot R_2 + \underline{I}_2 \cdot R_H + jX_H \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 - j\omega M \underline{I}_1 &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

По этим уравнениям строим векторную диаграмму токов и напряжений в трансформаторе (рис.3.7). Диаграмму строим в такой последовательности:  $\underline{I}_2$ ,  $R_n \underline{I}_2$ ,  $jX_n \underline{I}_2$ ,  $j\omega L_2 \underline{I}_2$ ,  $R_2 \underline{I}_2$ ,  $-j\omega M \underline{I}_1$ .

При построении диаграммы мы будем считать, что реактивное сопротивление нагрузки имеет индуктивный характер. Поэтому на диаграмме вектор напряжения  $jX_n \underline{I}_2$  опережает ток  $\underline{I}_2$  на  $90^\circ$ .

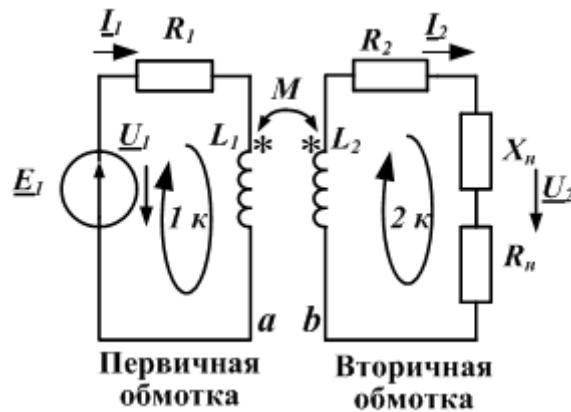


Рис.3.12. Схема линейного трансформатора

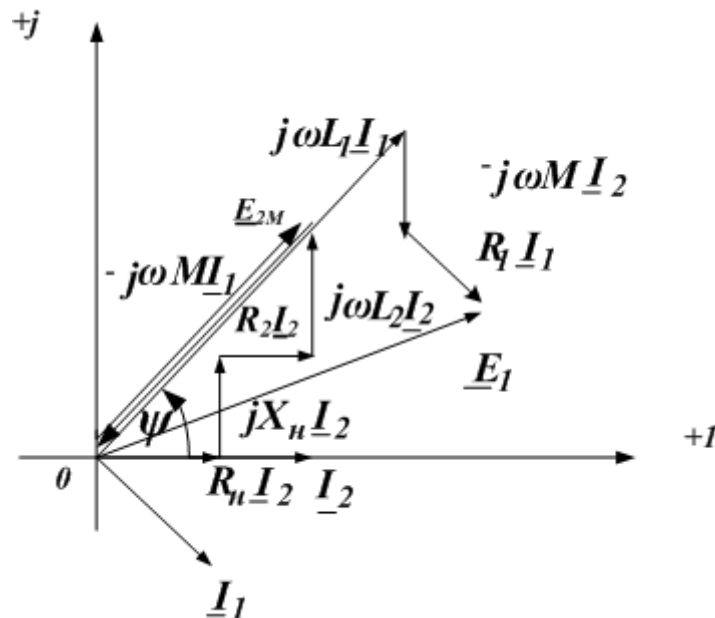


Рис.3.13. Векторная диаграмма трансформатора

Вектор  $-j\omega M \underline{I}_1$  замыкает диаграмму напряжений вторичного контура, в котором нет источников напряжения. По этому векто-

ру находим вектор тока  $\underline{I}_1$ , повернутый на  $+90^\circ$  и уменьшенный по длине в  $\omega M$  раз. Далее строим:  $j\omega L_1 \underline{I}_1$ ,  $-j\omega M \underline{I}_2$ ,  $R_1 \underline{I}_1$ ,  $\underline{E}_1$ .

В схеме линейного трансформатора (рис.3.12) токи не изменятся, если соединить точки  $a$  и  $b$  в узел « $ab$ ». После этого воспользуемся правилом развязки магнитно-связанных цепей. К узлу « $ab$ » катушки трансформатора подключены одинаково (зажимами без звездочек). Поэтому преобразуем трансформатор по схеме рис.3.3.б и получим схему замещения линейного трансформатора (рис.3.14) без магнитных связей, в которой контуры связаны электрически через сопротивление общей ветви.

Важными характеристиками трансформатора являются: коэффициент трансформации по напряжению  $n_U = \frac{U_2}{U_1} \approx \frac{w_2}{w_1}$  ( $w_2$ ,  $w_1$  – число витков вторичной и первичной обмотки), коэффициент трансформации по току  $n_I = \frac{I_1}{I_2}$ , коэффициент трансформации по сопротивлению  $n_Z = \frac{Z_2}{Z_{ex}} = \frac{U_2 \cdot I_1}{I_2 \cdot U_1} = n_U \cdot n_I$ .

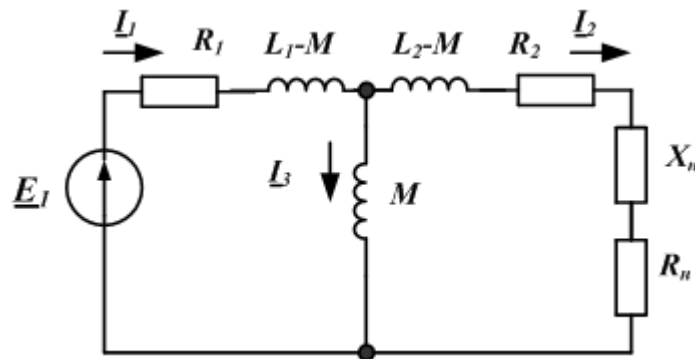


Рис.3.14. Схема замещения линейного трансформатора

В трансформаторе с одинаковыми обмотками ( $w_2 = w_1$ ) в схеме замещения (рис.3.14) индуктивности  $L_1-M$ ,  $L_2-M$  имеют смысл индуктивностей рассеяния, индуктивность  $M$  – называют индуктивностью намагничивания.

### Расчетное задание №7

В схеме линейного трансформатора (рис.3.12) амплитуда

источника напряжения  $E_{1m} = 100В, L_1 = 200 мГн, L_2 = 400 мГн,$

$M = 200 мГн, R_1 = R_2 = 50 Ом, R_n = 100 Ом, L_n = 100 мГн.$  Частота сигнала генератора  $f=159,155$  Гц. Найти напряжение на нагрузке.

Рекомендации:

Можно воспользоваться уравнениями трансформатора (3.5), вычислить ток  $I_{2m}$  и затем найти напряжение на нагрузке.

### 3.5. Компьютерное моделирование задания №7

В программе TINA-8 линейные трансформаторы представлены только двумя идеальными моделями. Идеальный линейный трансформатор характеризуется только одним параметром - коэффициентом трансформации по напряжению  $n_U = \frac{U_2}{U_1}$ .

В панели компонентов в группе *Transformers* есть две модели идеального трансформатора. На рис.3.15 показана схема моделирования идеального трансформатора с коэффициентом трансформации  $n_U = 2$ .

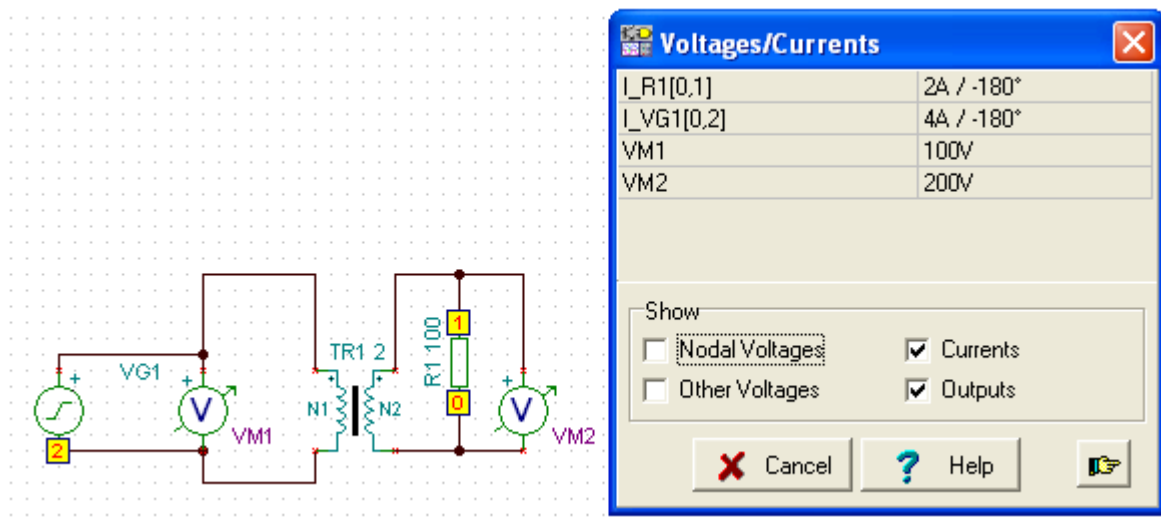


Рис.3.15. Модель идеального трансформатора

Проверьте, что в идеальном трансформаторе выходное напряжение не зависит от нагрузки  $R1$ .

Линейный трансформатор с потерями (рис.3.12) можно смо-

делировать, используя связанные индуктивности (*Coupled Inductors*) из группы *Transformers*. Схема моделирования цепи (рис.3.12) показана на рис. 3.16.

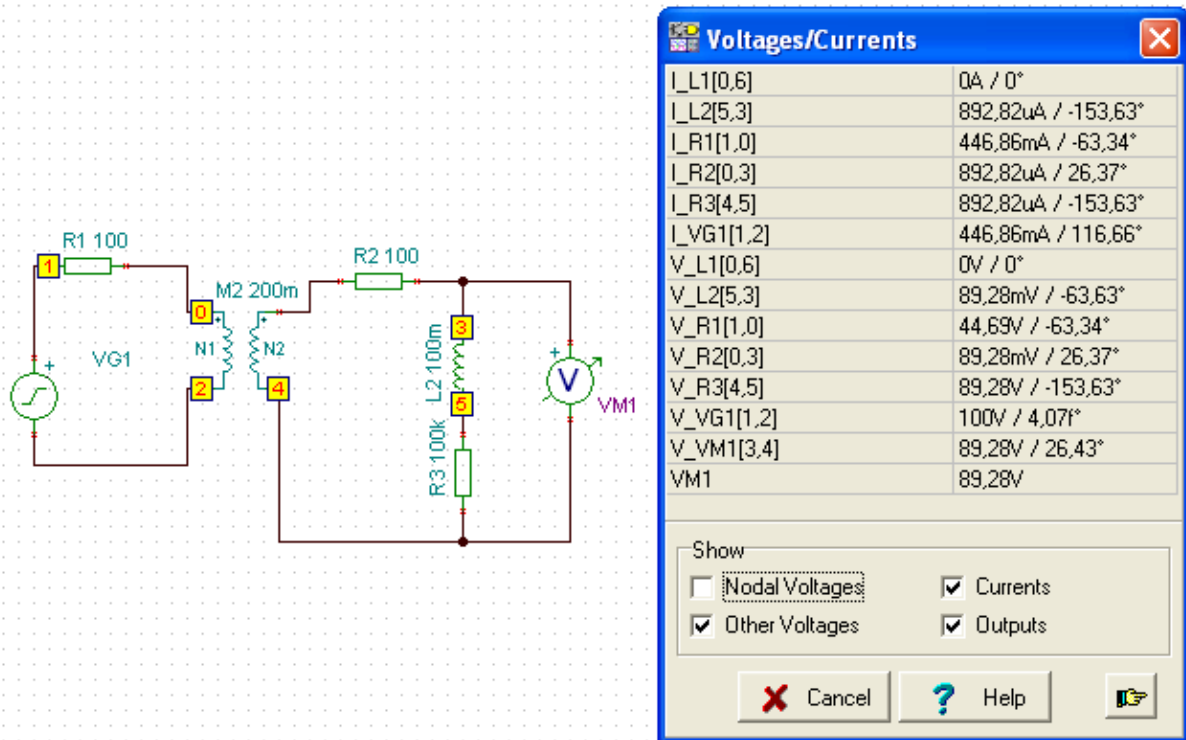


Рис. 3.16. Схема моделирования линейного трансформатора

## Лабораторно-практическое задание №4

### ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

#### 4.1. Краткое теоретическое введение

*Переходным процессом называется неустановившийся, нестационарный процесс, возникший при переходе из одного режима работы к другому.* Всякие изменения и переключения в схеме называют коммутацией. В схеме рис.4.1 в момент  $t=0$  происходит коммутация (в данном случае замыкание ключа). Режим работы цепи изменяется и возникает переходный процесс.

Считается, что *коммутация происходит мгновенно* в момент времени  $t = 0$ . Момент времени, предшествующий коммутации, обозначен  $t = 0_-$ . Момент времени, следующий сразу после коммутации, обозначен  $t = 0_+$ . Примем следующие значения



параметров цепи:  $E = 120 \text{ В}$ ,  $L = 10 \text{ мГн}$ ,  $C = 68 \text{ нФ}$ ,  $R_1 = R_2 = 1 \text{ кОм}$ .

До коммутации в момент  $t = 0_-$  ток в индуктивности  $i_1(0_-) = \frac{E}{R_1 + R_2}$ . В индуктивности накоплена магнитная энергия  $W_M(0_-) = \frac{L \cdot i_1^2(0_-)}{2}$ .

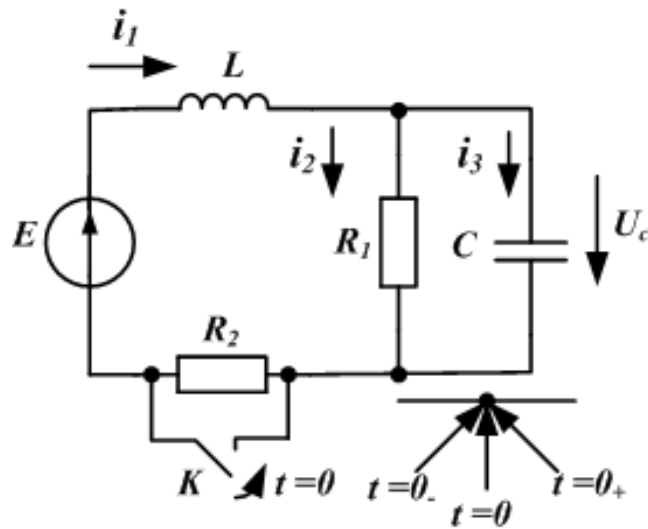


Рис.4.1. Схема цепи с коммутирующим ключом  $K$

Энергия не может измениться мгновенно, так как мощность всегда ограничена ( $P(t) = \frac{dW}{dt} \neq \infty$ ). Поэтому в электрических цепях с постоянной индуктивностью действует

### Первый закон коммутации:

*Ток в индуктивности до коммутации равен току в индуктивности в начальный момент после коммутации:*

$$i_L(0_-) = i_L(0_+).$$

Если при коммутации изменяется индуктивность, действует обобщенный первый закон коммутации для потокосцепления:

$$\Psi(0_-) = \Psi(0_+)$$

До коммутации в момент  $t = 0_-$  напряжение на емкости  $u_C(0_-) = \frac{E \cdot R_1}{R_1 + R_2}$ . На емкости накоплена электрическая энергия  $W_{\text{Э}}(0_-) = \frac{C \cdot u_C^2(0_-)}{2}$ . Электрическая энергия также не может изменяться мгновенно. Поэтому в электрической цепи с постоянной емкостью действует

### **Второй закон коммутации:**

*Напряжение на емкости до коммутации равно напряжению на емкости в начальный момент после коммутации:*

$$u_C(0_-) = u_C(0_+).$$

Расчет переходных процессов основан на использовании первого и второго закона коммутации.

Если при коммутации изменяется емкость, действует *обобщенный второй закон коммутации для зарядов:*

$$q(0_-) = q(0_+).$$

Токи в индуктивностях и напряжения на емкостях не изменяются во время коммутации, определяют запас энергии в цепи и называются *независимыми начальными условиями*.

Переходные процессы в линейных электрических цепях описываются линейными дифференциальными уравнениями. Для цепи, показанной на рис.4.1 систему дифференциальных уравнений составим по законам Кирхгофа:

$$i_1 = i_2 + i_3 \quad (4.1); \quad i_2 = \frac{u_C}{R_1} \quad (4.2); \quad i_3 = C \frac{du_C}{dt} \quad (4.3);$$

$$L \frac{di_1}{dt} + u_C = E \quad (4.4)$$

Используя уравнения (4.1)-(4.3), преобразуем (4.4) к виду:

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{CR_1} \cdot \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = \frac{E}{LC} \quad (4.5)$$

Получили линейное, однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Расчет переходных процессов в линейной электрической цепи можно выполнить несколькими методами.

### Классический метод расчета переходных процессов

В классическом методе переходное напряжение или ток ищут как сумму свободной и принужденной составляющей. Принужденную составляющую находят расчетом послекоммутационной цепи в установившемся принужденном режиме, когда после коммутации прошло много времени. Свободную составляющую ищут как общее решение однородного дифференциального уравнения при нулевом внешнем воздействии в виде:

$$u_{Cсв}(t) = A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t} + \dots \quad (4.6)$$

где  $p_1, p_2, \dots$  - корни характеристического уравнения,  $A_1, A_2, \dots$  - неизвестные постоянные интегрирования. Число корней характеристического уравнения и число неизвестных постоянных интегрирования равно порядку цепи, который определяется числом независимых накопительных реактивных элементов.

Для линейных цепей первого порядка характеристическое уравнение имеет один корень и свободная составляющая переходного процесса выражается одной экспоненциальной функцией из (4.6):

$$u_{Cсв}(t) = A_1 \cdot e^{p_1 t} \quad (4.7)$$

Постоянной времени цепи первого порядка называют  $\tau = \frac{1}{|p_1|}$ . При этом  $u_{Cсв}(t) = A_1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ .

Для линейных цепей второго порядка, которым соответствуют дифференциальные уравнения вида (4.5), характеристическое уравнение имеет следующий вид:

$$Z(p) = p^2 + 2\delta p + \omega_0^2 = 0 \quad (4.8)$$

Если  $\delta > \omega_0$ , корни характеристического уравнения отрицательные и разные. Переходный процесс описывается двумя зату-

хающими экспонентами и называется аperiодическим.

Если  $\delta < \omega_0$ , корни характеристического уравнения будут комплексно-сопряженными с отрицательной действительной частью. Переходный процесс имеет вид затухающих колебаний и называется колебательным.

Применим классический метод для теоретического анализа переходных процессов, которые будут исследоваться экспериментально в лабораторной работе.

### Расчетное задание №8

В схеме  $RL$  – цепи (рис. 4.2) ключ  $K$  замыкается в момент  $t=0$ . Найти ток в индуктивности и напряжение на индуктивности после коммутации. Параметры цепи:  $E=12B$ ,  $L=1мГн$ ,  $R_1=R_2=R_3=2 Ом$ .

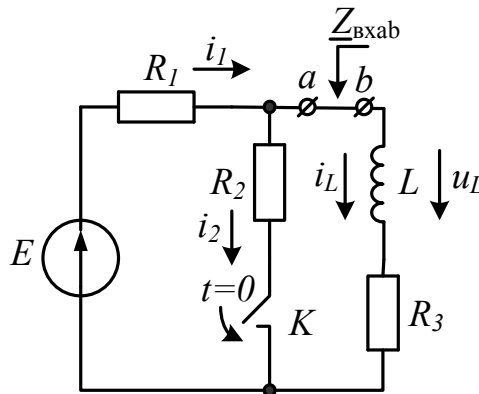


Рис.4.2. Переходной процесс в  $RL$  – цепи

### Последовательность расчета переходного процесса классическим методом

1. Расчет режима до коммутации ( $t = 0_-$ ), определение независимых начальных условий. Ток в индуктивности до коммутации  $i_L(0_-) = \frac{E}{(R_1 + R_3)} = 3A = i_L(0_+)$ , так как на постоянном токе индуктивность имеет нулевое сопротивление.

2. Расчет принужденного режима ( $t \rightarrow \infty$ ) после замыкания ключа и окончания переходного процесса:

$$i_1 = \frac{E}{\left( R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} \right)} = 4A$$

По правилу деления токов находим принужденный ток в индуктивности:

$$i_{Lnp} = \frac{i_1 R_2}{R_2 + R_3} = 2A.$$

3. Составляем характеристическое уравнение. Для этого в послекоммутационной схеме разомкнем ветвь с индуктивностью между точками  $ab$  и найдем комплексное входное сопротивление:

$$\underline{Z}(j\omega) = j\omega L + R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Заменим  $j\omega$  на  $p$  и получим характеристическое уравнение:

$$pL + R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 0.$$

Корень характеристического уравнения  $p_1 = -3 \frac{1}{c}$ .

4. Свободную составляющую тока в индуктивности ищем в виде:  $i_{Lcb}(t) = Ae^{p_1 t}$ . Неизвестная постоянная интегрирования  $A = i_L(0_+) - i_{Lnp} = 1A$ .

5. Находим полный ток в индуктивности как сумму принужденной и свободной составляющей:

$$i_L(t) = i_{Lnp} + i_{Lcb}(t) = 2 + 1e^{-3t} A.$$

6. Находим напряжение на индуктивности:

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = -3e^{-3t} \text{ В.}$$

### Компьютерное моделирование задания №8

Схема компьютерного моделирования  $RL$ - цепи показана на рис.4.3.

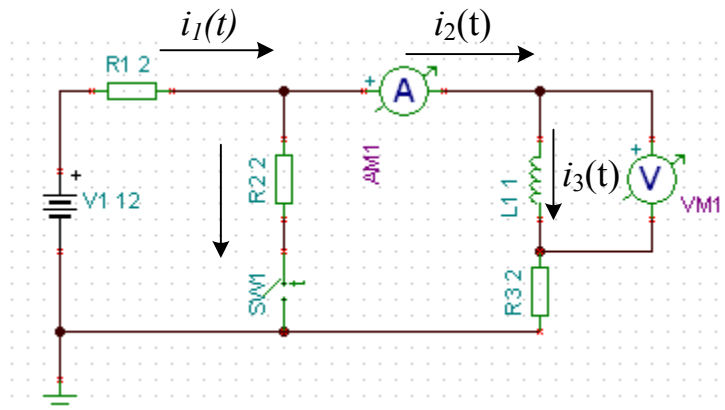


Рис.4.3. Схема моделирования  $RL$ -цепи

В модели использован управляемый по времени ключ SW1. Для того, чтобы наблюдать докоммутационный режим, момент замыкания ключа примем равным  $t_{On}=10$  с. Момент последующего размыкания  $t_{Off}=20$  с (Рис.4.4). Режим неперiodический. Формально требуется заполнить все данные в окне установки.

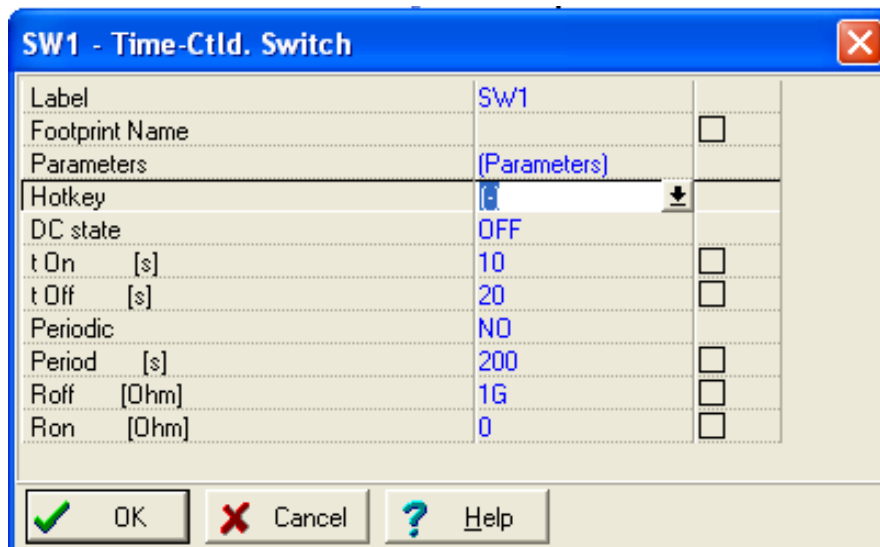


Рис.4.4. Установка параметров ключа

Теперь в главном меню выбираем *Analysis-Transient*. Устанавливаем параметры анализа и отображения переходного процесса. Начало отображения 9 с, конец отображения 12 с. Используем начальные условия (рис.4.5).

Графики переходных процессов  $i_3(t)$  и  $u_L(t)$  отображаются в окне результатов (рис.4.6) и совпадают с расчетными функциями.

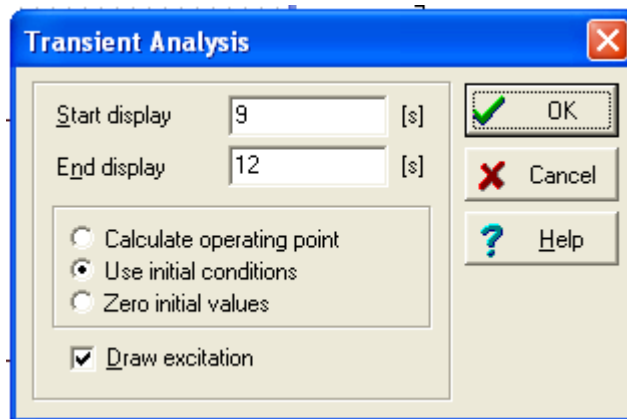


Рис.4.5. Установка параметров переходного анализа

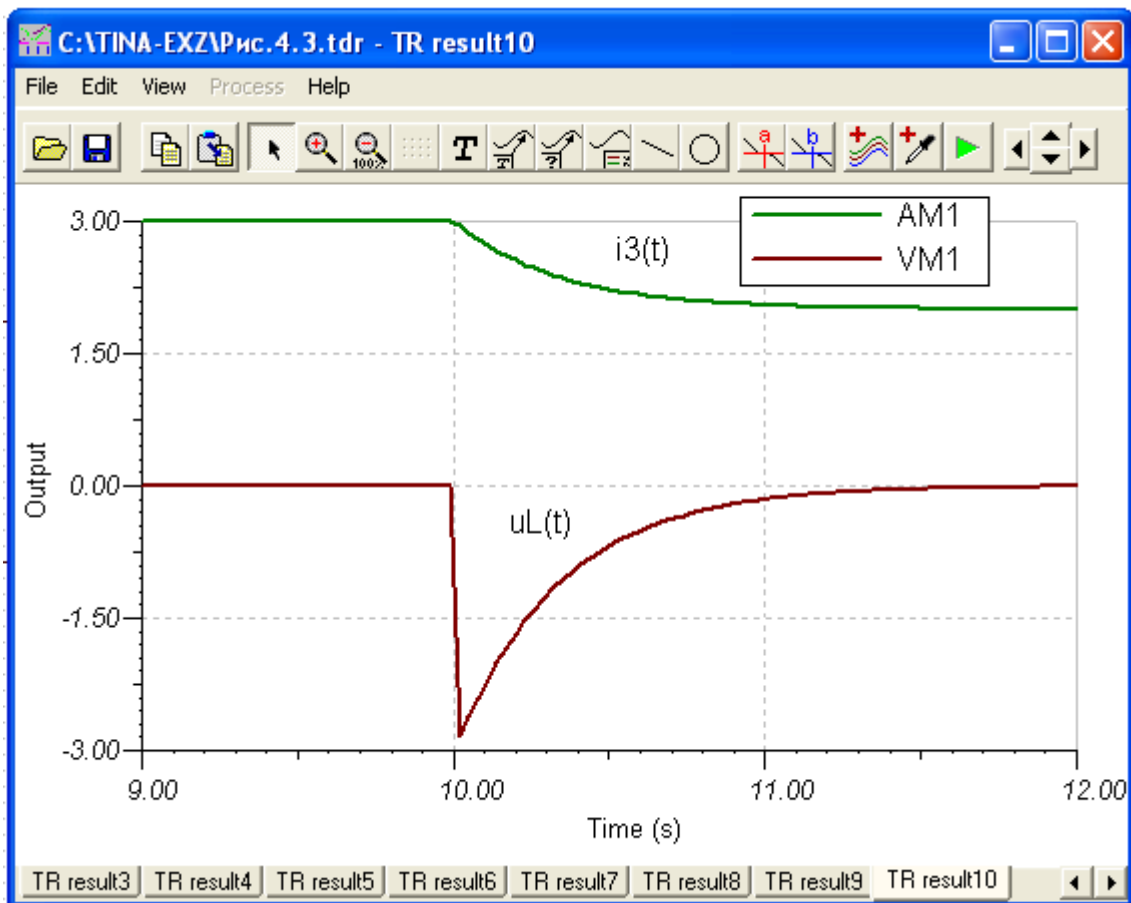
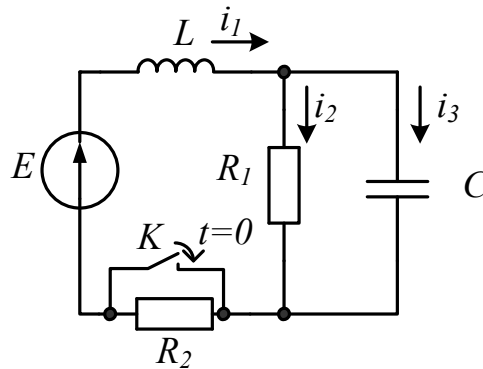


Рис.4.6. Графики переходных процессов

## Операторный метод расчета переходных процессов

### Расчетное задание №9

Схема  $RLC$ -цепи задана на рис. 4.7.  $L=4/3$  Гн,  $C=1/16$ Ф,  $R_1=2$  Ом,  $R_2=2$  Ом,  $E=12$  В. Найти напряжение на емкости после коммутации.

Рис.4.7. Схема  $RLC$ -цепи

### Последовательность расчета переходного процесса операторным методом

Расчет режима до коммутации, определение независимых начальных условий.

До коммутации ток через емкость не проходит ( $i_3=0$ ). Ток в индуктивности

$$i_L(0_-) = i_1(0_-) = i_2(0_-) = \frac{E}{R_1 + R_2} = 3A.$$

Напряжение на емкости  $U_C(0_-) = 6V$ .

1. Составляем операторную схему замещения с внутренними источниками ЭДС, учитывающими начальные условия для тока в индуктивности и напряжения на емкости (рис.4.8). Внутренний источник ЭДС  $Li(0)$  направлен согласно току. Внутренний источник ЭДС  $U_C(0)/p$  направлен встречно току.

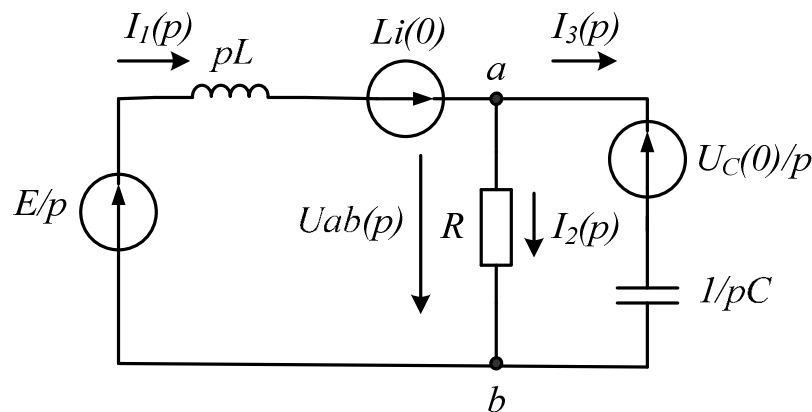


Рис. 4.8. Операторная схема замещения цепи



2. Вычислим напряжение  $U_{ab}(p)$  методом двух узлов.

$$U_{ab}(P) = \frac{\frac{E}{p} + Li(0)}{\frac{pL}{1} + \frac{1}{R_1} + pC} + \frac{U_C(0) \cdot pC}{p} =$$

$$= \frac{\frac{12}{p} + \frac{4}{3} \cdot 3}{\frac{4}{3}p} + 6 \cdot \frac{1}{16} = \frac{6p^2 + 48p + 144}{p(p^2 + 8p + 12)} = \frac{A(p)}{B(p)}$$

3. Вычислим оригинал напряжения  $U_{ab}(t)$  по теореме разложения. Для этого:

находим корни знаменателя

$$B(p) = p(p^2 + 8p + 12) = 0:$$

$$p_1 = 0, p_2 = -2 \frac{1}{c}, p_3 = -6 \frac{1}{c};$$

находим производную знаменателя

$$B'(p) = 3p^2 + 16p + 12;$$

вычисляем

$$\frac{A(p_1)}{B'(p_1)} = 12, \frac{A(p_2)}{B'(p_2)} = -9, \frac{A(p_3)}{B'(p_3)} = 12.$$

Теперь записываем по теореме разложения:

$$u_C(t) = \frac{A(p_1)}{B'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{A(p_2)}{B'(p_2)} e^{p_2 t} + \frac{A(p_3)}{B'(p_3)} e^{p_3 t} =$$

$$= 12 - 9e^{-2t} + 3e^{-6t} B.$$

Построим график переходного процесса, используя Mathcad.

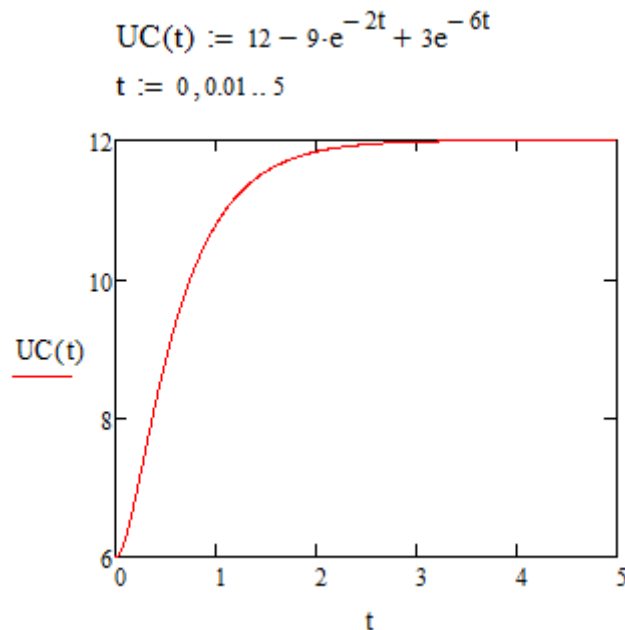


Рис. 4.9. График переходного процесса

### Компьютерное моделирование задания №9

Схема компьютерного моделирования показана на рис.4.10. Также как в задании №8 в модели использован управляемый по времени ключ SW1. Для того, чтобы наблюдать докоммутационный режим, момент замыкания ключа установлен  $t_{On}=10$  с. Момент последующего размыкания  $t_{Off}=20$  с (Рис.4.4). Режим непериодический.

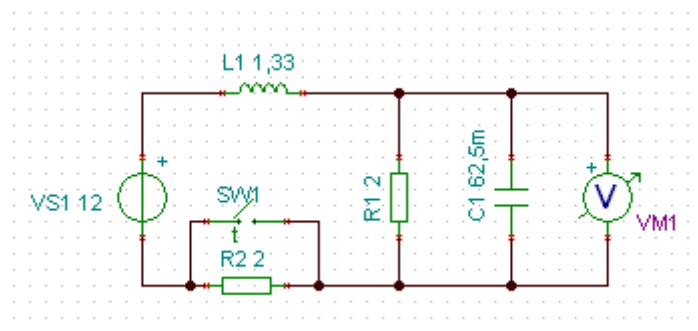


Рис. 4.10. Схема компьютерного моделирования

Теперь в главном меню выбираем *Analysis-Transient*. Устанавливаем параметры анализа и отображения переходного процесса. Начало отображения 9 с, конец отображения 15 с. Исполь-

зуюем начальные условия (рис.4.5). График переходного процесса показан на рис. 4.11. На интервале времени от 10 с до 15 с график совпадает с расчетным (рис.4.9).

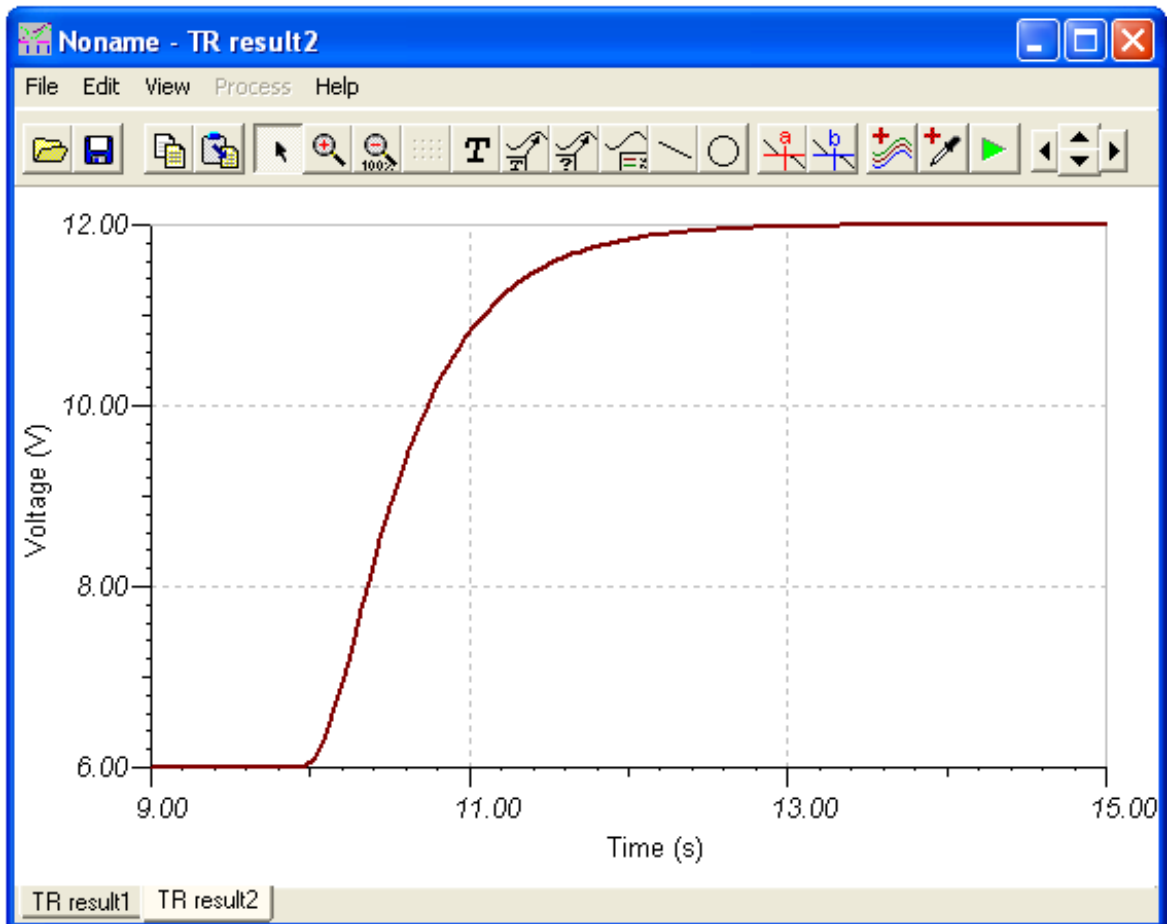



Рис. 4.11. График переходного процесса в компьютерной модели

По графику видно, что переходной процесс в цепи имеет апериодический характер. Для того, чтобы переходной процесс стал колебательным, составим для операторной схемы замещения (рис. 4.8) характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned}
 Z(p) &= pL + \frac{R_1 \frac{1}{pC}}{R_1 + \frac{1}{pC}} = pL + \frac{R_1}{pR_1C + 1} = \\
 &= \frac{p^2 R_1 LC + pL + R_1}{pR_1C + 1} = 0.
 \end{aligned}$$

Приравняем нулю числитель:  $p^2 + \frac{2}{2R_1C}p + \frac{1}{LC} = 0$ . Получим два корня:  $p_{1,2} = -\frac{1}{2R_1C} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2R_1C}\right)^2 - \frac{1}{LC}}$ . При переходе от апериодического режима к колебательному имеет место критический режим, в котором  $p_1 = p_2 = -\frac{1}{2R_1C}, \left(\frac{1}{2R_1C}\right)^2 - \frac{1}{LC} = 0$ . Из последнего уравнения получим, что в критическом режиме

$$C = \frac{L}{4R^2} = \frac{4}{4 \cdot 2^2} = \frac{1}{12} = 83 \text{ мФ}.$$

Проведем многовариантный анализ, в котором емкость  $C$  принимает значения 60 мФ, 80 мФ, 100 мФ, 120 мФ. Для этого кнопкой выбора управляемого объекта  выделяем емкость, в открывшемся окне выбираем Select, устанавливаем начальное и конечное значение емкости и число испытаний (рис. 4.12).

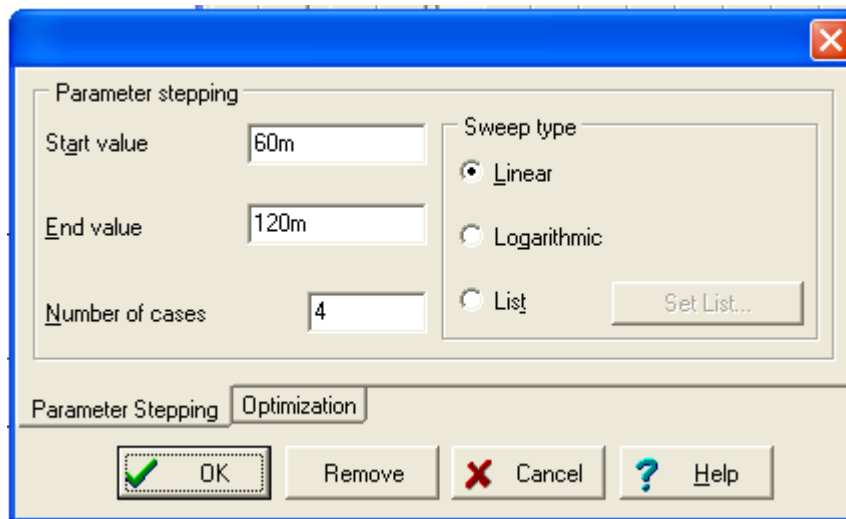


Рис.4.12. Окно установки многовариантного анализа

После этого повторяем *Analysis-Transient*. Графики переходных процессов при изменении  $C$  на интервале от 11В до 13 В показаны на рис. 4.13. Видно, что при  $C=100$  мФ график переходного режима превышает установившееся значение, т.е. начинается колебательный процесс.

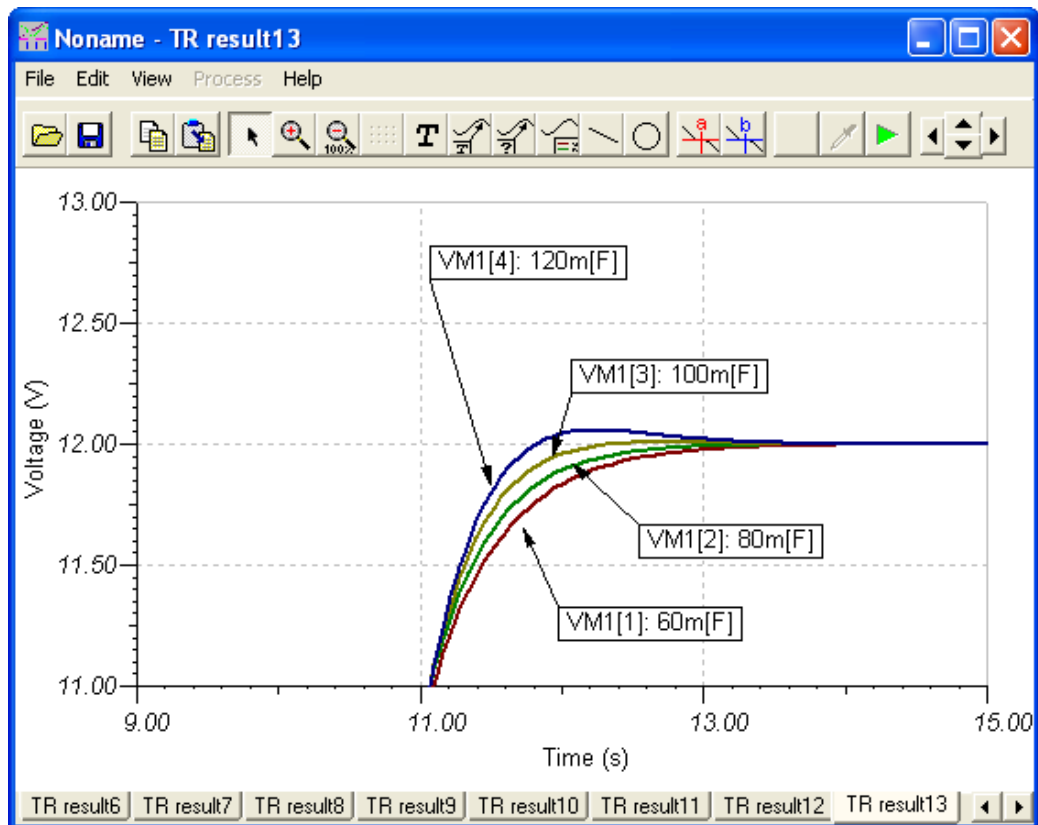


Рис. 4.13. Графики переходных процессов при изменении  $C$ . Критический режим соответствует графику  $C=80$  мФ.

### Расчетное задание №10

Модель  $RLC$ -цепи показана на рис. 4.14. В момент  $t=10$  с в цепь включается синусоидальный генератор с амплитудой 1 В. Определить характер переходного процесса в цепи. Рассчитать резонансную частоту вынужденных колебаний в цепи и провести моделирование при частоте генератора  $f_1=0,9 f_{\text{рез}}$  и  $f_1=f_{\text{рез}}$ .

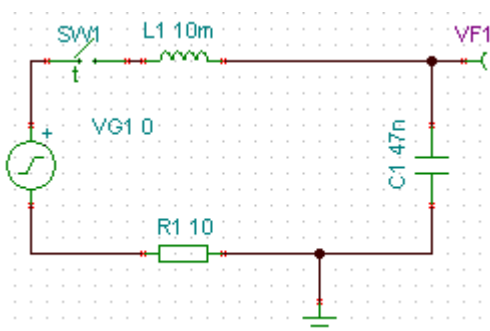


Рис. 4.14. Модель  $RLC$ -цепи

1. Составляем характеристическое уравнение цепи:

$$pL_1 + \frac{1}{pC_1} + R_1 = 0 \text{ или } p^2 + 2\left(\frac{R_1}{2L_1}\right)p + \frac{1}{L_1C_1} = 0$$

Находим корни уравнения:

$$p_{1,2} = -\frac{R_1}{2L_1} \pm \sqrt{\left(\frac{R_1}{2L_1}\right)^2 - \frac{1}{L_1C_1}}.$$

Подставляем численные значения параметров и, используя Mathcad, находим корни:

$$R_1 := 10 \quad L_1 := 10^{-2} \quad C_1 := 47 \cdot 10^{-9}$$

$$P_1 := -\frac{R_1}{2 \cdot L_1} + \sqrt{\left(\frac{R_1}{2 \cdot L_1}\right)^2 - \frac{1}{L_1 \cdot C_1}} = -500 + 4.612i \times 10^4 \text{ 1/c}$$

$$P_2 := -\frac{R_1}{2 \cdot L_1} - \sqrt{\left(\frac{R_1}{2 \cdot L_1}\right)^2 - \frac{1}{L_1 \cdot C_1}} = -500 - 4.612i \times 10^4 \text{ 1/c}$$

Корни получились комплексно-сопряженные. Значит, переходный процесс будет иметь колебательный характер. Частота свободных колебаний:

$$f_{\text{св}} := \frac{(4.612 \times 10^4)}{2 \cdot \pi} = 7.34 \times 10^3 \text{ Гц}$$

Вычислим резонансную частоту вынужденных колебаний:

$$f_{\text{рез}} := \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{L_1 \cdot C_1}} \quad f_{\text{рез}} = 7.341 \times 10^3 \text{ Гц}$$

В связи с малыми потерями в контуре резонансная частота вынужденных колебаний практически совпадает с частотой свободных колебаний.

### Компьютерное моделирование задания №10

На рис. 4.15 показаны графики переходного процесса, полученные в режиме *Analysis-Transient* на временном интервале от 9

мс до 15 мс при частоте генератора  $f_1=0,9 f_{рез}=6,6$  кГц. Амплитуда переменного напряжения на конденсаторе VF1 имеет вид затухающих биений. Частота биений равна разности частот резонанса и генератора  $f_6=741$  Гц. Такой режим называют режимом биений.

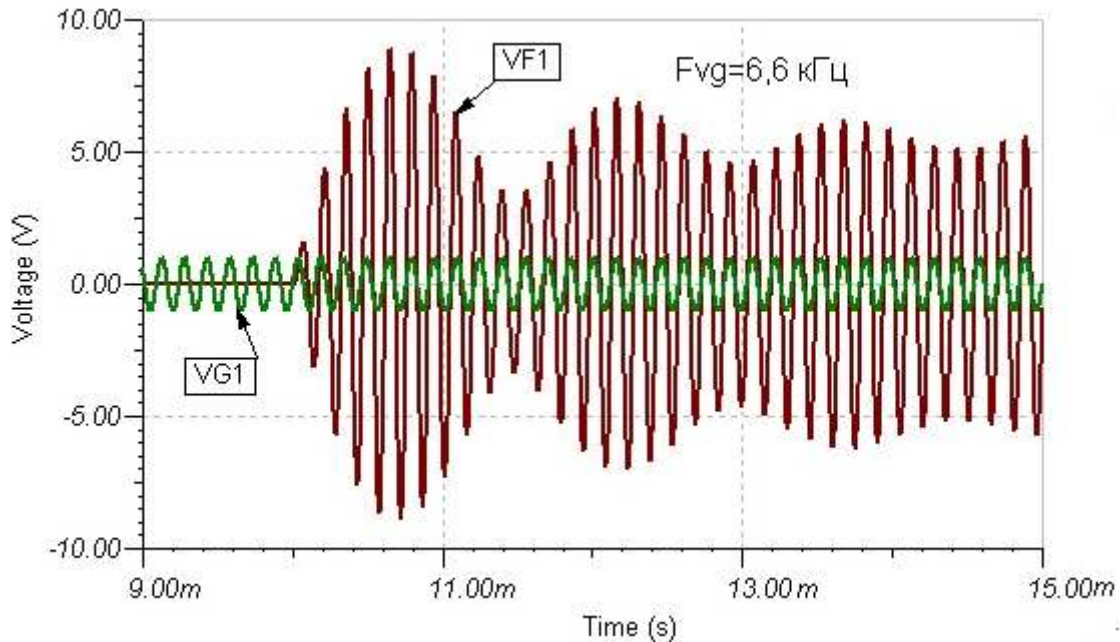


Рис. 4.15. Переходной процесс в режиме биений

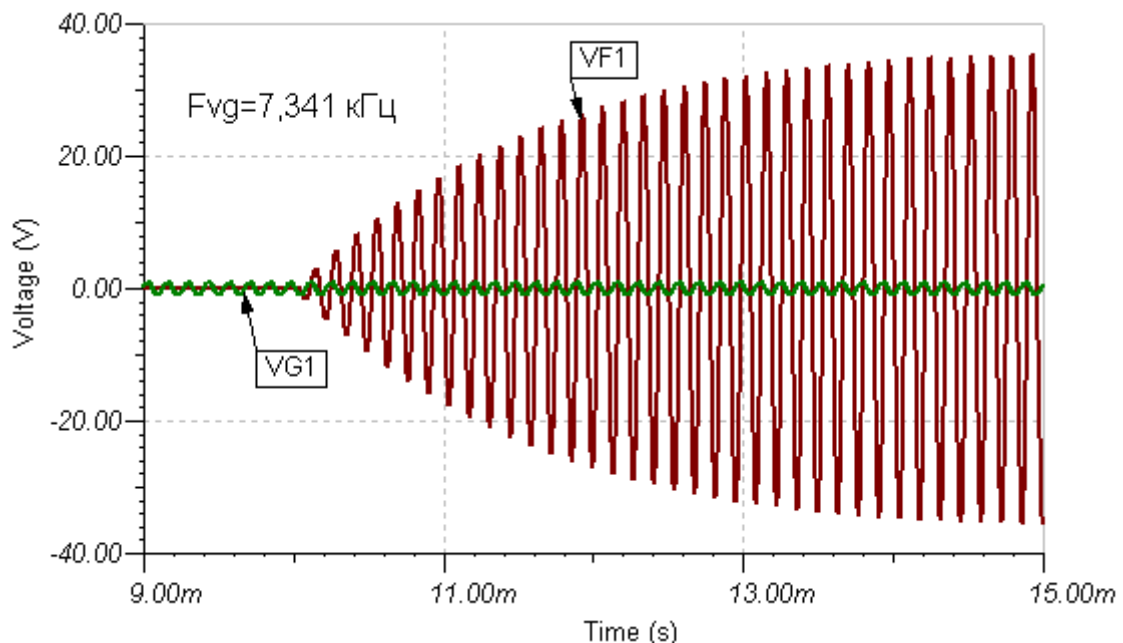


Рис. 4.16. Переходный процесс в режиме изохронизма

Если частота генератора совпадает с резонансной частотой контура, получаем режим изохронизма (рис. 4.16). При этом ампли-

туда переходных колебаний в контуре монотонно возрастает.

### **БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК**

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. – М.: Гардарики, 2006. – 701 с.
2. Алехин В.А. Моделирование электрических цепей и электронных схем в среде «TINA-8». – М: МИРЭА, 2010 г., № 0986.
3. Алехин В.А. Линейные электрические цепи. Компьютерное моделирование в среде «TINA-8». – М: МИРЭА, 2010 г., № 1083.
4. TINA. Design Suite. The Complete Electronics Lab for Windows. Quick Start manual. - <http://www.designsoftware.com/>
5. TINA PRO ADVANCED TOPICS. - <http://www.tina.com/>
6. TINA PCB Design manuals.-<http://www.designsoftware.com/>