

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ В МАТНСАД

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ
КОНТРОЛЬНЫХ И КУРСОВЫХ РАБОТ
НА КОМПЬЮТЕРАХ**

Для студентов всех форм обучения

МОСКВА 2006

ВВЕДЕНИЕ

Изучение электротехнических дисциплин предусматривает освоение методов расчета электрических цепей в стационарных и переходных режимах. Студенты выполняют курсовую работу, типовые расчетные задания, проводят расчеты при оформлении лабораторных работ. Технические средства для выполнения электротехнических расчетов совершенствовались от логарифмической линейки к инженерному калькулятору и компьютеру. В настоящее время существующие программные средства для математических расчетов (MATLAB, Mathcad и др.) позволяют сократить время расчетов и выполнить различные исследования электрических цепей. Большие удобства дают эти программы при анализе и построении графиков электрических процессов. Расчетные работы, выполненные на компьютерах, как правило, качественно оформлены. Для быстрого освоения и использования в учебном процессе наиболее подходит программная среда Mathcad. Методические указания содержат краткие теоретические сведения, примеры и программы расчетов электрических цепей с использованием Mathcad-11 по трем важным разделам теории электрических цепей: линейные электрические цепи постоянного тока, линейные электрические цепи переменного тока, переходные процессы в цепях с сосредоточенными параметрами. Для ознакомления с Mathcad-11 и, если потребуется, подробного изучения рекомендована литература /7,8/.

Знание Mathcad поможет Вам правильно выполнить расчетные задания, оформить лабораторные работы. В то же время, необходимо уметь вручную рассчитывать простые электрические схемы, использовать символический метод расчета цепей с гармоническими сигналами, уметь качественно и количественно описать переходные процессы в электрических цепях. Такое сочетание простых количественных оценок и сложных компьютерных расчетов позволит Вам в будущем решать различные инженерные задачи.

Часть 1. ЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПОСТОЯННОГО ТОКА

1.1. Краткие теоретические сведения и методы численного расчета линейных электрических цепей

Рассмотрим основные понятия и свойства линейных цепей постоянного тока на примере схемы рис.1.1.

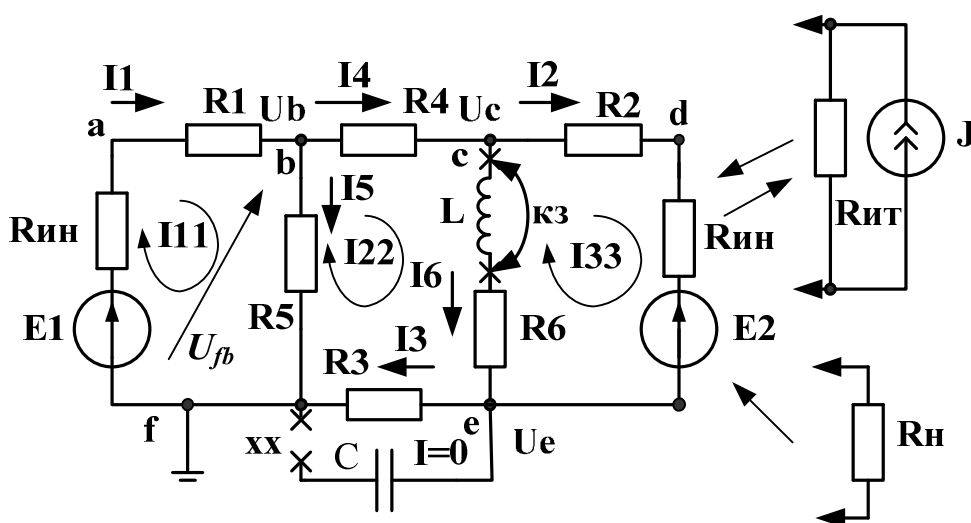


Рис.1.1. Схема линейной цепи постоянного тока.

В электрических цепях постоянного тока источниками энергии являются источники постоянного напряжения E и источники постоянного тока J . Понятие «**постоянное напряжение (ток)**» означает, что во времени значение и направление напряжения (тока) не меняются. Можно сказать, что **частота изменения постоянного напряжения (тока) $\omega = 0$** .

В идеальном источнике напряжения внутреннее сопротивление $R_{ин} = 0$ и напряжение на выходе идеального источника напряжения равно E и не зависит от внешней цепи.

В идеальном источнике тока внутреннее сопротивление $R_{ит} = \infty$, ток, отдаваемый во внешнюю цепь, не зависит от свойств внешней цепи.

Источник тока J с параллельно включенным сопротивлением $R_{ит}$ можно заменить эквивалентным источником напряжения $E2 = J \cdot R_{ит}$, в котором $R_{ин} = R_{ит}$.

И наоборот, *источник напряжения E_2 с внутренним сопротивлением $R_{ин}$ можно заменить источником тока*

$$J = \frac{E_2}{R_{ин}}, \text{ в котором } R_{ин} = R_{ит}.$$

Пассивными элементами электрической цепи являются сопротивление (резистор), индуктивность, емкость.

По закону Ома напряжение на резисторе $u_R = I \cdot R$.

В цепи постоянного тока ($i = const, u = const$) напряжение на индуктивности $u_L = L \frac{di_L}{dt} = 0$ и индуктивность эквивалентна короткому замыканию (КЗ).

Ток через емкость $i_C = C \frac{du_C}{dt} = 0$ и емкость эквивалентна разрыву (холостому ходу – ХХ).

Вольтамперной характеристикой элемента электрической цепи называют зависимость тока, проходящего через этот элемент, от напряжения на его зажимах.

Электрическая цепь постоянного тока является линейной, если все элементы цепи имеют линейные вольтамперные характеристики.

Структура электрической цепи определяется ветвями, узлами и контурами. **Ветвь** это участок цепи, через который проходит один и тот же ток. **Узел** – место соединения трех и более ветвей. **Контур** – замкнутый путь, последовательность ветвей и узлов, в которой каждая ветвь и каждый узел входит один раз. В схеме рис.1.1. 6 ветвей (не считая разомкнутой емкости), 4 узла и 3 контура. Один из узлов (например, f) заземляют и считают общим.

Основные законы электрических цепей

Обобщенный закон Ома для участка цепи, содержащего источник напряжения:

Ток в ветви равен напряжению на зажимах ветви, взятому по направлению тока, плюс (минус) источники напряжения, деленному на сумму сопротивлений ветви. Ток в первой ветви

$$I_1 = \frac{U_{fb} + E_1}{R_{ин} + R_1}. \text{ Знак плюс берут для источников напряжения,}$$

совпадающих по направлению с током.

Первый закон Кирхгофа:

Сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю (или сумма входящих в узел токов равна сумме выходящих токов). Для узла *b*: $I_1 = I_4 + I_5$.

Второй закон Кирхгофа:

В замкнутом контуре алгебраическая сумма падений напряжений на пассивных элементах равна алгебраической сумме источников напряжения. При этом со знаком плюс берут падения напряжения на тех пассивных элементах, в которых токи совпадают с направлением обхода контура. Со знаком плюс берут источники напряжения, совпадающие по направлению с направлением обхода контура.

Алгебраические методы расчета электрических цепей

Для расчета сложных электрических цепей применяют алгебраические методы, основанные на составлении и решении систем уравнений для токов и напряжений в цепи. Рассмотрим применение алгебраических методов для расчета цепи, показанной на рис.1.1.

Расчет цепи по уравнениям Кирхгофа

Есть такое правило: ***прежде чем начать серьезную работу, приготовь хороший инструмент.*** Отличным инструментом для инженерных расчетов является пакет Mathcad. С этой программой студенты должны знакомиться уже с первого курса и применять Mathcad в расчетах типовых заданий и курсовых работ. В данном пособии приведены примеры решения электротехнических задач в Mathcad с комментариями и пояснениями. Подробно со всеми возможностями этой программы можно познакомиться в [7,8].

Пример 1.1. Рассчитать токи в линейной цепи (рис.1.1.) по законам Кирхгофа.

Записываем уравнения по первому закону Кирхгофа для узлов b, c, e:

$$\text{Узел } b: I_1 = I_4 + I_5$$

$$\text{Узел } c: I_4 = I_2 + I_6 \quad (1.1).$$

$$\text{Узел } e: I_3 = I_6 + I_2$$

Записываем уравнения по второму закону Кирхгофа для трех контуров:

$$1\text{-й контур}: R_{ин}I_1 + R_5I_5 = E_1$$

$$2\text{-й контур}: R_4I_4 + R_6I_6 + R_3I_3 - R_5I_5 = 0 \quad (1.2).$$

$$3\text{-й контур}: R_2I_2 + R_{ин}I_2 - R_6I_6 = -E_2$$

Решаем уравнения в Mathcad.

Задаем значения параметров цепи:

$$E_1 := 12 \text{ В} \quad E_2 := 8 \text{ В} \quad R_{ин} := 4 \text{ Ом} \quad R_1 := 20 \text{ Ом}$$

$$R_2 := 30 \text{ Ом} \quad R_3 := 30 \text{ Ом} \quad R_4 := 20 \text{ Ом}$$

$$R_5 := 40 \text{ Ом} \quad R_6 := 20 \text{ Ом}$$

Составляем уравнения по законам Кирхгофа

Given (Ключевое слово решения уравнений)

По первому закону Кирхгофа:

$$I_1 = I_4 + I_5$$

$$I_4 = I_2 + I_6$$

$$I_3 = I_6 + I_2$$

По второму закону Кирхгофа:

$$R_{ин} \cdot I_1 + R_1 \cdot I_1 + R_5 \cdot I_5 = E_1$$

$$R_4 \cdot I_4 + R_6 \cdot I_6 + R_3 \cdot I_3 - R_5 \cdot I_5 = 0$$

$$R_2 \cdot I_2 + R_{ин} \cdot I_2 - R_6 \cdot I_6 = -E_2$$

Примечание об операторах:

Оператор локального присваивания (**:=**) присваивает численное или символьное значение переменным, расположенным ниже и правее этого знака. Знак локального присваивания находится на панели «Калькулятор» или вызывается клавишей (**:** - двоеточие) английского алфавита.

Жирный знак равенства из панели «Булевы операторы» (**=**) - это логическое равенство, используется в уравнениях после ключевого слова **Given** и в символьных вычислениях. Этот знак можно вызвать сочетанием клавиш **Ctrl+=**.

Обычный (тонкий) знак равенства (=) дает вывод результата численного расчета.

Находим вектор искомых токов:

$$\begin{pmatrix} I1 \\ I2 \\ I3 \\ I4 \\ I5 \\ I6 \end{pmatrix} := \text{Find}(I1, I2, I3, I4, I5, I6) \text{ float}, 4 \rightarrow \begin{pmatrix} .2240 \\ -.1265 \\ 5.847 \cdot 10^{-2} \\ 5.847 \cdot 10^{-2} \\ .1656 \\ .1850 \end{pmatrix}$$

Инструменты символьных вычислений **float,4** → дают результат решения в виде столбца значений токов с четырьмя значащими цифрами.

Расчет цепи методом контурных токов (МКТ)

Пример 1.2. Рассчитать контурные токи в цепи (рис.1.1).

Независимые контуры и контурные токи I_{11} , I_{22} , I_{33} обозначены на схеме.

Записываем канонические уравнения по методу МКТ для трехконтурной схемы (рис.1.1):

$$\begin{pmatrix} I_{11} \\ I_{22} \\ I_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \end{pmatrix} \quad (1.3).$$

Диагональные сопротивления контурной матрицы сопротивлений с одинаковыми индексами находим как сумму всех сопротивлений контура при последовательном обходе. Недиagonальные сопротивления с разными индексами равны сопротивлениям смежных ветвей контуров, причем со знаком плюс берут те сопротивления смежных ветвей, в которых контурные токи направлены одинаково. Контурные ЭДС равны алгебраической сумме всех ЭДС контура. Со знаком плюс берут ЭДС, совпадающие по направлению с обходом контура.

Записываем уравнения в Mathcad.

Сопротивления контурной матрицы

$$R_{11} := R_{1n} + R_1 + R_5$$

$$R_{22} := R_3 + R_4 + R_5 + R_6$$

$$R_{33} := R_2 + R_6 + R_{1n}$$

$$R_{12} := -R_5 \quad R_{21} := -R_5 \quad R_{23} := -R_6$$

$$R_{13} := 0 \quad R_{31} := 0 \quad R_{32} := -R_6$$

Контурные ЭДС $E_{11} := E_1$ $E_{22} := 0$ $E_{33} := -E_2$

Матричные канонические уравнения МКТ

$$\text{ORIGIN} := 1 \quad i := 1..3 \quad k := 1..3$$

$$R_{ik} := \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{pmatrix} \quad E_{kk} := \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \end{pmatrix}$$

Решение уравнений

$$I := R_{ik}^{-1} \cdot E_{kk} \quad I = \begin{pmatrix} 2.24 \times 10^{-1} \\ 5.847 \times 10^{-2} \\ -1.265 \times 10^{-1} \end{pmatrix}$$

Примечание: векторы и матрицы формируются в шаблонах панели «Матрица». Первые индексы соответствуют номеру строки, вторые индексы соответствуют номеру столбца. Встроенная переменная ORIGIN определяет нумерацию элементов в векторах и матрицах. По умолчанию ORIGIN = 0. Если задано ORIGIN:=1, нумерация индексов начинается с единицы.

Токи в ветвях

$$I_1 := I_1 \quad I_1 = 2.24 \times 10^{-1} \quad \text{A}$$

$$I_2 := I_3 \quad I_2 = -1.265 \times 10^{-1} \quad \text{A}$$

$$I_3 := I_2 \quad I_3 = 5.847 \times 10^{-2} \quad \text{A}$$

$$I_4 := I_3 \quad I_4 = 5.847 \times 10^{-2} \quad \text{A}$$

$$I_5 := I_1 - I_2 \quad I_5 = 1.656 \times 10^{-1} \quad \text{A}$$

$$I_6 := I_2 - I_3 \quad I_6 = 1.85 \times 10^{-1} \quad \text{A}$$

Пояснение: контурные токи представлены в виде вектора-столбца и имеют нижние индексы: $I_1 = I_{11}$, $I_2 = I_{22}$, $I_3 = I_{33}$.

Расчет методом узловых напряжений (МУН)

Составляем уравнения по методу узловых напряжений.

Нумеруем узлы: $b \rightarrow 1$, $c \rightarrow 2$, $e \rightarrow 3$.

Записываем для схемы с тремя независимыми узлами канонические уравнения МУН для расчета напряжений в узлах:

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} J_{11} \\ J_{22} \\ J_{33} \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

В матрице узловых проводимостей диагональные проводимости с одинаковыми индексами находим как сумму проводимостей всех ветвей, подключенных к узлу с таким же индексом. Недиагональная проводимость с разными индексами (например, G_{12}) равна взятой со знаком минус проводимости всех ветвей, соединяющих узлы 1 и 2.

Узловые токи находим как алгебраическую сумму подключенных к данному узлу источников напряжения, деленных на сопротивления ветвей, в которых они находятся, и источников тока. Со знаком плюс берем источники, направленные к узлу.

Записываем уравнения в Mathcad:

Узловые проводимости

$$G_{11} := \frac{1}{R_1 + R_{1H}} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \quad G_{22} := \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_2 + R_{1H}} + \frac{1}{R_6}$$

$$G_{33} := \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_6} + \frac{1}{R_2 + R_{1H}}$$

$$G_{12} := \frac{-1}{R_4} \quad G_{21} := \frac{-1}{R_4} \quad G_{13} := 0 \quad G_{31} := 0$$

$$G_{23} := \frac{-1}{R_6} + \frac{-1}{R_2 + R_{1H}} \quad G_{32} := \frac{-1}{R_6} + \frac{-1}{R_2 + R_{1H}}$$

Узловые токи:

$$J1 := \frac{E1}{R1 + R_{ин}} \quad J2 := \frac{E2}{R2 + R_{ин}} \quad J3 := \frac{-E2}{R2 + R_{ин}}$$

Матричное уравнение

$$U := \begin{pmatrix} G11 & G12 & G13 \\ G21 & G22 & G23 \\ G31 & G32 & G33 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} J1 \\ J2 \\ J3 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 6.623 \times 10^0 \\ 5.453 \times 10^0 \\ 1.754 \times 10^0 \end{pmatrix} \quad \text{В}$$

Расчет токов в ветвях

$$I1 := \frac{E1 - U1}{R1 + R_{ин}} \quad I1 = 2.24 \times 10^{-1} \quad \text{А}$$

$$I2 := \frac{U2 - E2}{R4} \quad I2 = -1.273 \times 10^{-1} \quad \text{А}$$

$$I3 := \frac{U3}{R3} \quad I3 = 5.847 \times 10^{-2} \quad \text{А}$$

$$I4 := \frac{U1 - U2}{R4} \quad I4 = 5.847 \times 10^{-2} \quad \text{А}$$

$$I5 := \frac{U1}{R5} \quad I5 = 1.656 \times 10^{-1} \quad \text{А}$$

$$I6 := \frac{U2 - U3}{R6} \quad I6 = 1.85 \times 10^{-1} \quad \text{А}$$

Итак, расчет токов выполнен тремя методами, результаты расчетов совпадают. Расчеты происходят быстро, ошибки легко исправляются. Рекомендую Вам выполнять расчетные задания в лабораторном практикуме и на практических занятиях, используя Mathcad.

Примеры расчетов различных электротехнических задач даны во многих главах учебного пособия и постепенно станут для Вас понятным и эффективным рабочим инструментом.

Метод эквивалентного генератора (МЭГ)

Если требуется найти ток только в одной ветви сложной цепи, применяют метод эквивалентного генератора. Суть его состоит в следующем.

1. Размыкаем ветвь с неизвестным током и находим напряжение холостого хода U_{xx} на зажимах разомкнутой ветви и входное сопротивление $R_{вх}$.

2. Заменяем сложную цепь активным двухполюсником с источником напряжения $E_{экв} = U_{xx}$ и внутренним сопротивлением $R_{вх}$ (рис. 1.2). Это и есть эквивалентный генератор. Подключаем к эквивалентному генератору сопротивление ветви (нагрузки) и вычисляем ток по формуле:

$$I = \frac{E_{экв}}{R_{вх} + R_n} \quad (1.5).$$

Если $R_n = 0$, ток в ветви называют током короткого замыкания $I_{кз} = \frac{U_{xx}}{R_{вх}}$. Отсюда видно, что входное

сопротивление можно как $R_{вх} = \frac{U_{xx}}{I_{кз}}$.

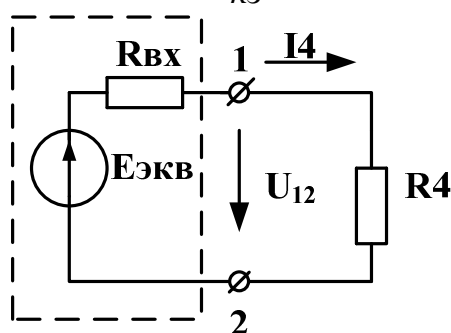


Рис.1.2. Схема эквивалентного генератора с нагрузкой.

В исходной схеме (рис.1.1) сопротивления ветвей не превышают 100 Ом. Будем искать методом эквивалентного генератора ток $I4$. С достаточной для инженерных расчетов точностью в начале программы метода узловых напряжений присвоим $R4 = 10^7 \text{ Ом}$. Программа МУН автоматически

пересчитает новые значения напряжений в узлах. Получим напряжение холостого хода $U_{xx} = U1 - U2 = 4,537$ В. Далее зададим $R4 = 10^{-7}$ Ом. Снова программой МУН найдем ток короткого замыкания $I_{4кз} = 7,878 \cdot 10^{-2}$ А. Входное сопротивление $R_{вх} = \frac{4,537}{7,878 \cdot 10^{-2}} = 57,59$ Ом. Ток в сопротивлении R4 составит:

$$I_4 := \frac{7.5 - 2.963}{57.59 + 20} \quad I_4 = 5.847 \times 10^{-2} \text{ А}$$

Это значение совпадает с найденным ранее.

Согласование нагрузки с генератором

Для выделения максимальной мощности в нагрузке требуется выполнить *условие согласования нагрузки с генератором* $R_H = R_{вх}$.

При этом максимальная мощность в нагрузке равна:

$$P_{\max} = \frac{(E_{\text{экв}})^2 \cdot R_H}{(R_{\text{вх}} + R_H)^2} = \frac{(E_{\text{экв}})^2}{4R_{\text{вх}}} \quad (1.3).$$

Баланс мощности

В электрической цепи постоянного тока сумма мощностей, выделяемых источниками энергии, равна сумме мощностей, потребляемых в нагрузках (резисторах).

В цепи (рис.1.1.) мощность источников напряжения (Mathcad):

$$P_{\text{ист}} := E1 \cdot I1 - E2 \cdot I2 \quad P_{\text{ист}} = 3.707 \times 10^0 \quad \text{Вт}$$

$$P_{\text{потр}} := I1^2 \cdot (R1 + R_{\text{ин}}) + I2^2 \cdot (R2 + R_{\text{ин}}) + I3^2 \cdot R3 + I4^2 \cdot R4 + I5^2 \cdot R5 + I6^2 \cdot R6$$

$$P_{\text{потр}} = 3.708 \times 10^0 \quad \text{Вт}$$

Как видим, баланс мощности выполняется.

Мощность источника тока, подключенного вместо E_2 к узлам de (рис.1.1): $P_J = J \cdot U_{de}$ (источник тока направлен к узлу d).

Часть 2. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

2.1. Краткие теоретические сведения и методы расчета

В электрических цепях переменного тока токи и напряжения меняются во времени и могут иметь синусоидальную гармоническую форму или периодическую несинусоидальную форму.

Расчет электрической цепи при синусоидальном сигнале

При гармоническом синусоидальном сигнале $e(t) = E_m \cdot \sin(\omega t + \psi_E)$ расчет электрических цепей проводят символически методом с использованием комплексных амплитуд токов и напряжений и комплексных сопротивлений.

Рассмотрим пример расчета простой цепи синусоидального тока (Рис.2.1.).

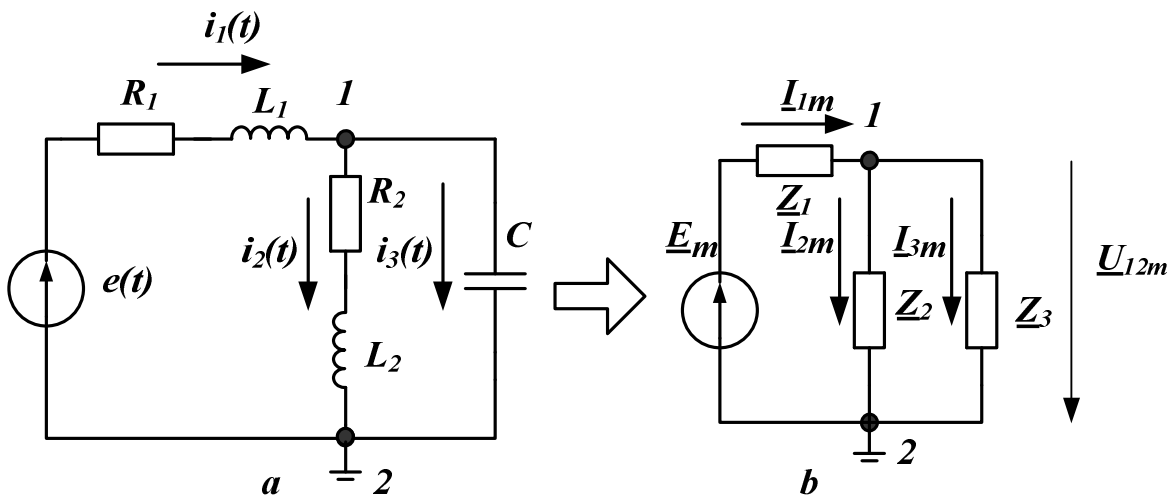


Рис. 2.1. Схема простой цепи синусоидального тока

Для расчета символическим методом исходную цепь для мгновенных значений напряжений и токов (рис.2.1.а) заменяют символической схемой замещения для комплексных амплитуд напряжений и токов и комплексных сопротивлений (рис.2.1.б).

В символической схеме замещения **комплексная амплитуда** входного напряжения $\underline{E}_m = E_m \cdot e^{j\psi}$.

Сопротивление каждой ветви цепи характеризуют **комплексным сопротивлением**:

$$\underline{Z} = R + jX = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = Z \cdot e^{j\varphi}, \quad \text{где}$$

$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ - **модуль комплексного сопротивления**,
 $\varphi = \arctg\left(\frac{X}{R}\right)$ - **аргумент комплексного сопротивления**. В ветви без индуктивности $L = 0$, а в ветви без емкости $C = \infty$.

Часть цепи, содержащая одну или несколько ветвей и имеющая два входных зажима, называется двухполюсником. **Входное эквивалентное сопротивление двухполюсника** рассчитывают сверткой цепи. Например, для схемы, изображённой на рис 2.1b:

$$\underline{Z}_{\text{эkv}} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}.$$

Входной ток $\underline{I}_{1m} = \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}_{\text{эkv}}} = \frac{E_m \cdot e^{j\psi_E}}{Z_{\text{эkv}} \cdot e^{j\varphi}} = I_{1m}(\omega) \cdot e^{j\psi_I(\omega)}$. Здесь

зависимость амплитуды тока от частоты $I_{1m}(\omega)$ - **амплитудно - частотная характеристика тока**, $\psi_I(\omega) = \psi_U(\omega) - \varphi(\omega)$ - **фазо-частотная характеристика тока**. Если принять $\varphi_U = 0$, то $\psi_I(\omega) = -\varphi(\omega)$. В цепи с индуктивным сопротивлением $[-\varphi(\omega)]$ меньше нуля и напряжение опережает ток по фазе. В цепи с емкостным сопротивлением $[-\varphi(\omega)]$ больше нуля и напряжение отстает от тока по фазе. В цепи с чисто активным сопротивлением, а также в резонансных режимах, когда $X_{\text{эkv}} = 0$, ток совпадает с напряжением по фазе. Мгновенное значение тока на входе двухполюсника (рис.2.1.a) равно $i_I(t) = I_{1m} \cdot \sin(\omega t + \psi_I)$. **Мгновенная мощность** будет равна:

$$p(t) = u(t) \cdot i_I(t) = \frac{U_m \cdot I_{1m}}{2} \cos \varphi - \frac{U_m \cdot I_{1m}}{2} \cos(2\omega t + 2\psi_U - \varphi).$$

В этой формула $u(t) = e(t)$ - напряжение на входе двухполюсника.

Средняя мощность за период или **активная мощность**

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T u \cdot i \cdot dt = UI \cos \varphi. \quad \text{Здесь } U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad I -$$

действующие значения напряжения и тока на входе двухполюсника.

В расчетах символическим методом применяют комплексная мощность $\tilde{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = P + jQ$, где \underline{U} - комплексное действующее значение напряжения на входе пассивного двухполюсника, \underline{I}^* - комплексно-сопряженный ток, P – активная мощность, Q – реактивная мощность.

Простую цепь гармонического тока надо уметь рассчитывать «вручную», используя комплексные числа и калькулятор. Расчет сложных цепей можно выполнить в Mathcad.

Примеры расчета цепи гармонического тока в Mathcad.

Пример 2.1

Рассчитать токи в цепи рис.2.1.

Задаем исходные данные:

$$R1 := 1000 \text{ Ом} \quad L1 := 20 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}$$

$$L2 := 30 \cdot 10^{-3} \text{ Гн} \quad R2 := 1000 \text{ Ом} \quad C := 47 \cdot 10^{-9} \text{ Ф}$$

$$f := 5000 \text{ Гц}$$

$$e1(t) := 10 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$$

Комплексная амплитуда ЭДС

$$i := \sqrt{-1} \quad E1 := 10 \cdot e^{i \cdot 0}$$

Комплексные сопротивления

$$Z1 := R1 + i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L1 \quad Z2 := R2 + i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L2 \quad Z3 := -i \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}$$

Входное сопротивление

$$Z_{in} := Z1 + \frac{Z2 \cdot Z3}{Z2 + Z3}$$

Пояснение: при действиях с комплексными числами необходимо определить i как мнимую единицу.

Рассчитываем комплексные амплитуды токов:

$$I1 := \frac{E1}{Z_{in}} \quad I2 := \frac{I1 \cdot Z3}{Z2 + Z3} \quad I3 := \frac{I1 \cdot Z2}{Z2 + Z3}$$

$$I1 = 6.911 \times 10^{-3} + 7.866i \times 10^{-4} \quad A$$

$$I2 = -6.62 \times 10^{-4} - 4.505i \times 10^{-3} \quad A$$

$$I3 = 7.573 \times 10^{-3} + 5.291i \times 10^{-3} \quad A$$

Определение. *Векторной диаграммой называют совокупность комплексных векторов токов и напряжений, построенных из начала комплексной плоскости с соблюдением их взаимной ориентации.*

Для построения векторов токов, исходящих из нуля координат, надо сформировать двумерные векторы **J1, J2, J3**, в которых первые элементы равны нулю, а вторые элементы являются комплексными амплитудами токов. При построении графика переменными по горизонтальной оси являются действительные части комплексных амплитуд, а по вертикальной оси – мнимые части комплексных амплитуд.

Векторная диаграмма токов

ORIGIN := 1

m := 1..2

J1 := (0 I1) J2 := (0 I2) J3 := (0 I3)

XI1 := Re(J1) YI1 := Im(J1)

XI2 := Re(J2) YI2 := Im(J2)

XI3 := Re(J3) YI3 := Im(J3)

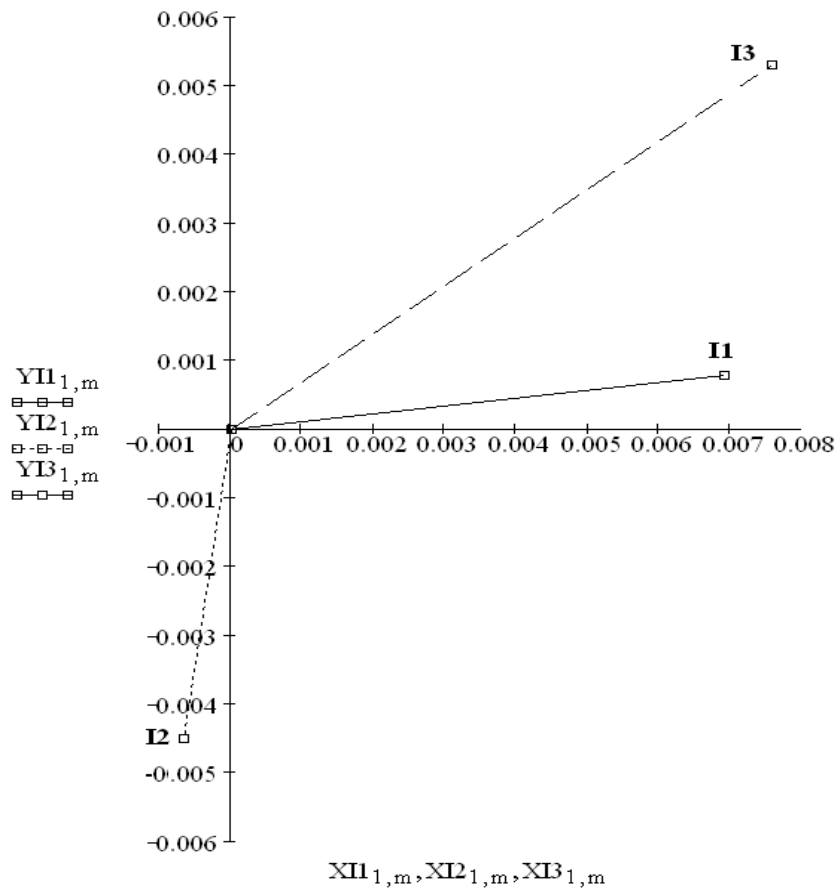


Рис.2.2. Векторная диаграмма токов.

Находим мгновенные значения токов:

$$i_1(t) := |I_1| \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \arg(I_1))$$

$$i_2(t) := |I_2| \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \arg(I_2))$$

$$i_3(t) := |I_3| \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + \arg(I_3))$$

Пояснение. Амплитуду тока находим как модуль комплексной амплитуды. «Модуль» находится на панели «Калькулятор». Начальная фаза – это аргумент комплексной амплитуды. Функция «arg» находится в разделе «Комплексные числа» диалогового окна «Вставить функцию» Стандартной панели инструментов.

Задаем начальный момент времени, шаг, конечный момент и строим графики ЭДС и токов:

$$t := 0, 10^{-5} .. 2 \cdot 10^{-4}$$

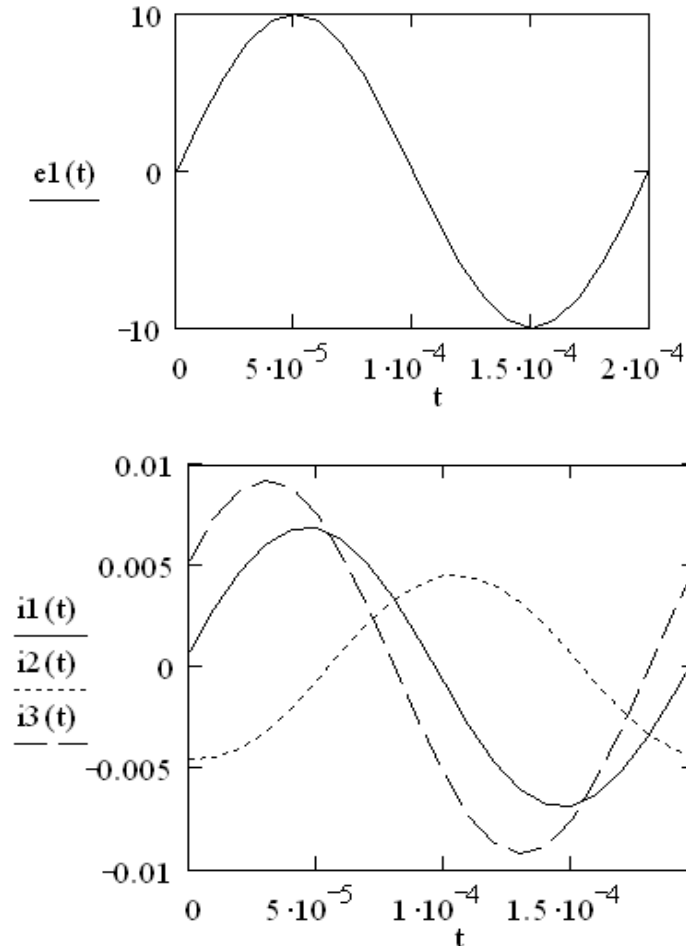


Рис.2.3. Графики временных зависимостей входного напряжения и токов.

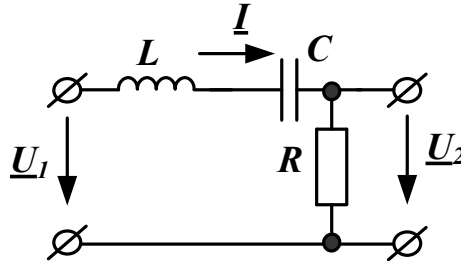
Важные выводы:

1. В цепи синусоидального тока, содержащей элементы R , L , C токи в ветвях могут существенно отличаться по фазе от входного напряжения. Поэтому правильный расчет можно выполнить, только используя комплексные амплитуды и комплексные сопротивления.

2. Для расчета комплексных амплитуд напряжений и токов в символической схеме замещения цепи можно применять любые методы расчета линейных цепей, изученные для цепей постоянного тока. От комплексных амплитуд легко перейти к функциям времени для мгновенным значений.

Пример 2.2

Рассчитать и построить амплитудно-частотную и фазо-частотную характеристику RLC - цепи (рис.2.4).

Рис.2.4. Схема RLC – цепи**Исходные данные**

$$L := 10^{-2} \text{ Гн} \quad C := 47 \cdot 10^{-9} \text{ Ф} \quad R := 500 \text{ Ом}$$

$$f := 1000 \text{ Гц}$$

$$\text{ORIGIN} := 1 \quad i := \sqrt{-1} \quad +$$

Комплексные сопротивления

$$Z1(f) := i \cdot \left(2 \cdot \pi \cdot f \cdot L - \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} \right) \quad Z2(f) := R$$

Комплексная передаточная функция

$$\text{KPF}(f) := \frac{Z2(f)}{Z1(f) + Z2(f)}$$

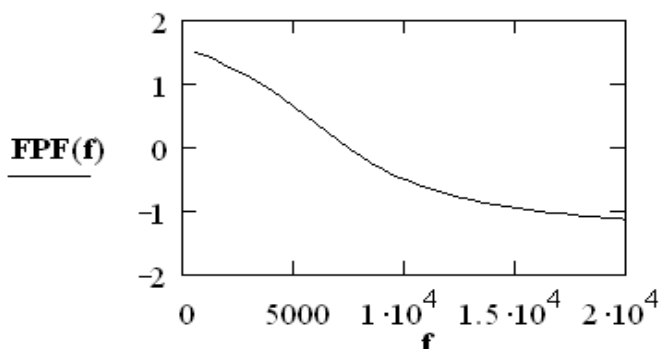
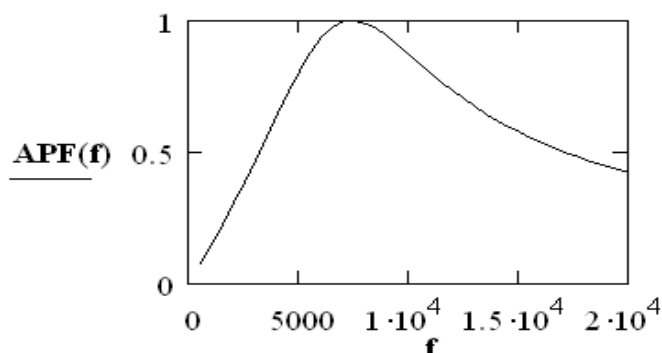
Пояснение. Комплексная передаточная функция $\underline{K}(j\omega) = \frac{U_2(j\omega)}{U_1(j\omega)}$. Последовательное соединение комплексных сопротивлений $\underline{Z1}$ и $\underline{Z2}$ является делителем напряжения и $\underline{U}_2 = \frac{\underline{U}_1 \cdot \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$. Амплитудно-частотная характеристика равна

модулю комплексной частотной характеристики. Фазо-частотная характеристика равна аргументу комплексной частотной характеристики.

Графики АЧХ и ФЧХ

$\text{APF}(f) := |\text{KPF}(f)|$ $\text{FPF}(f) := \text{arg}(\text{KPF}(f))$

$f := 500, 1000.. 20000$



Для построения графиков задаем значения дискретной переменной f . Первое значение 500 Гц, второе значение 1000 Гц (следовательно, шаг переменной 500 Гц), последнее значение 20000 Гц. Затем на панели **Graf** выбираем XY plot, по оси X задаем переменную X, по оси Y указываем функцию $\text{APF}(f)$ или $\text{FPF}(f)$. Щелчок левой кнопкой на свободном поле построит график.

Из графиков видно, что в RLC цепи возникает последовательный резонанс напряжений, при котором амплитудно-частотная характеристика имеет максимум, а фазо-частотная характеристика проходит через нуль.

Прохождение несинусоидальных сигналов в частотно-зависимых цепях

При периодическом несинусоидальном сигнале входное периодическое воздействие представляется в виде ряда Фурье и расчет режима в линейной цепи проводится по каждой гармонической составляющей в отдельности: по постоянному току для нулевой гармоники и символическим методом для всех остальных гармоник. Совокупность амплитуд гармонических составляющих, построенных на частотной оси, образует **амплитудный спектр**. Совокупность начальных фаз гармонических составляющих образует **фазовый спектр**. Амплитудный и фазовый спектры входного сигнала преобразуются комплексной частотной характеристикой линейной цепи и, соответственно, изменяется форма сигнала на выходе цепи. При этом комплексная амплитуда каждой гармонической составляющей спектра умножается на комплексную передаточную функцию цепи на соответствующей частоте и получается комплексная амплитуда спектральной составляющей выходного спектра. Суммируя временные функции всех выходных спектральных составляющих, получим полный выходной сигнал.

Пример 2.3

Расчет в Mathcad прохождения прямоугольных импульсов в RLC-цепи

На *RLC*-цепь (рис.2.4) воздействует негармонический сигнал в виде прямоугольных импульсов (рис.2.5). Требуется найти амплитудный и фазовый спектр входного сигнала $U_1(t)$, амплитудный и фазовый спектр выходного сигнала $U_2(t)$ и форму выходного сигнала.

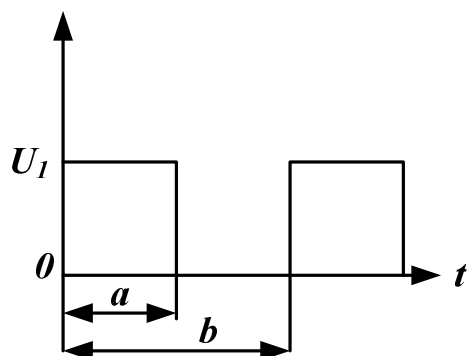


Рис. 2.5. Импульсный входной сигнал

Параметры входного сигнала

$$U1 := 1 \quad \text{В}$$

$$T := 10^{-3} \quad \text{с} \quad a := \frac{T}{2} \quad b := T$$

Программируем форму входного сигнала

$$U1(t) := \begin{cases} U1 & \text{if } 0 < t < a \\ 0 & \text{if } a \leq t < b \end{cases}$$

Пояснение: для создания программы на панели «Программирование» надо выбрать команду «Add line».

Вычисляем коэффициенты ряда Фурье

$$\text{ORIGIN} := 0$$

$$N := 20 \quad n := 0..N$$

$$a_n := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T U1(t) \cdot \cos\left(n \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T}\right) dt$$

$$b_n := \frac{2}{T} \cdot \int_0^T U1(t) \cdot \sin\left(n \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T}\right) dt$$

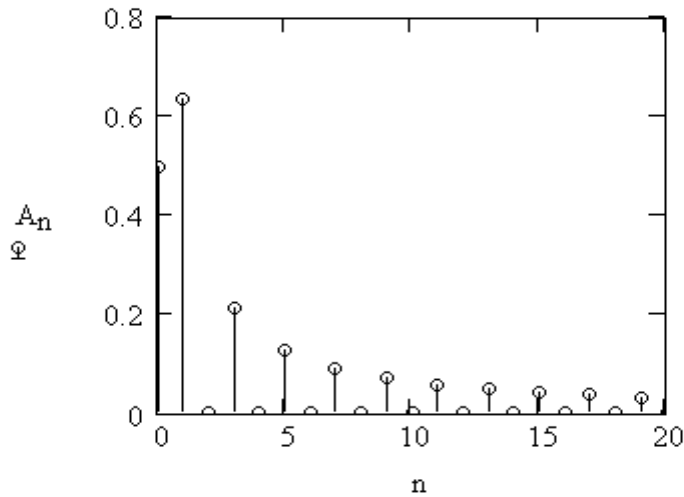
$$a_0 := \frac{1}{T} \cdot \int_0^T U1(t) dt$$

Вычисляем амплитуды и фазы спектральных составляющих

$$A_0 := a_0 \quad A_n := \sqrt{(a_n)^2 + (b_n)^2} \quad \psi_n := \text{atan2}(b_n, a_n)$$

$$n := 0..20$$

Амплитудный спектр



Гармонический синтез входного сигнала

$$\omega := \frac{2 \cdot \pi}{T} \quad N := 20 \quad n := 1..N$$

$$US1(t) := a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cdot \cos\left(n \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T}\right) + \sum_{n=1}^N b_n \cdot \sin\left(n \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot t}{T}\right)$$

$$t := 0, 10^{-7} .. 2 \cdot 10^{-3}$$

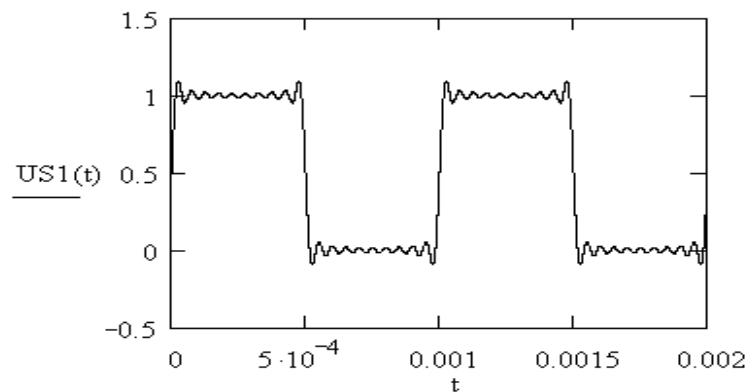


Рис.2.3. Форма синтезированного входного сигнала

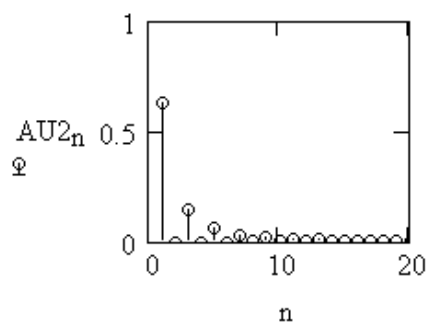
Вывод: Синтезированный из 20 гармонических составляющих ряда Фурье прямоугольный сигнал имеет заметную высокочастотную «изрезанность», но по форме близок к исходному сигналу.

Выходной сигнал

$$N := 20 \quad n := 1..N \quad i := \sqrt{-1} \quad f_n := \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{T}$$

$$U_{2n} := \text{KPF}(f_n) \cdot A_n \cdot e^{i \cdot \psi_n}$$

$$AU_{2n} := |U_{2n}| \quad FU_{2n} := \arg(U_{2n})$$



$N := 20$ Расчет формы выходного сигнала

$$\text{KPF}_0 := 0$$

$$US2(t) := \text{KPF}_0 \cdot a_0 + \left[\sum_{n=1}^N (AU_{2n}) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi \cdot n \cdot t}{T} + FU_{2n}\right) \right]$$

$$t := 0, 10^{-7} .. 2 \cdot 10^{-3}$$

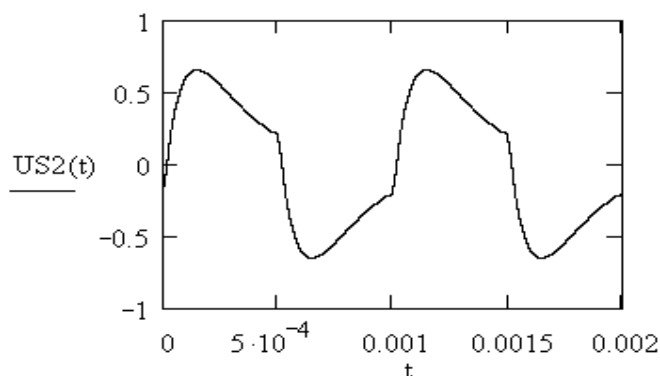


Рис. 2.7. Форма выходного сигнала при $R=1$ кОм

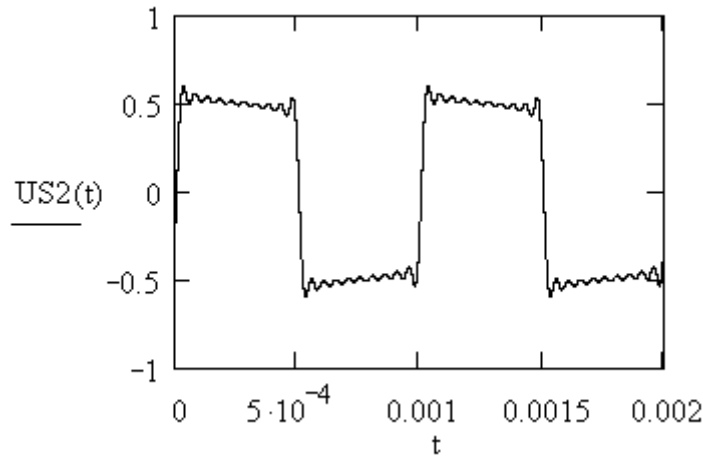


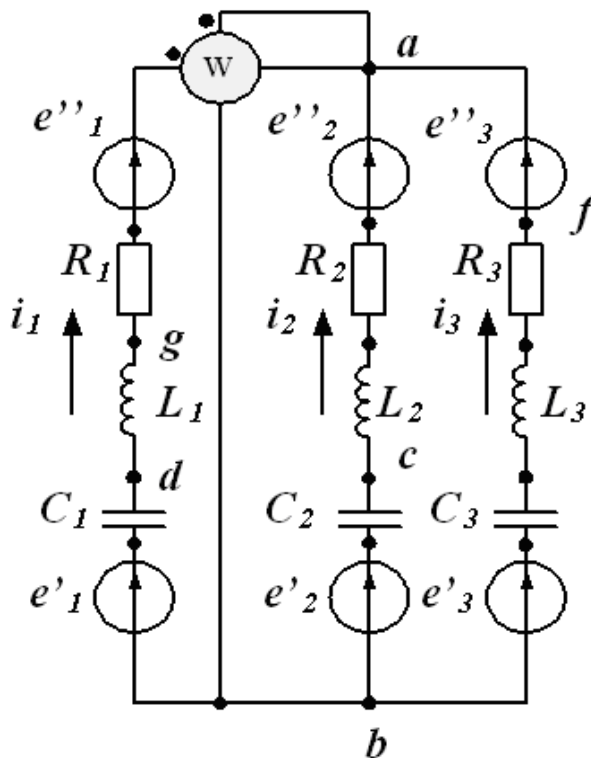
Рис.2.8. Форма выходного сигнала при $R=10$ кОм

Выводы: Прошедший через частотно-зависимую RLC - цепь прямоугольный сигнал имеет искаженную форму. С увеличением сопротивления потерь R расширяется полоса пропускания цепи и снижаются искажения.

**Расчет линейной электрической цепи
синусоидального тока**

Универсальная схема цепи

Исходные данные



$L1 := 1 \cdot 10^{-3}$

$L2 := 3 \cdot 10^{-3}$

$L3 := 0$

$C1 := 10^6$

$C2 := 5 \cdot 10^{-6}$

$C3 := 10^6$

$R1 := 0$

$R2 := 20$

$R3 := 25$

$f := 1000$

Рис. 2.19

$$E'_{1m} := 80 \quad \psi'_{1} := 0 \quad E''_{1m} := 10 \quad \psi''_{1} := 0$$

$$E'_{2m} := 0 \quad \psi'_{2} := 0 \quad E''_{2m} := 0 \quad \psi''_{2} := 0$$

$$E'_{3m} := 60 \quad \psi'_{3} := -30 \cdot \frac{\pi}{180} \quad E''_{3m} := 0 \quad \psi''_{3} := 0$$

Расчет комплексных сопротивлений и комплексных ЭДС

$$i := \sqrt{-1}$$

$$Z_1 := R_1 + i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L_1 - i \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C_1} \quad Z_1 = 6.283i$$

$$Z_2 := R_2 + i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L_2 - i \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C_2} \quad Z_2 = 20 - 12.981i$$

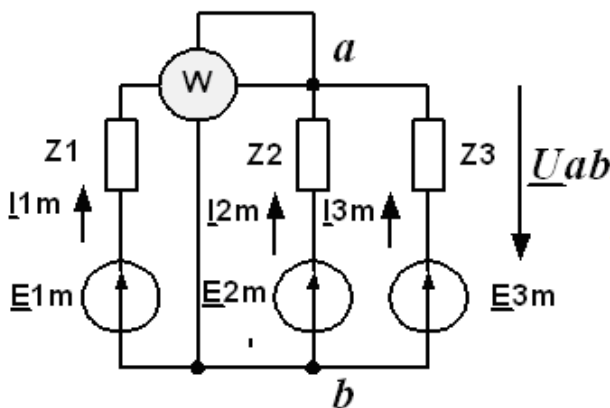
$$Z_3 := R_3 + i \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L_3 - i \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C_3} \quad Z_3 = 25$$

$$E_{1m} := E'_{1m} \cdot e^{i \cdot \psi'_{1}} + E''_{1m} \cdot e^{i \cdot \psi''_{1}} \quad E_{1m} = 90$$

$$E_{2m} := E'_{2m} \cdot e^{i \cdot \psi'_{2}} + E''_{2m} \cdot e^{i \cdot \psi''_{2}} \quad E_{2m} = 0$$

$$+ \\ E_{3m} := E'_{3m} \cdot e^{i \cdot \psi'_{3}} + E''_{3m} \cdot e^{i \cdot \psi''_{3}} \quad E_{3m} = 51.962 - 30i$$

Символическая схема замещения



Расчет узловых напряжений

$$U_{ab} := \frac{\left(\frac{E_{1m}}{Z_1}\right) + \left(\frac{E_{2m}}{Z_2}\right) + \left(\frac{E_{3m}}{Z_3}\right)}{\left(\frac{1}{Z_1}\right) + \left(\frac{1}{Z_2}\right) + \left(\frac{1}{Z_3}\right)}$$

$$U_{ab} = 93.768 - 36.465i \quad \text{В}$$

$$I_{1m} := \frac{E_{1m} - U_{ab}}{Z_1} \quad I_{1m} = 5.804 + 0.6i \quad \text{А}$$

$$|I_{1m}| = 5.834 \quad \arg(I_{1m}) \cdot \frac{180}{\pi} = 5.899$$

$$I_{2m} := \frac{E_{2m} - U_{ab}}{Z_2} \quad I_{2m} = -4.131 - 0.858i \text{ A}$$

$$|I_{2m}| = 4.22 \quad \arg(I_{2m}) \cdot \frac{180}{\pi} = -168.264$$

$$I_{3m} := \frac{E_{3m} - U_{ab}}{Z_3} \quad I_{3m} = -1.672 + 0.259i \text{ A}$$

$$|I_{3m}| = 1.692 \quad \arg(I_{3m}) \cdot \frac{180}{\pi} = 171.209$$

Проверка

$$\Sigma I := I_{1m} + I_{2m} + I_{3m} \quad \Sigma I = 2.054i \times 10^{-15}$$

Часть 3. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЦЕПЯХ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

3.1. Краткое теоретическое введение

Переходным процессом называется неустановившийся, нестационарный процесс, возникший при переходе из одного режима работы к другому. Всякие изменения и переключения в схеме называют коммутацией. В схеме рис.3.1 в момент $t=0$ происходит коммутация (в данном случае замыкание ключа). Режим работы цепи изменяется и возникает переходный процесс.

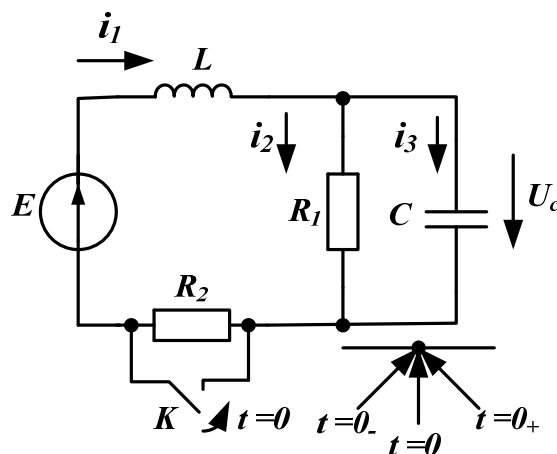


Рис.3.1. Схема цепи с коммутирующим ключом K .

Считается, что *коммутация происходит мгновенно* в

момент времени $t = 0$. Момент времени, предшествующий коммутации, обозначен $t = 0_-$. Момент времени, следующий сразу после коммутации, обозначен $t = 0_+$. Примем следующие значения параметров цепи:
 $E = 120 \text{ В}, L = 10 \text{ мГн}, C = 68 \text{ нФ}, R_1 = R_2 = 1 \text{ кОм}$.

До коммутации в момент $t = 0_-$ ток в индуктивности $i_1(0_-) = \frac{E}{R_1 + R_2}$. В индуктивности накоплена магнитная энергия

$$W_M(0_-) = \frac{L \cdot i_1^2(0_-)}{2}. \text{ Энергия не может измениться мгновенно,}$$

так как мощность всегда ограничена ($P(t) = \frac{dW}{dt} \neq \infty$). Поэтому в электрических цепях с постоянной индуктивностью действует

Первый закон коммутации.

Ток в индуктивности до коммутации равен току в индуктивности в начальный момент после коммутации:

$$i_L(0_-) = i_L(0_+).$$

До коммутации в момент $t = 0_-$ напряжение на емкости $U_C(0_-) = \frac{E \cdot R_1}{R_1 + R_2}$. На емкости накоплена электрическая энергия

$$W_{\text{Э}}(0_-) = \frac{C \cdot U_C^2(0_-)}{2}. \text{ Электрическая энергия также не может}$$

изменяться мгновенно. Поэтому в электрической цепи с постоянной емкостью действует

Второй закон коммутации:

Напряжение на емкости до коммутации равно напряжению на емкости в начальный момент после коммутации:

$$U_C(0_-) = U_C(0_+).$$

Расчет переходных процессов основан на использовании первого и второго закона коммутации.

Переходные процессы в линейных электрических цепях

описываются линейными дифференциальными уравнениями. Для цепи, показанной на рис.3.1 систему дифференциальных уравнений составим по законам Кирхгофа:

$$i_1 = i_2 + i_3 \quad (3.1); \quad i_2 = \frac{u_C}{R_1} \quad (3.2); \quad i_3 = C \frac{du_C}{dt} \quad (3.3);$$

$$L \frac{di_1}{dt} + u_C = E \quad (3.4).$$

Используя уравнения (3.1)-(3.3), преобразуем (3.4) к виду:

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{L}{CR_1} \cdot \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = E \quad (3.5).$$

Получили линейное, однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Расчет переходных процессов в линейной электрической цепи можно выполнить несколькими методами.

Классический метод расчета переходных процессов

В классическом методе переходное напряжение или ток ищут как сумму свободной и принужденной составляющей. Принужденную составляющую находят расчетом послекоммутационной цепи в установившемся принужденном режиме, когда после коммутации прошло много времени. Свободную составляющую ищут как общее решение однородного дифференциального уравнения при нулевом внешнем воздействии в виде:

$$u_{Cсв}(t) = A_1 \cdot e^{p_1 t} + A_2 \cdot e^{p_2 t} + \dots \quad (3.6),$$

где p_1, p_2, \dots - корни характеристического уравнения, A_1, A_2, \dots - неизвестные постоянные интегрирования. Число корней характеристического уравнения и число неизвестных постоянных интегрирования равно порядку цепи, который определяется числом независимых накопительных реактивных элементов.

Для линейных цепей первого порядка характеристическое уравнение имеет один корень и свободная составляющая переходного процесса выражается одной экспоненциальной функцией из (3.6): $u_{Cсв}(t) = A_1 \cdot e^{p_1 t} \quad (3.7).$

Постоянной времени цепи первого порядка называют

$$\tau = \frac{1}{|p_1|}. \text{ При этом } u_{C_{св}}(t) = A_1 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

Для линейных цепей второго порядка, которым соответствуют дифференциальные уравнения вида (3.5), характеристическое уравнение имеет следующий вид:

$$Z(p) = p^2 + 2\delta p + \omega_0^2 = 0 \quad (3.8).$$

Если $\delta > \omega_0$, корни характеристического уравнения отрицательные и разные. Переходный процесс описывается двумя затухающими экспонентами и называется аperiodическим.

Если $\delta < \omega_0$, корни характеристического уравнения будут комплексно-сопряженными с отрицательной действительной частью. Переходный процесс имеет вид затухающих колебаний и называется колебательным.

Пример расчета переходного процесса классическим методом

Расчет переходного процесса для напряжения на емкости в разветвленной цепи (рис.3.1) выполнен классическим с использованием Mathcad.

Исходные данные

$$E := 120 \text{ В} \quad L := 10^{-2} \text{ Гн} \quad C := 68 \cdot 10^{-9} \text{ Ф}$$

$$R1 := 1000 \text{ Ом} \quad R2 := 1000 \text{ Ом}$$

1. Расчет режима до коммутации

$$I_{10} := \frac{E}{R1 + R2} \quad I_{10} = 0.06 \text{ А}$$

$$U_{C0} := (I_{10} \cdot R1) \quad U_{C0} = 60 \text{ В}$$

2. Расчет принужденного режима

$$I_{1P} := \frac{E}{R1} \quad I_{1P} = 0.12 \text{ А}$$

$$U_{CP} := I_{1P} \cdot R1 \quad U_{CP} = 120 \text{ В}$$

3. Характеристическое уравнение

Функция параллельного соединения

$$\text{parallel}(x, y) := \frac{x \cdot y}{x + y}$$

$$Z(p) := p \cdot L + \text{parallel}\left(R1, \frac{1}{p \cdot C}\right)$$

$$\begin{pmatrix} p1 \\ p2 \end{pmatrix} := Z(p) \left| \begin{array}{l} \text{solve, } p \\ \text{float, } 4 \end{array} \right. \rightarrow \begin{pmatrix} -7353. + 3.764 \cdot 10^4 \cdot i \\ -7353. - 3.764 \cdot 10^4 \cdot i \end{pmatrix}$$

Корни характеристического уравнения

$$p1 = -7.353 \times 10^3 + 3.764i \times 10^4 \quad \frac{1}{c}$$

$$p2 = -7.353 \times 10^3 - 3.764i \times 10^4 \quad \frac{1}{c}$$

Общий вид свободной составляющей напряжения на емкости

$$U_{св}(A1, A2, t) := A1 \cdot e^{p1 \cdot t} + A2 \cdot e^{p2 \cdot t}$$

4. Расчет постоянных интегрирования

Для момента $t=0+$ находим $UC0_{св}$ и $I30_{св}$.

$$UC0_{св} := UC0 - UCP \quad UC0_{св} = -60$$

$$I30_{св} := I10 - \frac{UC0}{R1} \quad I30_{св} = 0$$

Находим $A1, A2$

Given

$$A1 + A2 = UC0_{св}$$

$$p1 \cdot A1 + p2 \cdot A2 = I30_{св}$$

$$\begin{pmatrix} A1 \\ A2 \end{pmatrix} := \text{Find}(A1, A2) \text{ float}, 4 \rightarrow \begin{pmatrix} -30. + 5.861 \cdot i \\ -30. - 5.861 \cdot i \end{pmatrix}$$

Решение для полного напряжения на емкости

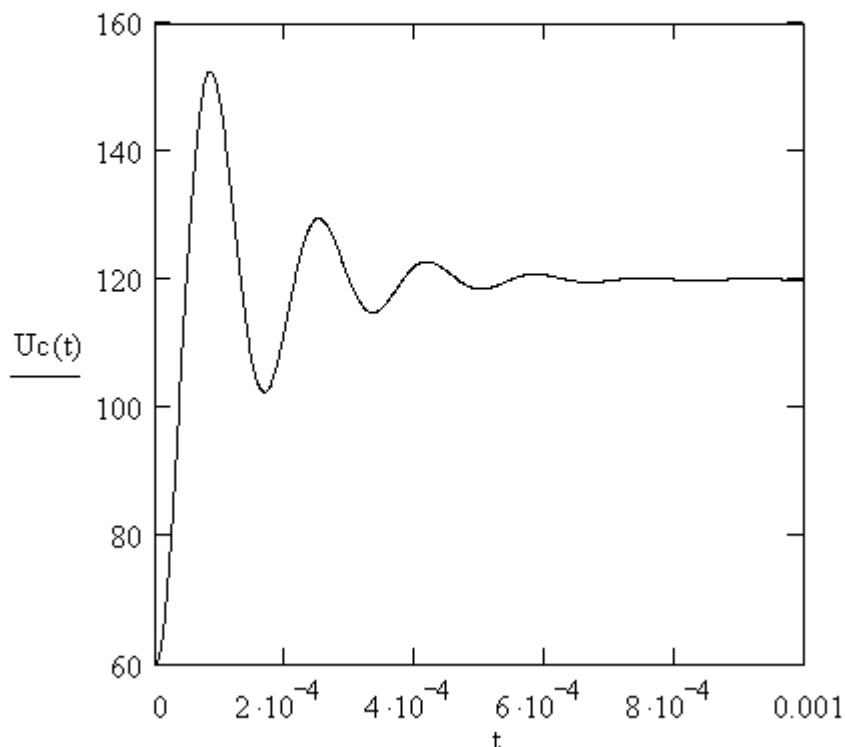
$$U_c(t) := U_{CP} + A1 \cdot e^{p1 \cdot t} + A2 \cdot e^{p2 \cdot t} \text{ complex} \rightarrow$$

$$120 - 60 \cdot \exp(-7353 \cdot t) \cdot \cos(3.764 \cdot 10^4 \cdot t) - 11.722 \cdot \exp(-7353 \cdot t) \cdot \sin(3.764 \cdot 10^4 \cdot t)$$

График полного напряжения на емкости

$$U_c(t) := U_{CP} + U_{св}(t)$$

$$t := 0, 10^{-6} .. 10^{-3}$$



Пример расчета переходного процесса операторным методом

Для расчета переходного процесса *операторным методом* составляем операторную схему замещения цепи после коммутации (рис.3.12), в которой:

1. Источник постоянного напряжения E заменен изображением $E(p) = \frac{E}{p}$;

2. Индуктивность с начальным током $i(0)$ заменяем операторным сопротивлением $Z_1(p) = pL$ и внутренним источником э.д.с. $L \cdot i(0)$, направленным согласно с током в индуктивности;

3. Емкость заменяем операторным сопротивлением $\frac{1}{pC}$ и внутренним источником э.д.с. $\frac{U_C(0)}{p}$, направленным встречно току в емкости;

4. Составляем операторные уравнения и определяем изображения искомых токов и напряжений;

5. Используя обратное преобразование Лапласа или теорему разложения, находим оригиналы искомых токов и напряжений.

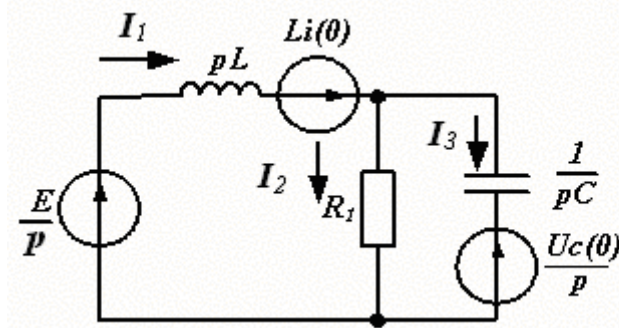


Рис.3.12. Операторная схема замещения цепи.

Исходные данные

$$E := 120 \text{ В} \quad L := 10^{-2} \text{ Гн} \quad C := 68 \cdot 10^{-9} \text{ Ф}$$

$$R1 := 1000 \text{ Ом} \quad R2 := 1000 \text{ Ом}$$

Начальные условия

$$I_{10} := \frac{E}{R1 + R2} \quad U_{C0} := I_{10} \cdot R1$$

Операторное уравнение по методу двух узлов

$$U_C(p) := \frac{\frac{E}{p} + L \cdot I_{10}}{p \cdot L} + \frac{U_{C0}}{p} \cdot p \cdot C$$

$$\frac{1}{p \cdot L} + \frac{1}{R1} + p \cdot C$$

$$U_C(t) := U_C(p) \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace}, p \\ \text{float}, 4 \end{array} \right. \rightarrow$$

$$120. - 60. \cdot \exp(-7353. \cdot t) \cdot \cos(3.764 \cdot 10^4 \cdot t) - 11.72 \cdot \exp(-7353. \cdot t) \cdot \sin(3.764 \cdot 10^4 \cdot t)$$

Обратное преобразование Лапласа выполняется оператором "invlaplace" из панели символических операторов.

Как видно, полученное операторным методом решение для полного напряжения на емкости совпадает с тем, которое было получено классическим методом. Операторный метод дает более компактное решение и удобен для расчета цепей высоких порядков, содержащих более 2 реактивных накопительных элементов.

Пример численного решения дифференциальных уравнений переходного процесса в Mathcad

В Mathcad имеются специальные программы для численного решения дифференциальных уравнений. Для их применения предварительно используют метод переменных состояния и составляют уравнения для первых производных токов в индуктивностях и напряжений на емкостях.

Для схемы рис.3.1 составим уравнения для напряжения на производных напряжения на емкости и тока в индуктивности в послекоммутационной схеме.

$$i_C = C \cdot \frac{du_C}{dt} = i_L - \frac{u_C}{R} \quad (3.9) \quad u_L = L \cdot \frac{di_L}{dt} = E - u_C \quad (3.10)$$

Преобразуем эти уравнения в уравнения переменных

СОСТОЯНИЯ:

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{u_C}{R_1 \cdot C} + \frac{i_L}{C} + 0 \cdot E = a_1 \cdot u_C + b_1 \cdot i_L + d_1 \cdot E \quad (3.11)$$

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{1}{L} \cdot u_C + 0 \cdot i_L + \frac{E}{L} = a_2 \cdot u_C + b_2 \cdot i_L + d_2 \cdot E \quad (3.12).$$

Решаем численно систему уравнений (3.11)-(3.12), используя вычислительный блок **Given....Odesolve**, предназначенный для решения дифференциальных уравнений в Mathcad.

Исходные данные

$$E := 120 \text{ В} \quad L := 10^{-2} \text{ Гн} \quad C := 68 \cdot 10^{-9} \text{ Ф}$$

$$R1 := 1000 \text{ Ом} \quad R2 := 1000 \text{ Ом}$$

Начальные условия

$$I10 := \frac{E}{R1 + R2} \quad UC0 := I10 \cdot R1$$

$$I10 = 0.06 \quad UC0 = 60$$

$$a1 := \frac{-1}{R1 \cdot C} \quad b1 := \frac{1}{C} \quad d1 := 0$$

$$a2 := \frac{-1}{L} \quad b2 := 0 \quad d2 := \frac{1}{L}$$

$$a1 = -1.471 \times 10^4 \quad b1 = 1.471 \times 10^7 \quad d1 = 0$$

$$a2 = -100 \quad b2 = 0 \quad d2 = 100$$

Задаем конец интервала интегрирования, начало, шаг

$$\text{end} := 10^{-3} \quad t := 0, 10^{-6} \dots \text{end}$$

$$t1 := 10^{-3}$$

Given

$$\frac{d}{dt}uc(t) = a1 \cdot uc(t) + b1 \cdot iL(t) + d1 \cdot E$$

$$\frac{d}{dt}iL(t) = a2 \cdot uc(t) + b2 \cdot iL(t) + d2 \cdot E$$

$$uc(0) = 60 \quad iL(0) = 0.06$$

РЕШЕНИЕ

$$\begin{pmatrix} uc \\ iL \end{pmatrix} := \text{Odesolve} \left[\begin{pmatrix} uc \\ iL \end{pmatrix}, t, t1, 1000 \right]$$

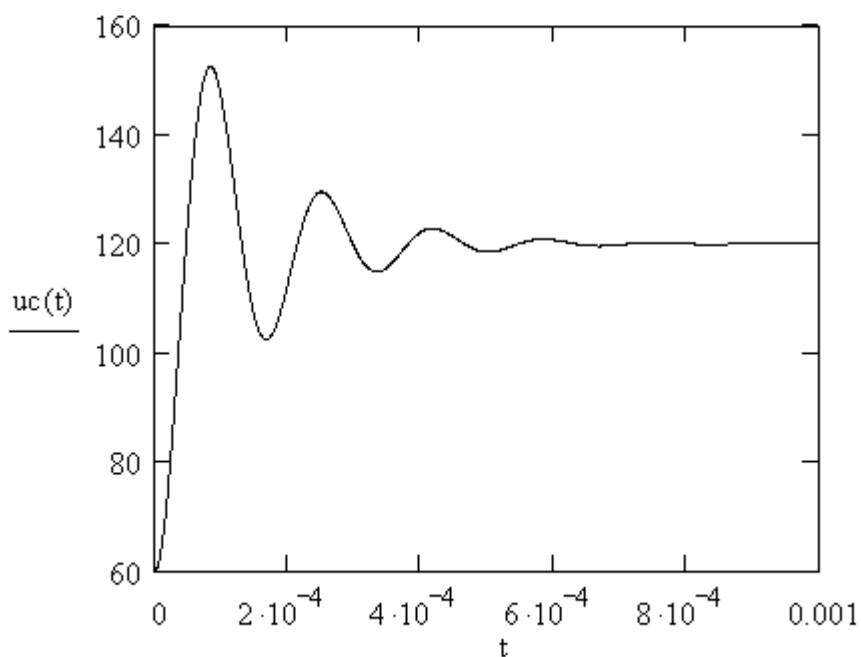


График переходного процесса соответствует полученным классическим и операторным методом.

Библиографический список

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. – М.: Гардарики, 1999. – 638 с.
2. Миленина С.А. Теоретические основы электротехники. Часть 1. Установившиеся режимы в линейных электрических цепях. - М.: МИРЭА, 2004 г.
3. Миленина С.А. Теоретические основы электротехники. Часть 2. Переходные процессы. - М.: МИРЭА, 2004 г.
4. Алехин В.А., Карташов В.М., Третьяков Г.Н. Переходные процессы в линейных электрических цепях. Сборник задач. – М.: МИРЭА, 1999.- 80с.
5. Алехин В.А., Цыганов В.И. Применение программ MATLAB 4.0, 6.5 и Micro-Cap 7.16 для расчета цепей постоянного и гармонического тока с сосредоточенными и распределенными параметрами. Методические указания по расчету контрольных и курсовых работ на компьютерах. – М.: МИРЭА, 2004. – 20 с.
6. Алехин В.А., Цыганов В.И. Расчет переходных процессов в электрических цепях с использованием программ MATLAB-4.0,6.5. Методические указания по расчету контрольных и курсовых работ на компьютерах. – М.: МИРЭА, 2004. – 24 с.
7. Макаров Е.Г. Инженерные расчеты в Mathcad. Учебный курс. – СПб.: Питер, 2003.- 448 с.
8. Дьяконов В.П. Mathcad 8-12 для студентов. –М.: СОЛОН-Пресс, 2005.-630 с.: ил.