

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
РАДИОТЕХНИКИ, ЭЛЕКТРОНИКИ И АВТОМАТИКИ
(МИРЭА)»

Подлежит возврату

№

**СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ
ЦЕПЕЙ**

Для студентов всех форм обучения

МОСКВА 2013

Автор: В.А. Алехин.

Редактор: В.Ю. Маслов

Материал предназначен для студентов специальностей 230101, 230105, 210301, 220201, 220401, 210105, 210108, 210104, изучающих дисциплины «Общая электротехника», «Теоретические основы электротехники», «Электротехника», «Электротехника, электроника и схемотехника».

Печатаются по решению редакционно-издательского совета Московского государственного технического университета радиотехники, электроники и автоматики (МИРЭА).

Рецензенты: Р.М. Закалюкин, В.Н. Цыпкин

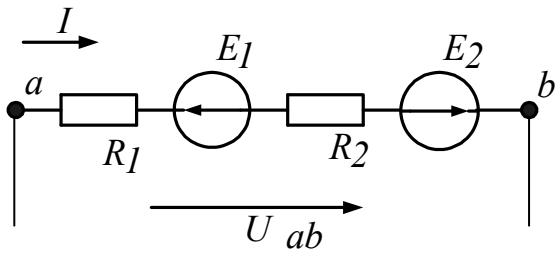
© Алехин В.А.

© Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики (МИРЭА), 2013

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ЭЛЕКТРОТЕХНИКЕ

Часть 1. Электрические цепи постоянного и гармонического тока

Задача 1



Дано:

$$E = 120 \text{ В}, L = 10 \text{ мГн}, C = 68 \text{ нФ},$$

$$E_1 = 6 \text{ В}, E_2 = 4 \text{ В},$$

$$R_1 = 3 \text{ Ом}, R_2 = 2 \text{ Ом}, U_{ab} = 12 \text{ В}$$

Найти ток I .

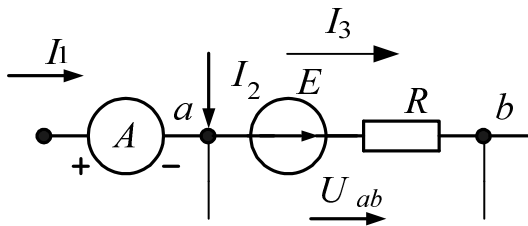
Решение

По обобщенному закону Ома:

$$I = \frac{U_{ab} - E_1 + E_2}{R_1 + R_2} = \frac{12 - 6 + 4}{3 + 2} = 2 \text{ А}.$$

Пояснение: U_{ab} и E_2 совпадают по направлению с током I и взяты со знаком плюс.

Задача 2



Дано:

$$E = 9 \text{ В}, I_2 = 2 \text{ А},$$

$$U_{ab} = 3 \text{ В}, R = 4 \text{ Ом}$$

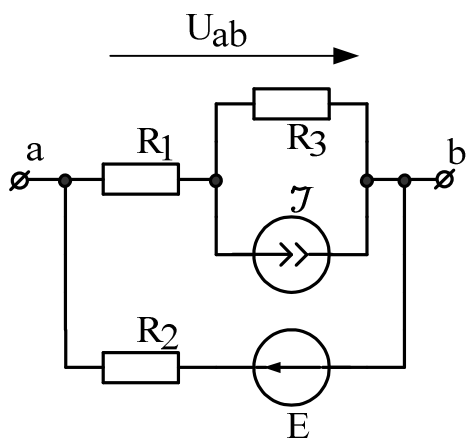
Найти показания амперметра.

Решение

$$I_3 = \frac{U_{ab} + E}{R} = 3 \text{ А}; I_1 = I_3 - I_2 = 1 \text{ А}.$$

Ответ: 1 А

Задача 3



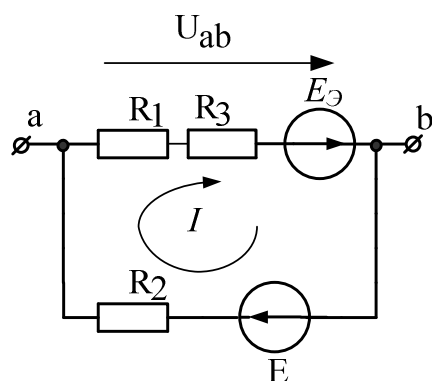
Дано: $J=1\text{A}$, $E=12\text{В}$,
 $R_1=R_2=4\text{ Ом}$, $R_3=8\text{ Ом}$.

Найти U_{ab} .

Решение

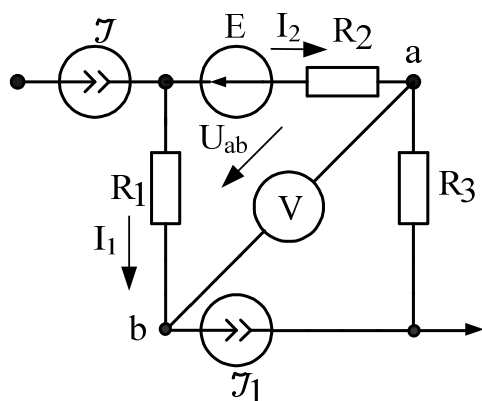
Преобразуем источник тока с параллельно включенным сопротивлением R_3 в эквивалентный источник напряжения $E_{\mathcal{E}}=JR_3=8\text{В}$ с последовательным сопротивлением R_3 . Получим одноконтурную цепь.

В этой цепи:



$$U_{ab} = -E_{\mathcal{E}} + I \cdot (R_1 + R_3) = -E_{\mathcal{E}} + \frac{E + E_{\mathcal{E}}}{R_1 + R_2 + R_3} \cdot (R_1 + R_3) = 2\text{В}$$

Задача 4



Дано: $J=2\text{А}$, $J_1=1\text{А}$, $E=10\text{В}$,
 $R_1=2\text{ Ом}$, $R_2=4\text{ Ом}$, $R_3=2\text{ Ом}$.

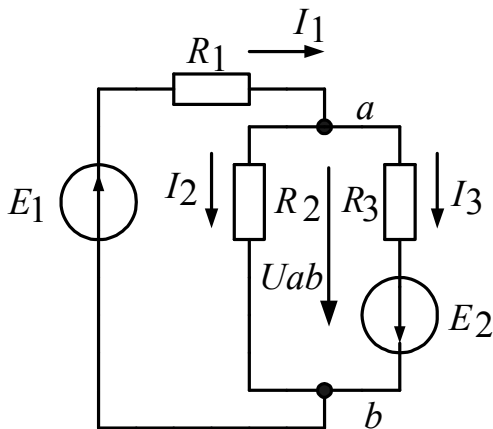
Найти показания вольтметра.

Решение

Внутреннее сопротивление идеального вольтметра бесконечно велико. Поэтому ток через вольтметр не проходит и $I_1=J_1=1\text{A}$, $I_2=J-I_1=1\text{A}$. Считаем потенциал узла b равным нулю. Обходим ветви 1 и 2 в направлении узла a и находим:

$$U_{ab} = I_1 R_1 - E - I_2 R_2 = -12\text{B}.$$

Задача 5



Дано: $R_1=5\text{ Ом}$, $R_2=3\text{ Ом}$,
 $R_3=4\text{ Ом}$, $I_3=1\text{A}$, $E_2=1\text{B}$.

Найти E_1 .

Решение

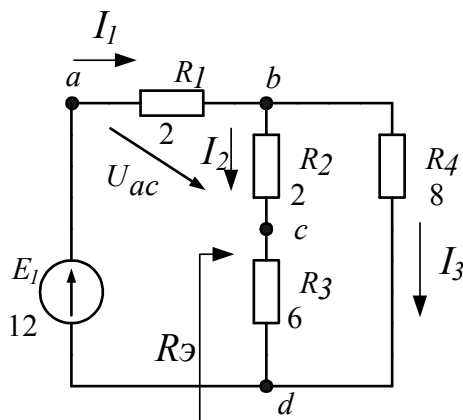
Так как заданы ток I_3 и E_2 , можно найти

$$U_{ab} = -E_2 + I_3 R_3. \quad \text{Затем находим} \quad I_2 = \frac{U_{ab}}{R_2} = 1\text{A},$$

$$I_1 = I_2 + I_3 = 2\text{A}, \quad E_1 = U_{ab} + I_1 R_1 = 13\text{B}.$$

План решения: $U_{ab} \rightarrow I_2 \rightarrow I_1 \rightarrow E_1$

Задача 6



Дано:
 $E=12\text{B}$, $R_1=R_2=2\text{ Ом}$, $R_3=6\text{ Ом}$,
 $R_4=8\text{ Ом}$.

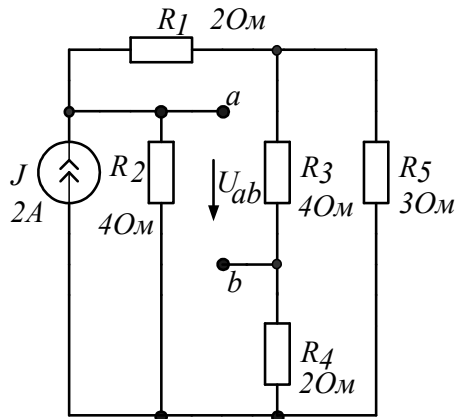
Найти U_{ac} .

План решения: $R_{\text{э}} \rightarrow R_{\text{вх}} \rightarrow I_1 \rightarrow U_{bd} \rightarrow I_2 \rightarrow U_{ac}$

Ответ: 6В

Задача 7.

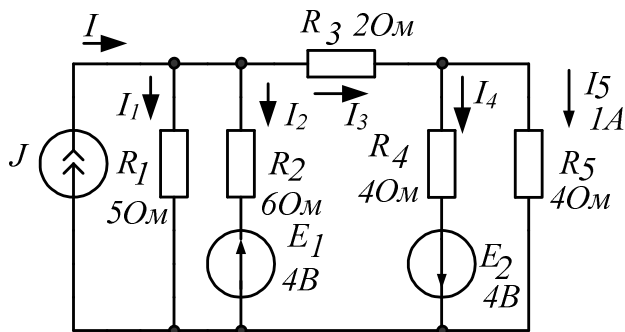
Найти U_{ab} .



План решения: ????

Ответ: $U_{ab} = 3\frac{1}{3} \text{ В}$.

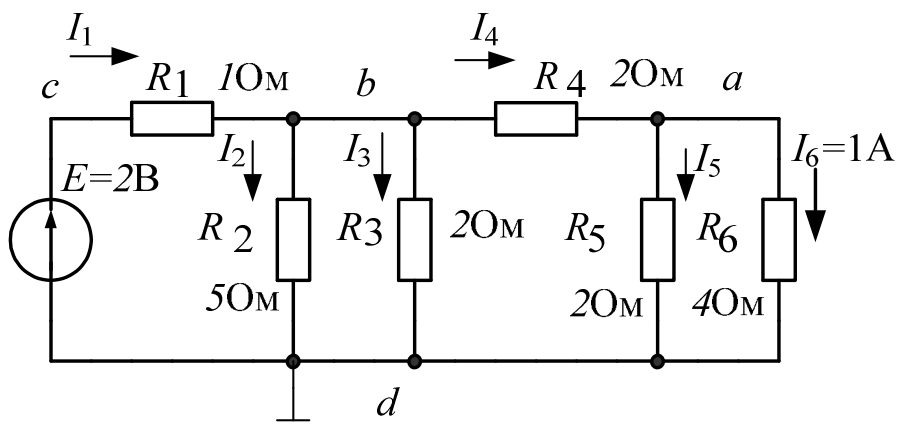
Задача 8



Найти J

Ответ: 6 А

Задача 9

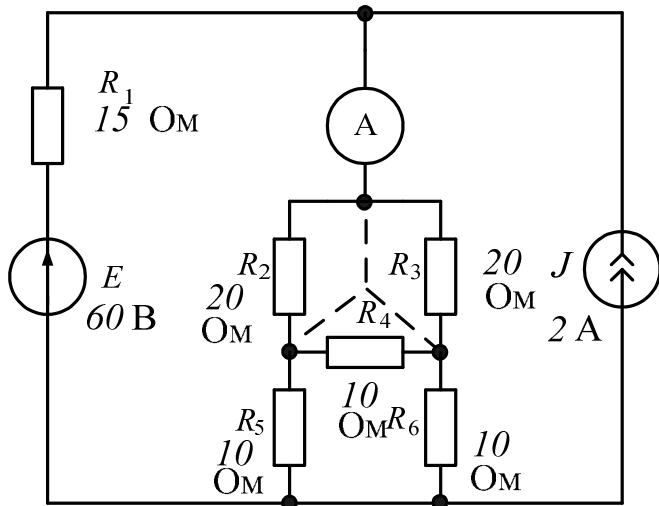


Найти токи в ветвях.

Решение методом подобия

В схеме действует только один источник напряжения. Задаем в самой удаленной ветви произвольно ток $I_6 = 1A$. Находим: $U_a = 4V, I_5 = 2A, I_4 = 3A, U_b = 10V, I_3 = 5A, I_2 = 2A, I_1 = 10A, E = 20V$. Так как в заданной схеме $E = 2V$ искомые токи будут в 10 раз меньше (коэффициент подобия $k = 0,1$).

Задача 10

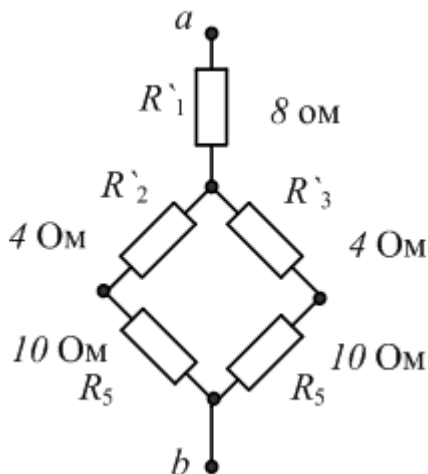


Найти показания амперметра.

Решение

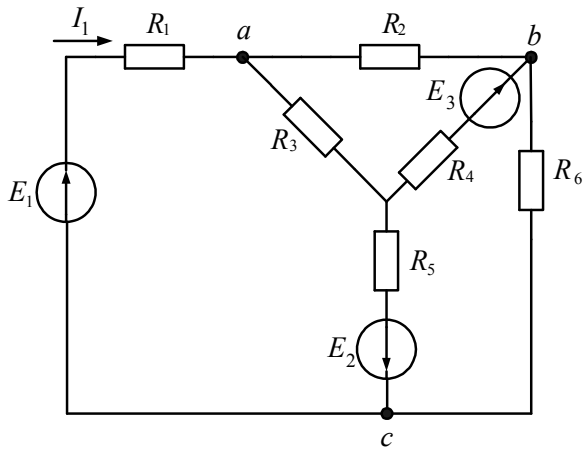
Преобразуем сопротивления треугольника $R_2R_3R_4$ в звезду:

$$R'_1 = \frac{R_2R_3}{R_2 + R_3 + R_4} = 8 \text{ Ом}, R'_2 = \frac{R_2R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = 4 \text{ Ом}, R'_3 = \frac{R_3R_4}{R_2 + R_3 + R_4} = 4 \text{ Ом}.$$



Находим $R_{abэкв} = 15 \text{ Ом}$. Далее по теореме наложения находим $I_A = 3 \text{ А}$.

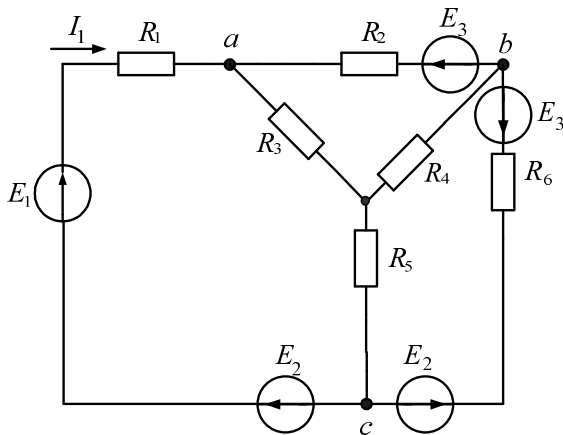
Задача 11



Дано: $E_1=10$ В, $E_2=10$ В, $E_3=5$ В,
 $R_1=R_2=R_3=10$ Ом, $R_4=2,5$ Ом,
 $R_5=R_6=30$ Ом.

Найти ток I_1 , преобразовав
схему к одноконтурной.

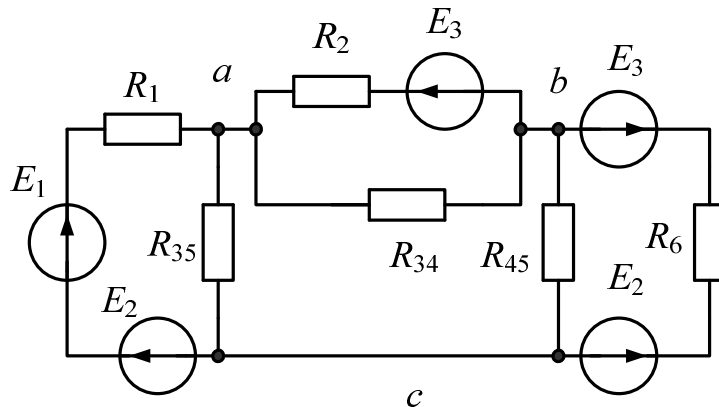
Решение



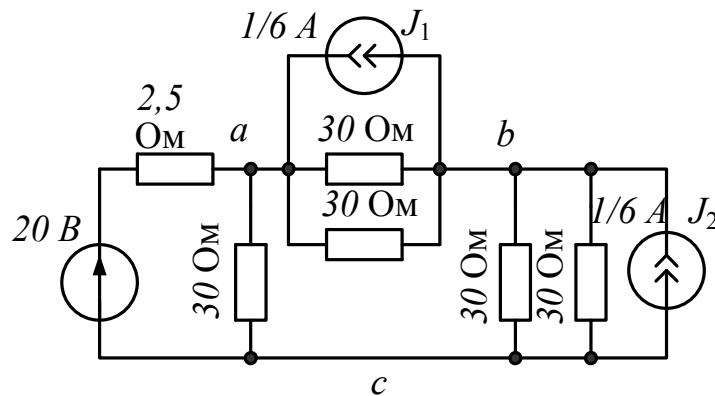
1. Для упрощения схемы перенесем источники напряжения через узлы b и c .
2. Преобразуем звезду в треугольник. Так как сопротивления лучей звезды равны, получим:

$$G_{34} = \frac{G_3 G_4}{G_3 + G_4 + G_5} = \frac{0,1 \cdot 0,1}{0,1 + 0,1 + 0,1} = \frac{1}{30} = G_{35} = G_{45}.$$

$$R_{34} = R_{35} = R_{45} = 30 \text{ Ом}.$$

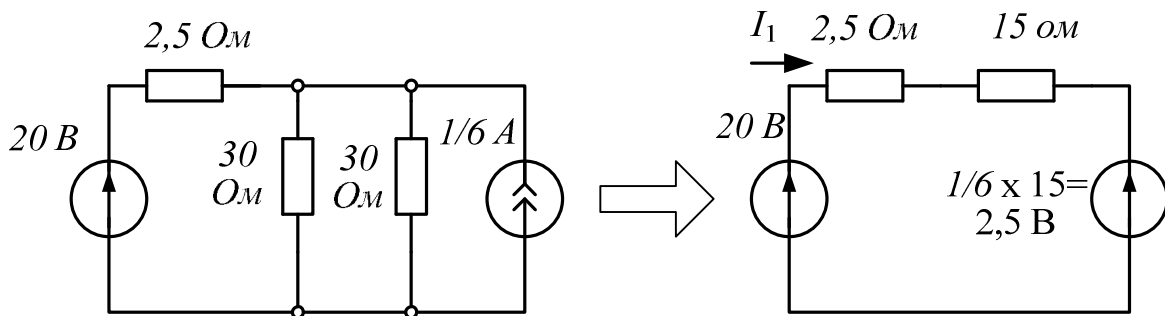


3. Объединим ИН и преобразуем источники напряжения в источники тока: $J_1 = \frac{E_3}{R_2} = 1/6 \text{ А}$, $J_2 = \frac{E_2 - E_3}{R_6} = 1/6 \text{ А}$. Внутренние сопротивления источников тока: $R_{\text{ит1}} = R_{\text{ит2}} = 30 \text{ Ом}$.



4. Заменяем последовательно включенные источники тока эквивалентным.

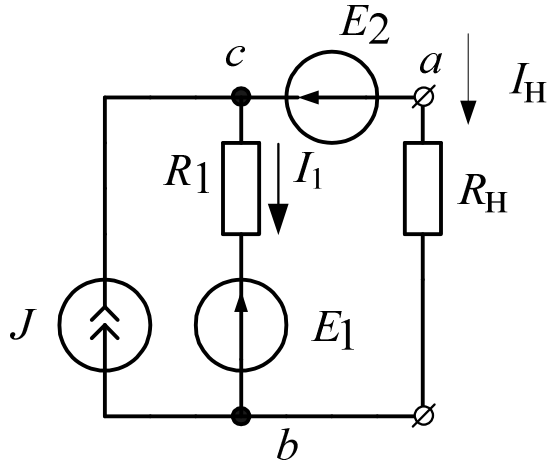
$$J_{\text{Э}} = \frac{\sum_k J_k R_k}{\sum_k R_k} = \frac{1/6 \cdot 15 + 1/6 \cdot 15}{15 + 15} = \frac{1}{6} \text{ А}; \quad R_{\text{Э}} = \sum_k R_k = 30 \text{ Ом}.$$



5. Заменяем $J_{\text{Э}}$ на источник напряжения. Получаем одноконтурную схему. В ней ток $I_1 = \frac{20 - 2,5}{2,5 + 15} = 1 \text{ А}$.

Метод эквивалентного генератора

Задача 12



Дано: $J=1\text{A}$, $R_1=6\text{Ом}$, $R_H=2\text{Ом}$,
 $E_1=4\text{В}$, $E_2=2\text{В}$.

Найти I_H и P_H .

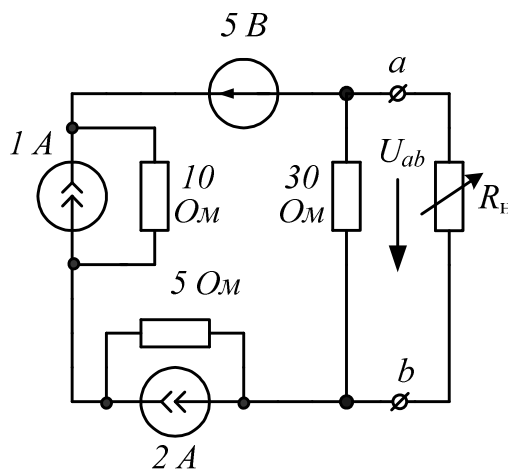
Решение:

$$U_{cbxx} = E_1 + JR_1 = 10 \text{ В}. U_{abxx} = U_{cbxx} - E_2 = 8 \text{ В}. R_{\text{ex}} = R_1 = 6 \text{ Ом}.$$

$$I_H = \frac{U_{abxx}}{R_{\text{ex}} + R_H} = 1 \text{ А}.$$

Задача 13

При какой нагрузке в ней выделяется наибольшая мощность? Найти эту мощность.



Решение

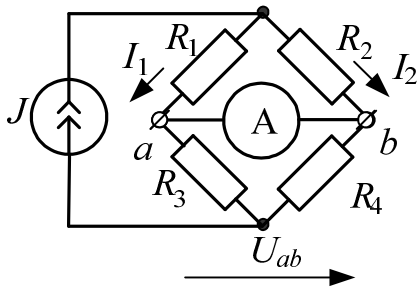
1. Заменяем источники тока на источники напряжения и находим

$$U_{abxx} = \frac{(2 \cdot 5 + 1 \cdot 10 - 5)}{5 + 10 + 30} \cdot 30 = 10 \text{ В}. R_{\text{вх}} = \frac{15 \cdot 30}{45} = 10 \text{ Ом}. R_{\text{н}} = 10 \text{ Ом}.$$

Максимальная мощность в нагрузке:

$$P_{\text{н max}} = \frac{U_{abxx}^2}{4R_{\text{вх}}} = \frac{100}{40} = 2,5 \text{ Вт}$$

Задача 14



Дано: $J=4\text{А}$, $R_1=R_4=2\text{Ом}$, $R_2=R_3=4\text{Ом}$.

Найти показания амперметра.

Решение

Отключим амперметр и найдем U_{abxx} . Так как токи $I_1 = I_2 = 2\text{А}$.

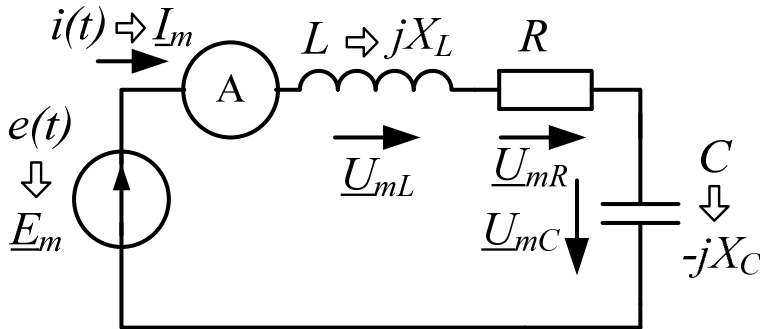
$$U_{abxx} = I_1 R_3 - I_1 R_4 = 8 - 4 = 4 \text{ В}. R_{\text{вх}} = \frac{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} = 3 \text{ Ом}.$$

$$I_A = \frac{U_{abxx}}{R_{\text{вх}}} = \frac{4}{3} \text{ А}.$$

Ответ: $4/3\text{А}$.

Расчет цепей гармонического тока

Задача №15



Дано:

$$e(t) = 30\sqrt{2} \sin(10^3 t + 90^\circ) \text{ В},$$

$$L = 40 \text{ мГн}, C = 100 \text{ мкФ}, R = 30 \text{ Ом}$$

Найти показания амперметра и построить векторную диаграмму тока и напряжений.

Решение

1. Находим комплексную амплитуду источника напряжения и комплексные сопротивления:

$$\underline{E}_m = 30\sqrt{2}e^{j90^\circ} = j30\sqrt{2} \text{ В}.$$

$$jX_L = j\omega L = j10^3 \cdot 40 \cdot 10^{-3} = j40 \text{ Ом}, \quad -jX_C = -j\frac{1}{\omega C} = -j\frac{1}{10^3 \cdot 100 \cdot 10^{-6}} = -j10 \text{ Ом}.$$

$$\underline{Z} = R + jX_L - jX_C = 30 + j40 - j10 = 30 + j30 \text{ Ом}.$$

2. Находим комплексную амплитуду тока.

$$\underline{I}_m = \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}} = \frac{j30\sqrt{2}}{30 + j30} = \frac{30\sqrt{2}e^{j90^\circ}}{30\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = 1 \cdot e^{j45^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ А}.$$

3. Находим мгновенное значение тока:

$$i(t) = 1 \sin(10^3 t + 45^\circ) \text{ А}.$$

4. Амплитуда тока $I_m = 1 \text{ А}$. Амперметр показывает дей-

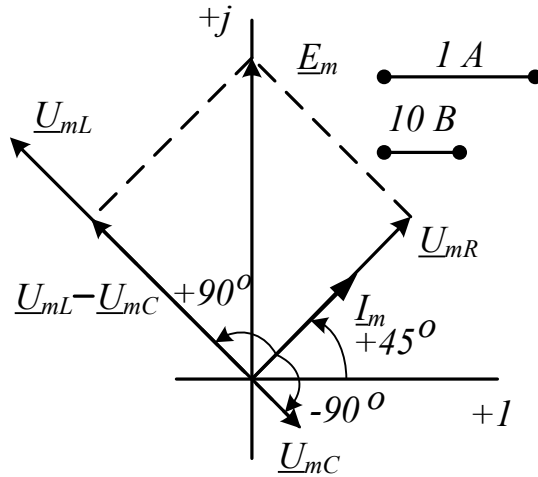
ствующее значение тока: $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707 \text{ А}.$

5. Рассчитываем комплексные амплитуды напряжений на элементах цепи:

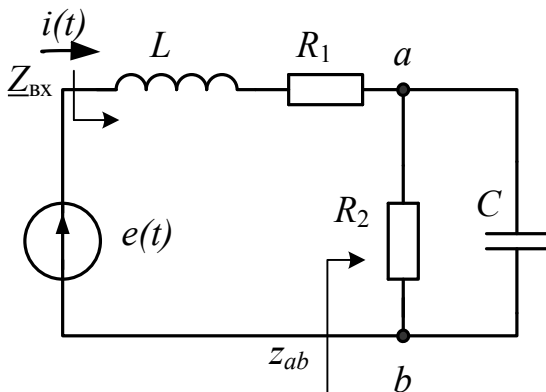
$$\underline{U}_{mR} = R\underline{I}_m = 30e^{j45^\circ} \text{ В}, \quad \underline{U}_{mL} = j40 \cdot 1 \cdot e^{j45^\circ} = 40e^{j135^\circ} \text{ В},$$

$$\underline{U}_{mC} = -j10 \cdot 1 \cdot e^{j45^\circ} = 10e^{-j45^\circ} \text{ В.}$$

6. Строим векторную диаграмму:



Задача № 16



Дано:

$$e(t) = 10 \sin(10^3 t + 60^\circ) \text{ В,}$$

$$L = 1 \text{ мГн, } C = 500 \text{ мкФ,}$$

$$R_1 = 1 \text{ Ом, } R_2 = 2 \text{ Ом.}$$

Найти ток в цепи.

Решение

1. Находим комплексную амплитуду напряжения и комплексные сопротивления:

$$\underline{E}_m = 10e^{j60^\circ} \text{ В, } jX_L = j10^3 \cdot 1 \cdot 10^{-3} = j1 \text{ Ом,}$$

$$-jX_C = -j \frac{1}{\omega C} = -j \frac{1}{1000 \cdot 500 \cdot 10^{-6}} = -j2 \text{ Ом,}$$

$$R_1 = 1 \text{ Ом, } R_2 = 2 \text{ Ом.}$$

2. Находим эквивалентное сопротивление $\underline{Z}_{вх}$ и ток:

$$\underline{Z}_{вх} = jX_L + R_1 + \frac{R_2(-jX_C)}{R_2 - jX_C} = j1 + 1 + \frac{2 \cdot (-j2)}{2 - j2} =$$

$$= 1 + j1 + \frac{-j4 \cdot (2 + j2)}{(2 - j2)(2 + j2)} = 1 + j1 + \frac{-j4 \cdot (2 + j2)}{4 + 4} = 1 + j1 - j + 1 = 2 \text{ Ом}$$

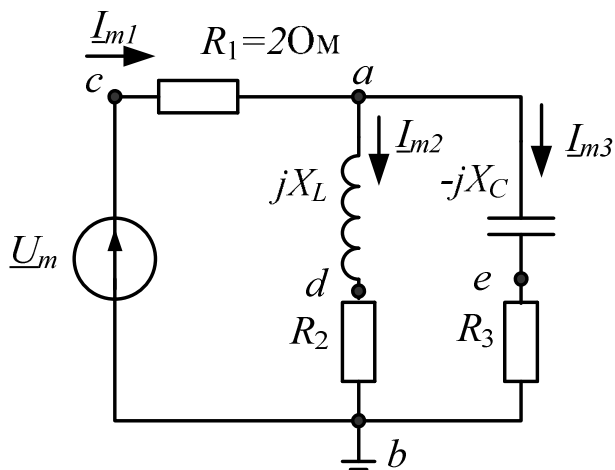
$$\underline{I}_m = \frac{\underline{E}_m}{\underline{Z}_{ex}} = \frac{10e^{j60^\circ}}{2} = 5e^{j60^\circ} \text{ A.}$$

$$i(t) = 5 \sin(10^3 t + 60^\circ) \text{ A.}$$

Амперметр покажет действующее значение

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = 3,54 \text{ A.}$$

Задача №17



Дано: $\underline{U}_m = 12e^{j45^\circ} \text{ B}$,
 $jX_L = j4 \text{ Ом}$, $-jX_C = -j4 \text{ Ом}$,
 $R_1 = 2 \text{ Ом}$, $R_2 = 4 \text{ Ом}$,
 $R_3 = 4 \text{ Ом}$.

Найти токи в ветвях и построить векторную топографическую диаграмму.

Решение

1. Комплексные сопротивления: $\underline{Z}_1 = 2 \text{ Ом}$, $\underline{Z}_2 = 4 + j4 \text{ Ом}$,
 $\underline{Z}_3 = 4 - j4 \text{ Ом}$.

$$\underline{Z}_{ab} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{(4 + j4)(4 - j4)}{(4 + j4) + (4 - j4)} = \frac{16 + 16}{8} = 4 \text{ Ом.}$$

$$\underline{Z}_{ex} = R_1 + \underline{Z}_{ab} = 2 + 4 = 6 \text{ Ом.}$$

2. Находим токи в ветвях:

$$\underline{I}_{m1} = \frac{\underline{U}_m}{\underline{Z}_{ex}} = \frac{12e^{j45^\circ}}{6} = 2e^{j45^\circ} \text{ A.}$$

По правилу деления токов:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{m2} &= \frac{\underline{I}_{m1}(4-j4)}{(4+j4)+(4-j4)} = \frac{2e^{j45^\circ}(4-j4)}{(4+j4)+(4-j4)} = \\ &= (1-j1)e^{j45^\circ} = \sqrt{2}e^{-j45^\circ}e^{j45^\circ} = \sqrt{2}A. \\ \underline{I}_{m3} &= \frac{\underline{I}_{m1}(4+j4)}{(4+j4)+(4-j4)} = \sqrt{2}e^{j90^\circ}A. \end{aligned}$$

3. Находим комплексные напряжения в точках схемы:

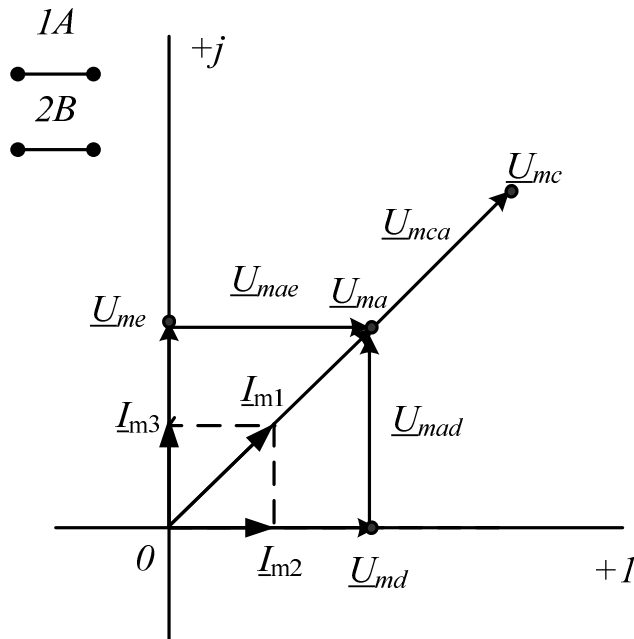
$$\underline{U}_{mb} = 0, \underline{U}_{ma} = \underline{I}_{m2}Z_2 = \sqrt{2}(4+j4) = \sqrt{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j45^\circ} = 8e^{j45^\circ} B,$$

$$\underline{U}_{md} = \underline{I}_{m2}R_2 = \sqrt{2} \cdot 4 = 4\sqrt{2} B,$$

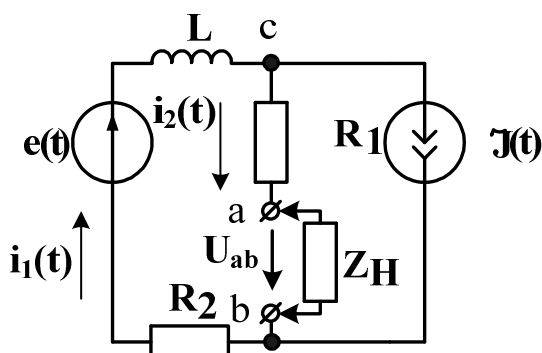
$$\underline{U}_{me} = \underline{I}_{m3}R_3 = \sqrt{2} \cdot 4 \cdot e^{j90^\circ} = j4\sqrt{2} B,$$

$$\underline{U}_{mc} = \underline{U}_{ma} + \underline{U}_{mca} = 8e^{j45^\circ} + 4e^{j45^\circ} = 12e^{j45^\circ} B.$$

4. Строим топографическую диаграмму.



Задача №18



Дано: $e(t) = 8\sin 100t$ В,

$J(t) = 4\cos 100t$ А, $R_1 = R_2 = 4$ Ом,

$L = 40$ мГн.

При каком значении Z_H в нем выделяется наибольшая активная

мощность. Рассчитать в этом режиме токи в цепи, проверить баланс мощностей.

Решение.

Преобразуем источник тока к функции синуса. $J(t) = 4 \cos 100t = 4 \sin(100t + 90^\circ) A$. Вычисляем комплексные амплитуды источника напряжения и источника тока: $\underline{E} = 8 V$, $\underline{J} = 4e^{j90^\circ} A$. Вычисляем комплексное сопротивление индуктивности $jX_L = j100 \cdot 40 \cdot 10^{-3} = j4 \text{ Ом}$.

Исключим сопротивление нагрузки. Получим одноконтурную цепь, в которой действует ток с комплексной амплитудой $\underline{I}_{m1} = \underline{J}_m = 4e^{j90^\circ} A$. Найдем напряжение холостого хода:

$$\underline{U}_{mabxx} = -\underline{I}_{m1} \cdot R_2 + \underline{E} - jX_L \cdot \underline{I}_{m1} = -j4 \cdot 4 + 8 - j4 \cdot j4 = 24 - j16 V$$

Найдем входное сопротивление эквивалентного генератора:

$\underline{Z}_{exab} = R_1 + R_2 + jX_L = 8 + j4 \text{ Ом}$. Для согласования с генератором $\underline{Z}_H = \underline{Z}_{exab}^* = 8 - j4 \text{ Ом}$.

В схеме эквивалентного генератора

$$\underline{I}_{m2} = \frac{\underline{U}_{mabxx}}{\underline{Z}_H + \underline{Z}_{exab}} = \frac{24 - j16}{16} = 1,5 - j A,$$

$$\underline{I}_{m1} = \underline{I}_{m2} + \underline{J}_m = 1,5 + j3 A.$$

Выполним расчет баланса мощности. Комплексная мощность источников энергии:

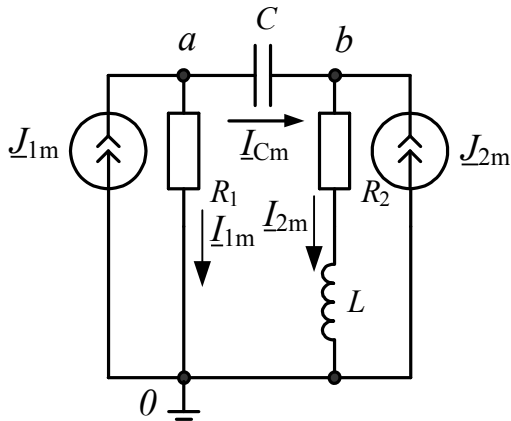
$$\begin{aligned} \tilde{S}_{ист} &= \tilde{S}_E + \tilde{S}_J = \frac{\underline{E}_m \cdot \underline{I}_{m1}^*}{2} + \frac{\underline{U}_{mbc} \cdot \underline{J}_m^*}{2} = \\ &= \frac{8 \cdot (1,5 - j3)}{2} + \frac{-\underline{I}_{m2} \cdot (R_1 + \underline{Z}_H) \cdot \underline{J}_m^*}{2} = \\ &= 6 - j12 + \frac{(j - 1,5) \cdot (12 - j4) \cdot (-j4)}{2} = 42 + j16 \text{ ВА} \end{aligned}$$

Мощность потребителей:

$$P_{\text{номр}} = \frac{I_{1m}^2 R_2}{2} + \frac{I_{2m}^2 (R_1 + R_H)}{2} = \frac{11,25 \cdot 4}{2} + \frac{3,25 \cdot 12}{2} = 22,5 + 19,5 = 42 \text{ Вт}$$

$$Q_{\text{номр}} = \frac{I_{1m}^2 (jX_L)}{2} + \frac{I_{2m}^2 (-4j)}{2} = j22,5 - j6,5 = j16 \text{ Вар}$$

Задача №19



Дано:

$$J_1(t) = 8 \sin 100t \text{ А}, J_2(t) = 4 \cos 100t \text{ А.}$$

$$R_1 = R_2 = 4 \text{ Ом}, L = 40 \text{ мГн},$$

$$C = 2500 \text{ мкФ.}$$

Найти токи.

Решение

1. Находим комплексные амплитуды источников тока и комплексные сопротивления.

$$\underline{J}_{1m} = 8 \text{ А}, \underline{J}_{2m} = 4j \text{ А}, \underline{Z}_C = -j \frac{1}{\omega C} = -j \frac{1}{100 \cdot 2500 \cdot 10^{-6}} = -j4 \text{ Ом.}$$

$$\underline{Z}_L = j\omega L = j100 \cdot 40 \cdot 10^{-3} = j4 \text{ Ом.}$$

2. Найдем ток I_{Cm} методом эквивалентного генератора. Отключаем C .

Находим:

$$\underline{U}_{mao} = \underline{J}_{1m} R_1 = 8 \cdot 4 = 32 \text{ Ом. } \underline{U}_{mbo} = \underline{J}_{2m} (R_2 + j\omega L) = j4(4 + j4) = -16 + j16 \text{ В}$$

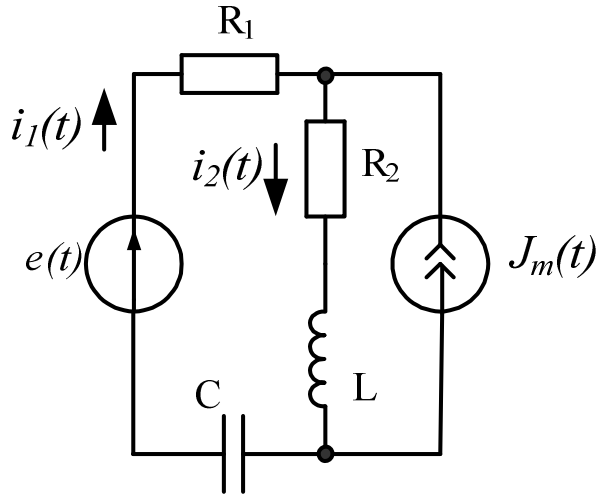
$$\underline{U}_{mabxx} = \underline{U}_{mao} - \underline{U}_{mbo} = 32 - (-16 + j16) = 48 - j16 \text{ В.}$$

Входное сопротивление $\underline{Z}_{abxx} = R_1 + R_2 + j\omega L = 8 + j4 \text{ Ом.}$

$$\underline{I}_{Cm} = \frac{\underline{U}_{mabxx}}{\underline{Z}_{abxx} - j \frac{1}{\omega C}} = \frac{48 - j16}{8 + j4 - j4} = 6 - j2 \text{ А.}$$

$$\underline{I}_{1m} = \underline{J}_{1m} - \underline{I}_{Cm} = 2 + j2 \text{ A}, \underline{I}_{2m} = \underline{J}_{2m} + \underline{I}_{Cm} = j4 + 6 - j2 = 6 + j2 \text{ A}.$$

Задача №20



Дано: $e(t) = 4 \sin 100t \text{ В}$,
 $J(t) = 2 \cos 100t \text{ А}$,

$$R_1 = R_2 = 2 \text{ Ом}, L = 20 \text{ мГн},$$

$$C = 5000 \text{ мкФ}.$$

Найти токи.

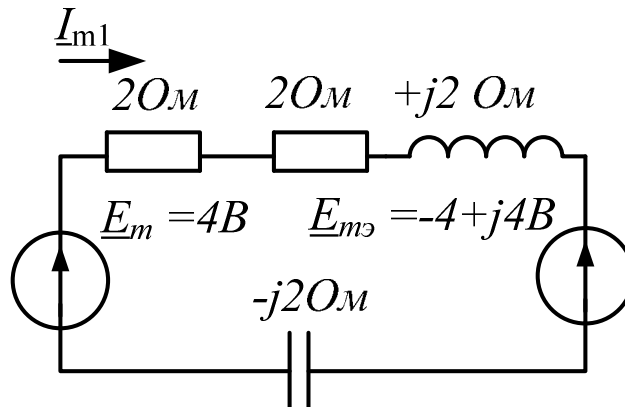
Решение.

1. Переходим к комплексным амплитудам и комплексным сопротивлениям:

$$\underline{E}_m = 4 \text{ В}, \underline{J}_m = 2e^{j90^\circ} \text{ А}, X_L = 2 \text{ Ом}, X_C = 2 \text{ Ом}.$$

2. Преобразуем источник тока в источник напряжения:

$$\underline{E}_{mэ} = \underline{J}_m (2 + j2) = 2j(2 + j2) = (-4 + j4) \text{ В}.$$



Находим токи:

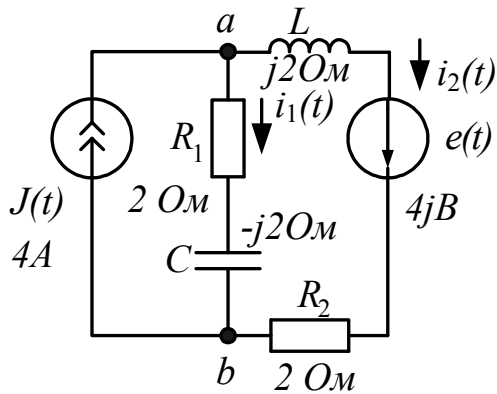
$$\underline{I}_{m1} = \frac{\underline{E}_m - \underline{E}_{mэ}}{2 + 2 + j2 - j2} = \frac{8 - j4}{4} = 2 - j1 \text{ А}.$$

$$\underline{I}_{m2} = \underline{I}_{m1} + \underline{J}_m = 2 - j1 + j2 = 2 + j1 \text{ А}.$$

3. Мгновенные значения токов:

$$i_1(t) = \sqrt{5} \sin(100t - 26^\circ) \text{ А}, i_2(t) = \sqrt{5} \sin(100t + 26^\circ) \text{ А}.$$

Задача №21



Дано:

$$J(t) = 4 \sin 1000t \text{ A},$$

$$e(t) = 4 \cos 1000t \text{ B.}$$

$$L = 2 \text{ мГн}, C = 500 \text{ мкФ},$$

$$R_1 = R_2 = 2 \text{ Ом.}$$

Решение методом двух узлов в

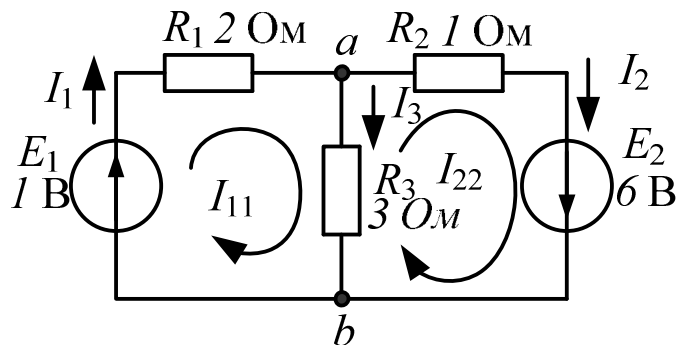
Mathcad:

$$i := \sqrt{-1}$$

$$U_{ab} := \frac{4 - \frac{i \cdot 4}{2 + i \cdot 2}}{\left(\frac{1}{2 - i \cdot 2} + \frac{1}{2 + i \cdot 2} \right)} = 6 - 2i \quad \hat{\text{A}}$$

$$I_1 := \frac{(6 - 2i)}{2 - 2 \cdot i} \quad I_1 = 2 + i \quad \hat{\text{A}} \quad I_2 := 4 - I_1 = 2 - i \quad \hat{\text{A}}$$

Метод контурных токов



Дано: $E_1=1\text{В}$, $E_2=6\text{В}$, $R_1=2\text{Ом}$, $R_2=1\text{Ом}$, $R_3=3\text{ Ом}$.

Найти токи в цепи.

Составляем уравнения по МКТ:

$$\begin{cases} (R_1 + R_3)I_{11} - R_3I_{22} = E_1 \\ -R_3I_{11} + (R_2 + R_3)I_{22} = E_2 \end{cases}; \quad \begin{cases} 5I_{11} - 3I_{22} = 1 \\ -3I_{11} + 4I_{22} = 6 \end{cases}$$

Решаем систему по правилу Крамера:

$$I_{11} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{4+18}{20-9} = \frac{22}{11} = 2 \text{ A}; \quad I_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{30+3}{20-9} = \frac{33}{11} = 3 \text{ A}$$

$$I_1 = I_{11} = 2 \text{ A}; \quad I_2 = I_{22} = 3 \text{ A}; \quad I_3 = I_{11} - I_{22} = -1 \text{ A}.$$

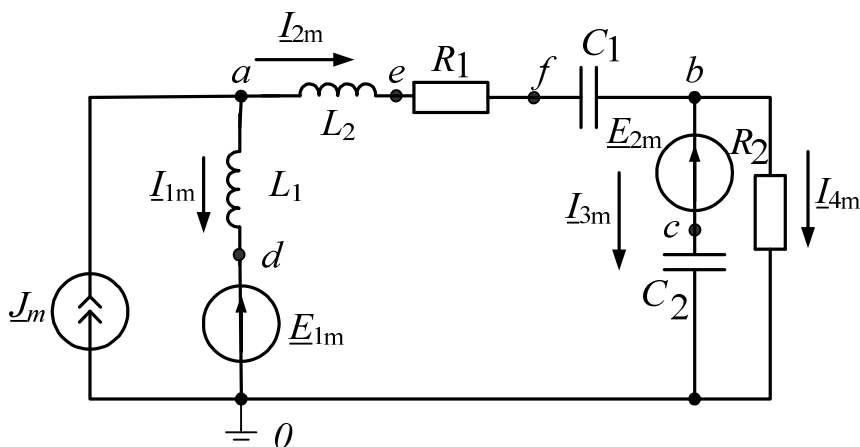
Решение по методу двух узлов

$$U_{ab} = \frac{\frac{E_1}{R_1} - \frac{E_2}{R_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}} = \frac{\frac{1}{2} - 6}{\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{3}} = \frac{-\frac{11}{2}}{\frac{11}{6}} = -3 \text{ В}.$$

Находим токи:

$$I_1 = \frac{-U_{ab} + E_1}{R_1} = \frac{3+1}{2} = 2 \text{ A}, \quad I_2 = \frac{U_{ab} + E_2}{R_2} = \frac{-3+6}{1} = 3 \text{ A}, \quad I_3 = \frac{U_{ab}}{R_3} = \frac{-3}{3} = -1 \text{ A}.$$

Задача №22



Дано:

$$\begin{aligned} e_1(t) &= 10 \sin \omega t \text{ В}, \quad e_2(t) = 10 \sin(\omega t - 90^\circ) \text{ В}, \\ J_1(t) &= 1 \sin \omega t \text{ А}, \quad X_{L1} = 20 \text{ Ом}, \quad X_{L2} = 20 \text{ Ом}, \\ X_{C1} &= 30 \text{ Ом}, \quad X_{C2} = 10 \text{ Ом}, \quad R_1 = 10 \text{ Ом}, \quad R_2 = 5 \text{ Ом} \end{aligned}$$

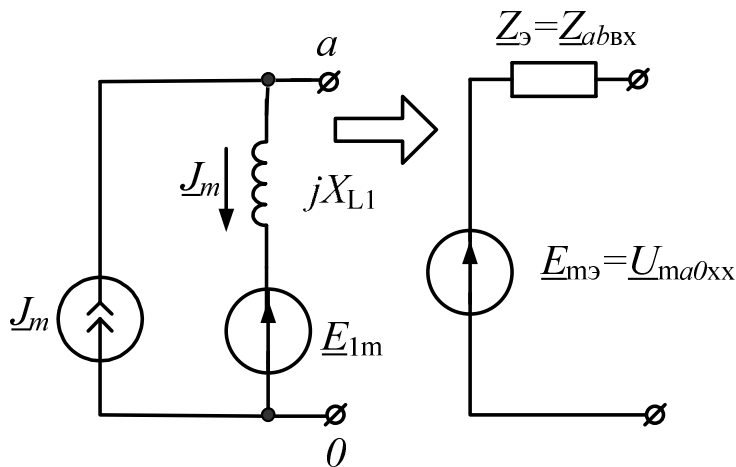
Найти токи, построить векторную топографическую диаграмму, рассчитать баланс мощности.

Решение.

1. Находим комплексные амплитуды источников:

$$\underline{E}_{1m} = 10e^{j0^\circ} \text{ В}, \underline{E}_{2m} = 10e^{-j90^\circ} \text{ В} = -j10 \text{ В}, \underline{J}_m = 1 \text{ А}.$$

2. Методом эквивалентного генератора преобразуем левую часть схемы:



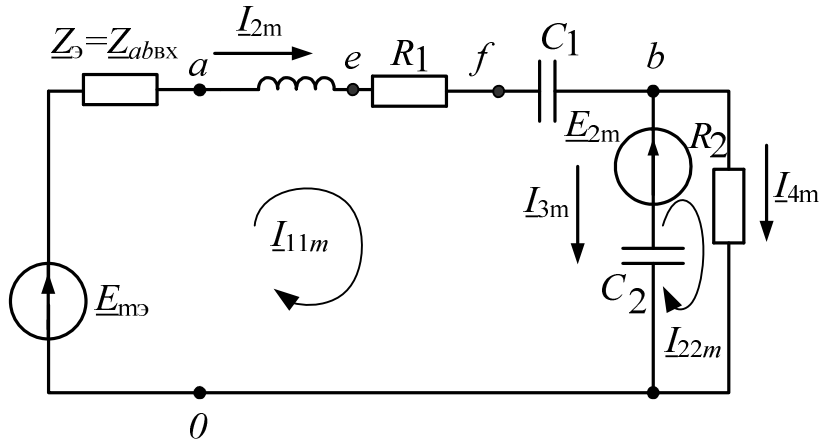
По методу двух узлов находим:

$$\underline{U}_{a0xx} = \frac{\underline{J}_m + \underline{E}_{1m}\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} = \frac{1 + \frac{10}{j20}}{0 + \frac{1}{j20}} = \frac{1 - 0,5j}{-0,05j} = 10 + 20j \text{ В}.$$

$$\underline{U}_{a0xx} = \frac{\underline{J}_m + \underline{E}_{1m}\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2} = \frac{1 + \frac{10}{j20}}{0 + \frac{1}{j20}} = \frac{1 - 0,5j}{-0,05j} = 10 + 20j \text{ В}.$$

$$\underline{Z}_э = jX_{L1} = j20 \text{ Ом}.$$

3. Получим двухконтурную схему:



Находим контурные токи по МКТ:

$$\begin{aligned} \underline{I}_{11m} \underline{Z}_{11} + \underline{I}_{22m} \underline{Z}_{12} &= \underline{E}_{mэ} - \underline{E}_{2m} \\ \underline{I}_{11m} \underline{Z}_{21} + \underline{I}_{22m} \underline{Z}_{22} &= \underline{E}_{2m} \end{aligned}$$

где:

$$\underline{Z}_{11} = \underline{Z}_э + jX_{L2} + R_1 - jX_{C1} - jX_{C2} = j20 + j20 + 10 - j30 - j10 = 10 \text{ Ом.}$$

$$\underline{Z}_{12} = \underline{Z}_{21} = -(-jX_{C2}) = +j10 \text{ Ом.}$$

$$\underline{Z}_{22} = R_2 - jX_{C2} = 5 - j10 \text{ Ом.}$$

Получим уравнения:

$$10 \underline{I}_{11m} + j10 \underline{I}_{22m} = 10 + j20 + j10 = 10 + j30.$$

$$+j10 \underline{I}_{11m} + (5 - j10) \underline{I}_{22m} = -j10.$$

$$\underline{I}_{11m} = \frac{\begin{vmatrix} 10 + j30 & j10 \\ -j10 & 5 - j10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & j10 \\ j10 & 5 - j10 \end{vmatrix}} = 1 + j \text{ A. } \underline{I}_{22m} = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 10 + j30 \\ j10 & -j10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 10 & j10 \\ j10 & 5 - j10 \end{vmatrix}} = 2 \text{ A.}$$

$$\underline{I}_{2m} = \underline{I}_{11m} = 1 + j \text{ A, } \underline{I}_{4m} = \underline{I}_{22m} = 2 \text{ A. } \underline{I}_{3m} = \underline{I}_{11m} - \underline{I}_{22m} = 1 + j - 2 = -1 + j \text{ A.}$$

$$\underline{I}_{1m} = \underline{I}_{11m} - \underline{I}_{2m} = 1 - 1 - j = -j \text{ A.}$$

4. Решение методом двух узлов.

В преобразованной схеме (п.3) находим сопротивления ветвей:

$$\underline{Z}_1 = \underline{Z}_э + jX_{L2} + R_1 - jX_{C1} = j20 + j20 + 10 - j30 = 10 + j10 \text{ Ом;}$$

$$\underline{Z}_2 = -j10 \text{ Ом; } \underline{Z}_3 = 5 \text{ Ом.}$$

Находим напряжение в узле b:

$$\underline{U}_{mbo} = \frac{\underline{E}_{m3} \underline{Y}_1 + \underline{E}_{2m} \underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3} = \frac{\frac{10 + j20}{10 + j10} + \frac{-j10}{-j10}}{\frac{1}{10 + j10} + \frac{1}{-j10} + \frac{1}{5}} = 10 B.$$

Находим токи в ветвях:

$$\underline{I}_{2m} = \frac{\underline{E}_{m3} - \underline{U}_{mbo}}{\underline{Z}_1} = \frac{j20}{10 + j10} = 1 + j A. \quad \underline{I}_{3m} = \frac{\underline{U}_{mbo} - \underline{E}_{2m}}{-jX_{C2}} = \frac{10 + j10}{-j10} = 1 + j A.$$

$$\underline{I}_{4m} = \frac{\underline{U}_{mbo}}{R_2} = 2 A. \quad \underline{I}_{1m} = \underline{J}_m - \underline{I}_{2m} = -j A.$$

5. Строим векторную топографическую диаграмму.

Рассчитываем комплексные амплитуды потенциалов в точках цепи:

$$\underline{\varphi}_0 = 0, \quad \underline{\varphi}_{bm} = \underline{I}_{4m} R_4 = 2 \cdot 5 = 10 B, \quad \underline{\varphi}_{cm} = \underline{I}_{3m} (-jX_{C2}) = (-1 + j) \cdot (-j10) = 10 + j10 B,$$

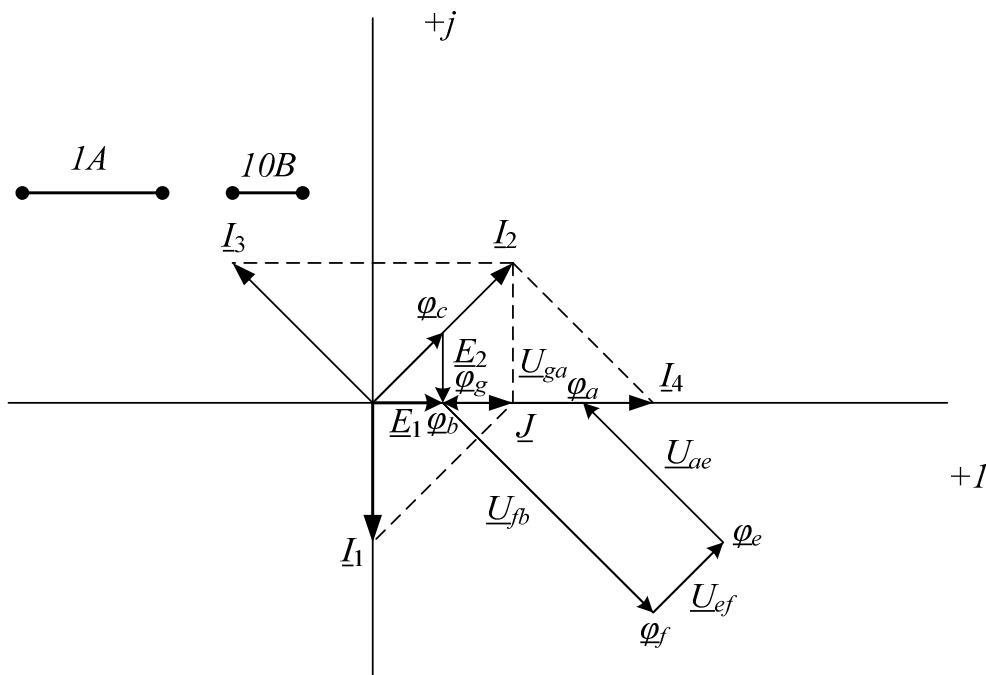
$$\underline{\varphi}_{fm} = \underline{\varphi}_{bm} + \underline{I}_{2m} (-jX_{C1}) = 10 + (1 + j)(-j30) = 40 - j30 B,$$

$$\underline{\varphi}_{em} = \underline{\varphi}_{bm} + \underline{I}_{2m} R_1 = 40 - j30 + 10 + j10 = 50 - j20 B,$$

$$\underline{\varphi}_{am} = \underline{\varphi}_{em} + \underline{I}_{2m} (+j20) = 50 - j20 + j20 - 20 = 30 B,$$

$$\underline{\varphi}_{gm} = \underline{\varphi}_{am} - \underline{I}_{1m} (+j20) = 30 - (-j)(j20) = 30 - 20 = 10 B.$$

Выбираем масштабы по току и напряжению и строим векторную топографическую диаграмму.



По диаграмме проверяем выполнение законов Кирхгофа для токов и напряжений, правильность ориентаций векторов токов и напряжений на элементах цепи.

6. Расчет баланса мощности.

Мощность источников:

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{ист} = \underline{U}I^* &= \sum \left(\frac{\underline{E}_{km}I_{km}^*}{2} + \frac{\underline{U}_{km}J_{km}^*}{2} \right) = -\frac{\underline{E}_{1m}I_{1m}^*}{2} - \frac{\underline{E}_{2m}I_{3m}^*}{2} + \frac{\underline{U}_{a0}J_m^*}{2} = \\ &= -\frac{10j}{2} - \frac{(-10j)(-1-j)}{2} + \frac{30 \cdot 1}{2} = 20 - 10j = P_{ист} + jQ_{ист}.\end{aligned}$$

Мощность потребителей:

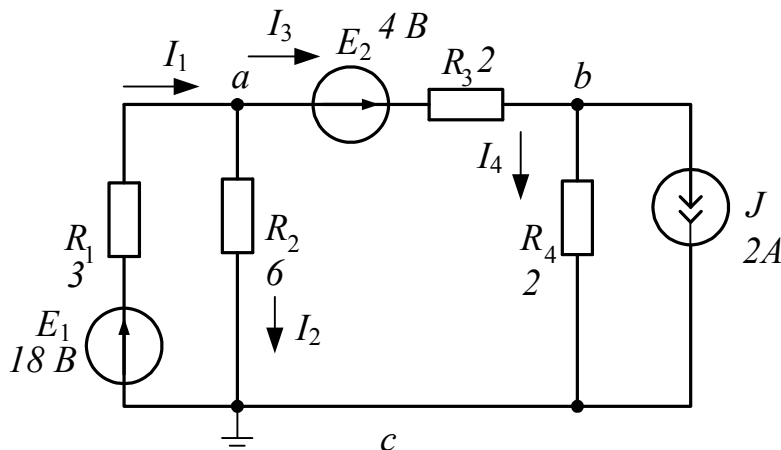
$$\sum P_{потр.} = \frac{I_{2m}^2 R_1}{2} + \frac{I_{4m}^2 R_2}{2} = \frac{(\sqrt{2})^2 \cdot 10}{2} + \frac{2^2 \cdot 5}{2} = 20 \text{ Вт}.$$

$$\begin{aligned}\sum Q_{потр.} &= \frac{I_{1m}^2 X_{L1}}{2} + \frac{I_{2m}^2 (X_{L2} - X_{C1})}{2} - \frac{I_{3m}^2 X_{C2}}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot 20 + \frac{(\sqrt{2})^2}{2} (20 - 30) - \frac{(\sqrt{2})^2}{2} \cdot 10 = 10 - 10 - 10 = -10 \text{ Вар}.\end{aligned}$$

$$\tilde{S}_{потр} = P_{потр.} + jQ_{потр.} = 20 - j10 = \tilde{S}_{ист}.$$

Баланс выполняется.

Задача №23



Дано: $E_1=18 \text{ В}$, $E_2=4 \text{ В}$, $J=2 \text{ А}$, $R_1=3 \text{ Ом}$, $R_2=6 \text{ Ом}$, $R_3=2 \text{ Ом}$, $R_4=4 \text{ Ом}$.

Найти токи методом узловых напряжений.

Каноническая система уравнений:

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\right)U_a - \frac{1}{2}U_b = \frac{18}{3} - \frac{4}{2} = 4$$

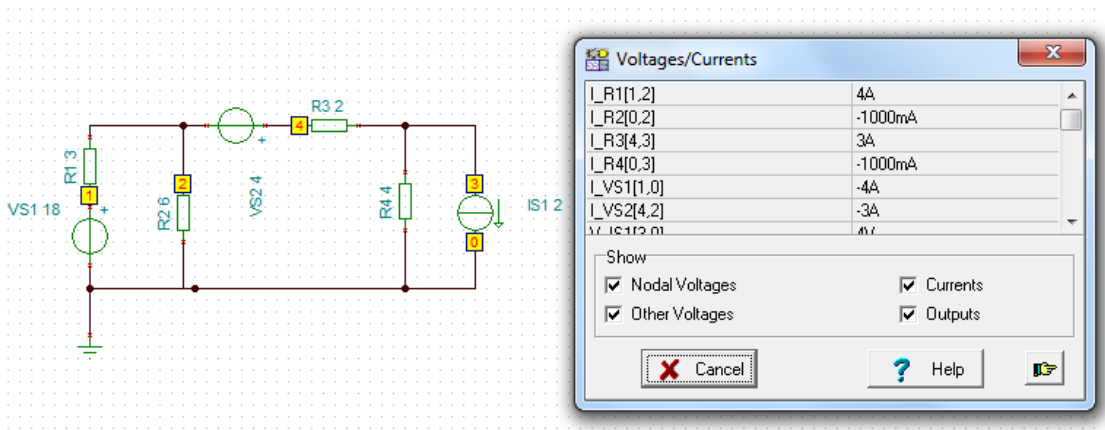
$$-\frac{1}{2}U_a + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)U_b = \frac{4}{2} - 2 = 0$$

$$U_a - \frac{1}{2}U_b = 4$$

$$-U_a + \frac{3}{2}U_b = 0$$

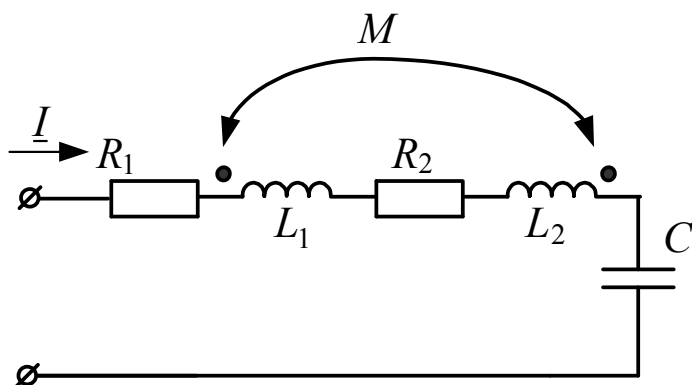
$$U_b = 4B, U_a = \frac{3}{2}U_b = 6B.$$

$$I_1 = \frac{18-6}{3} = 4A, I_2 = \frac{6}{6} = 1A, I_3 = \frac{6-4+4}{2} = 3A, I_4 = \frac{4}{4} = 1A$$



Цепи с магнитной связью

Задача №24



Дано: $R_1=60$ Ом,
 $R_2=10$ Ом, $L_1=0,8$ мГн,
 $L_2=0,4$ мГн, $M=0,1$ мГн,
 $\omega=10^6$ 1/с.

При каком значении емкости C в цепи наступит резонанс?

Решение

1. Катушки индуктивности включены встречно. Находим эквивалентную индуктивность:

$$L_{\text{экв}} = L_1 + L_2 - 2M = 0,8 + 0,4 - 0,2 = 1 \text{ мГн}.$$

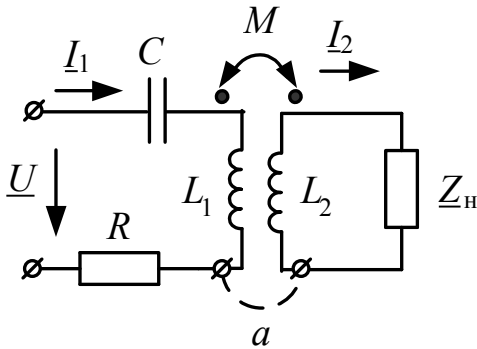
2. При резонансе на заданной частоте $X_C = X_{L_{\text{экв}}}$:

$$\frac{1}{\omega C} = \omega L_{\text{экв}}.$$

Отсюда находим:

$$C = \frac{1}{\omega^2 L_{\text{экв}}} = \frac{1}{\omega^2 L_{\text{экв}}} = \frac{1}{10^{12} \cdot 10^{-3}} = 10^{-9} = 1 \text{ нФ}.$$

Задача №25



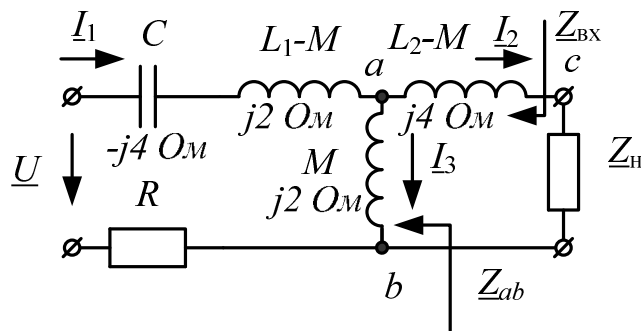
Дано: $U_1 = 10 \text{ В}$, $X_{L1} = 4 \text{ Ом}$, $X_{L2} = 6 \text{ Ом}$,
 $X_C = 4 \text{ Ом}$, $X_M = 2 \text{ Ом}$, $R = 2 \text{ Ом}$.

При каком Z_H в нем выделяется
 максимальная мощность?

Рассчитать токи I_1 и I_2 и мощность
 P_H .

Решение

1. Нижние выводы катушек индуктивности можно соединить. При этом токи в цепи не изменятся. Заменяем трансформатор схемой замещения. Так как одноименные выводы катушек одинаково расположены относительно нижнего узла a получим эквивалентную схему:



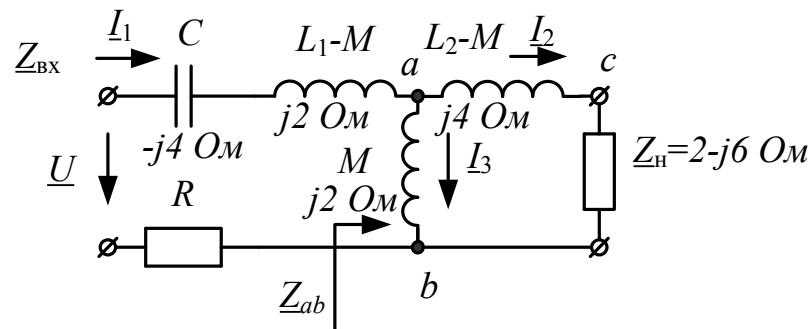
2. Оптимальное сопротивление нагрузки равно комплексно-сопряженному сопротивлению эквивалентного генератора, заменяющего основную схему слева от зажимов cb .

Найдем при отключенной нагрузке:

$$\underline{Z}_{ab} = \frac{j2(2-j2)}{2+j2-j2} = \frac{4+j4}{2} = 2+j2 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{вх} = \underline{Z}_{ab} + j4 = 2+j6 \text{ Ом}, \quad \underline{Z}_{н опт} = \underline{Z}_{вх}^* = 2-j6 \text{ Ом}.$$

3. Расчет токов при включенной оптимальной нагрузке.



$$\underline{Z}_{ab} = \frac{j2(2-j6+j4)}{2-j6+j4+j2} = \frac{(2-j2)j2}{2} = 2+j2 \text{ Ом}$$

$$\underline{I}_1 = \frac{10}{2-j2+2+j2} = \frac{10}{4} = 2,5 \text{ A}$$

$$\underline{U}_{ab} = \underline{I}_1(2+j2) = 5+j5 \text{ В},$$

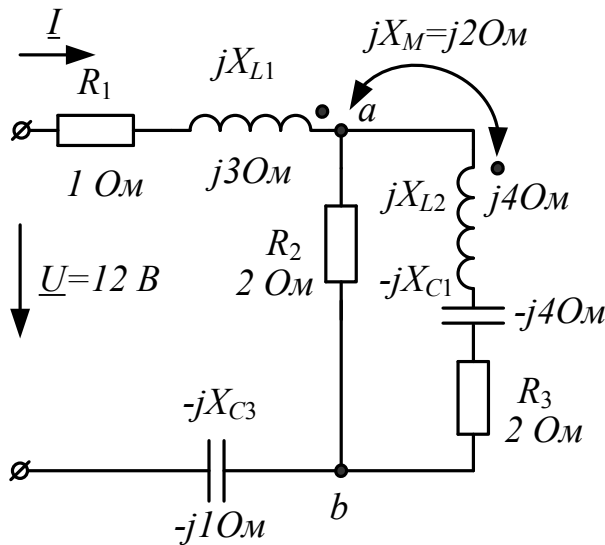
$$\underline{I}_3 = \frac{5+j5}{j2} = 2,5-j2,5 \text{ A};$$

$$\underline{I}_2 = \frac{5+j5}{2-j2} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1+j}{1-j} = \frac{5}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}e^{j45^\circ}}{\sqrt{2}e^{-j45^\circ}} = 2,5j \text{ A}.$$

4. Расчет мощность в нагрузке:

$$P_n = I_2^2 R_n = (2,5)^2 2 = 12,5 \text{ Вт}.$$

Задача № 26

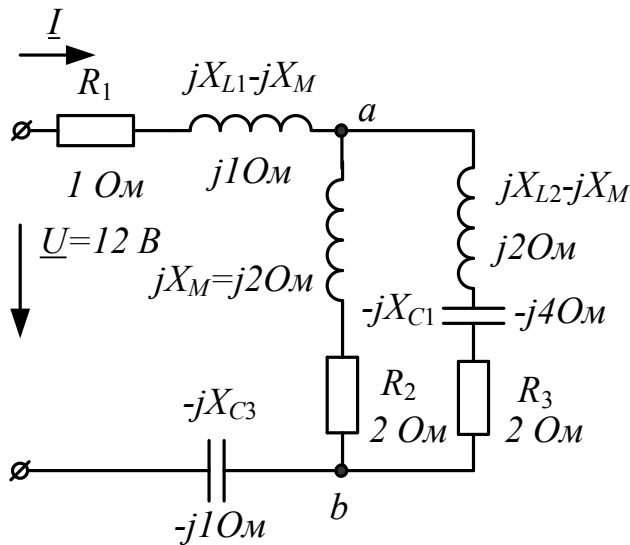


Параметры цепи заданы на символической схеме замещения.

Найти входной ток.

Решение.

1. Выполним развязку магнитно-связанных катушек. Одноименные зажимы катушек одинаково расположены относительно узла «а». Поэтому после развязки получим схему:



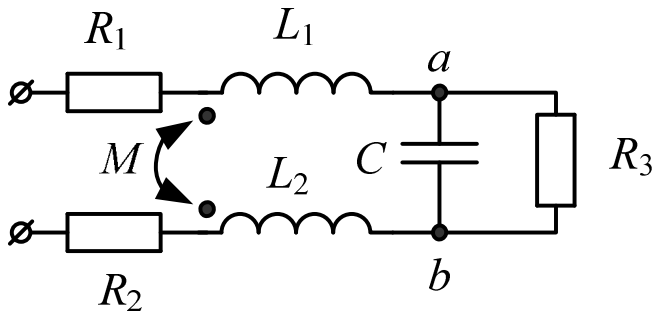
2. Найдем эквивалентное сопротивление параллельных ветвей:

$$\underline{Z}_{ab} = \frac{(2 + j2)(2 - j2)}{2 + j2 + 2 - j2} = \frac{4 + 4}{4} = 2 \text{ Ом}.$$

Входное сопротивление: $\underline{Z}_{\text{вх}} = \underline{Z}_{ab} + 1 + j1 + 2 - j1 = 3 \text{ Ом}.$

$$\text{Входной ток: } \underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}_{\text{вх}}} = \frac{12}{3} = 4 \text{ А}.$$

Задача №27



Дано: $\omega=10^4$ 1/с, $L_1=1,2$ мГн, $L_2=1,6$ мГн, $C=2,5$ мкФ, $R_1=R_2=5$ Ом, $R_3=40$ Ом.
При каком M в цепи наступит резонанс?

Решение

1. Найдем эквивалентное сопротивление параллельного соединения \underline{Z}_{ab} .

Реактивное сопротивление емкости:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{10^4 \cdot 2,5 \cdot 10^{-6}} = 40 \text{ Ом}.$$

$$\underline{Z}_{ab} = \frac{-jX_C R_3}{R_3 - jX_C} = \frac{-j40 \cdot 40}{40 - j40} = 20 - j20 = R_{\Sigma} - jX_{C\Sigma}.$$

2. Условие резонанса: $\omega L_{\text{экв}} = X_{C\Sigma} = 20 \text{ Ом};$

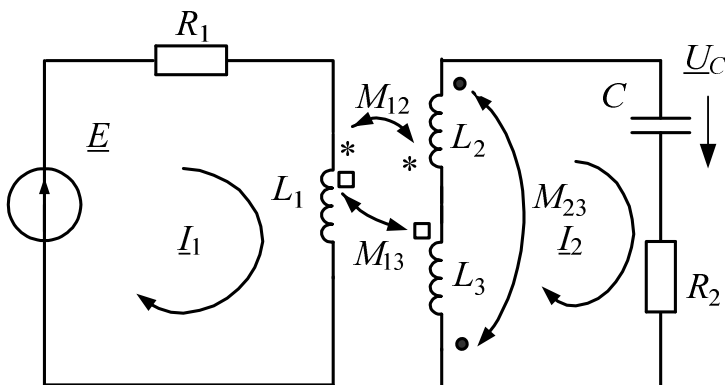
$$L_{\text{экв}} = \frac{20}{\omega} = \frac{20}{10^4} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Гн}.$$

3. Находим M :

Эквивалентная индуктивность при встречном включении двух катушек: $L_{\text{экв}} = L_1 + L_2 - 2M = 2 \text{ мГн}.$

$$M = \frac{(1,2 + 1,6 - 2) \cdot 10^{-3}}{2} = 0,4 \text{ мГн}.$$

Задача №45



Дано: $E=45$ В, $R_1=10$ Ом, $R_2=10$ Ом, $X_{L1}=10$ Ом, $X_{L2}=20$ Ом, $X_{L3}=30$ Ом, $X_C=40$ Ом, $X_{M12}=15$ Ом, $X_{M13}=10$ Ом, $X_{M23}=0$ Ом. Найти токи в катушках и напряжение на емкости.

Решение

1. Выбираем направления обхода контуров и составляем уравнения по второму закону Кирхгофа. Если направление обхода катушки i и ток в катушке k одинаково направлены относительно одноименных зажимов, напряжение взаимной индукции входит в уравнения Кирхгофа со знаком плюс. В противном случае – со знаком минус.

$$1\text{-й контур: } R_1 \underline{I}_1 + jX_{L1} \underline{I}_1 + jX_{M12} \underline{I}_2 - jX_{M13} \underline{I}_2 = \underline{E};$$

$$2\text{-й контур: } R_2 \underline{I}_2 - jX_{C2} \underline{I}_2 + jX_{L3} \underline{I}_2 - jX_{M23} \underline{I}_2 - jX_{M13} \underline{I}_1 + jX_{L2} \underline{I}_2 + jX_{M12} \underline{I}_1 - jX_{M23} \underline{I}_2 = 0.$$

Подставим значения параметров и получим систему уравнений:

$$\begin{cases} (10 + j10) \underline{I}_1 + j5 \underline{I}_2 = 45 \\ j5 \underline{I}_1 + (10 - j10) \underline{I}_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Из второго уравнения: } \underline{I}_2 = -\frac{j5 \underline{I}_1}{(10 - j10)}.$$

Подставим в первое уравнение:

$$(10 + j10) \underline{I}_1 + j5 \left(-\frac{j5 \underline{I}_1}{(10 - j10)} \right) = 45;$$

$$225 \underline{I}_1 = 450 - j450.$$

Получим ответы:

$$\underline{I}_1 = 2 - j2 \text{ A}, \quad \underline{I}_2 = -j1 \text{ A}, \quad U_C = X_C I_2 = 40 \text{ B}.$$

Расчет токов и напряжения \underline{U}_C проведем в Mathcad.

Задаем значения параметров цепи:

$$E := 45 \quad R_1 := 10 \quad R_2 := 10 \quad XL_1 := 10$$

$$XL_2 := 20 \quad XL_3 := 30 \quad XC := 40$$

$$XM_{12} := 15 \quad XM_{13} := 10 \quad XM_{23} := 10$$

Составляем уравнения по второму закону Кирхгофа:

$$i := \sqrt{-1}$$

Given

$$1 \text{ к: } I_1 \cdot R_1 + i \cdot XL_1 \cdot I_1 + i \cdot XM_{12} \cdot I_2 - i \cdot XM_{13} \cdot I_2 = E$$

$$2 \text{ к: } I_2 \cdot R_2 - i \cdot XC \cdot I_2 + i \cdot XL_3 \cdot I_2 - i \cdot XM_{23} \cdot I_2 - \\ - i \cdot XM_{13} \cdot I_1 + i \cdot XL_2 \cdot I_2 + i \cdot XM_{12} \cdot I_1 - i \cdot XM_{23} \cdot I_2 = 0$$

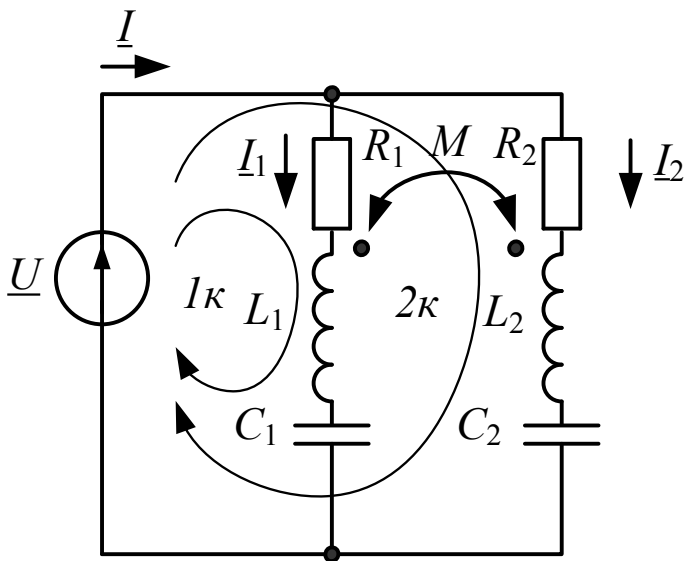
$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} := \text{Find}(I_1, I_2) \text{ float}, 4 \rightarrow \begin{pmatrix} 2.0 - 2.0i \\ -1.0i \end{pmatrix}$$

$$U_C := -i \cdot XC \cdot I_2 = -40$$

Получены ответы:

$$I_1 = 2 - j2 \text{ A}, \quad I_2 = -j1 \text{ A}, \quad U_C = -40 \text{ В.}$$

Задача №28



Дано: $\underline{U} = 150 \text{ В}$,
 $X_{L1} = 8 \text{ Ом}$, $X_{L2} = 15 \text{ Ом}$,
 $X_{C1} = 8 \text{ Ом}$, $X_{C2} = 15 \text{ Ом}$,
 $X_M = 10 \text{ Ом}$, $R_1 = 5 \text{ Ом}$,
 $R_2 = 10 \text{ Ом}$.

Найти токи и рассчитать баланс активной мощности.

Решение

1. Составляем уравнения по второму закону Кирхгофа для расчета токов:

1-й контур:

$$R_1 \underline{I}_1 + jX_{L1} \underline{I}_1 + jX_M \underline{I}_2 - jX_{C1} \underline{I}_1 = \underline{U};$$

$$R_2 \underline{I}_2 + jX_{L2} \underline{I}_2 + jX_M \underline{I}_1 - jX_{C2} \underline{I}_2 = \underline{U}.$$

Подставим значения параметров:

$$\begin{cases} 5\underline{I}_1 + j10\underline{I}_2 = 150 \\ j10\underline{I}_1 + 10\underline{I}_2 = 150 \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на $j2$ и вычтем из него второе уравнение. Получим:

$$30\underline{I}_2 = 150 - j300 A, \quad \underline{I}_2 = 5 - j10 A = 11,2e^{-j63^\circ} A.$$

Умножим второе уравнение на j и вычтем из первого:

$$\underline{I}_1 = 150 - j150, \quad \underline{I}_1 = 10 - j10 A = 10\sqrt{2}e^{j45^\circ} A.$$

Находим ток в источнике напряжения:

$$\underline{I} = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = 15 - j20 A.$$

2. Находим активные мощности в ветвях цепи:

$$P_1 = \mathbf{Re}[\underline{U} \cdot \underline{I}_1^*] = \mathbf{Re}[150(10 + j10)] = 1500 \text{ Вт},$$

$$P_2 = \mathbf{Re}[\underline{U} \cdot \underline{I}_2^*] = \mathbf{Re}[150(5 + j10)] = 750 \text{ Вт}.$$

3. Находим активную мощность источника:

$$P_U = \mathbf{Re}[\underline{U} \cdot \underline{I}^*] = \mathbf{Re}[150(15 + j20)] = 2250 = P_1 + P_2.$$

4. Найдем мощность, выделяемую в виде тепла в ветвях:

$$P_{R1} = I_1^2 R_1 = 5 \cdot (10\sqrt{2})^2 = 5 \cdot 200 = 1000 \text{ Вт}.$$

$$P_{R2} = I_2^2 R_2 = 10 \cdot (11,2)^2 = 1250 \text{ Вт}.$$

5. Обратим внимание на то, что активная мощность первой ветви P_1 на 500 Вт больше, чем мощность P_{R1} , выделяемая в первой ветви в виде тепла. Это означает, что часть активной мощности передается из первой катушки во вторую через магнитное поле. Передаваемая во вторую катушку комплексная мощность равна:

$$\begin{aligned}\tilde{S}_{2M} &= \underline{E}_{2M} \cdot \underline{I}_2^* = (jX_M I_1) \cdot (5 + j10) = j10(10 - j10)(5 + j10) = \\ &= (100 + j100)(5 + j10) = 500 + j500 + j1000 - 1000 = -500 + j1500 \text{ВА}.\end{aligned}$$

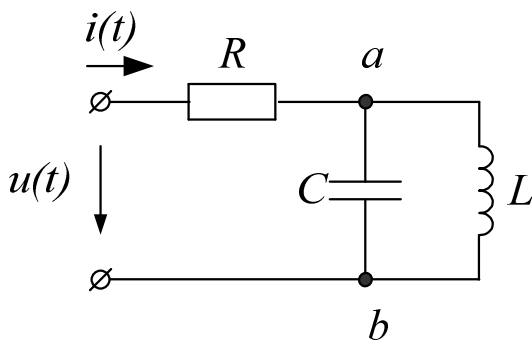
Активная мощность $P_{M2} = -500 \text{ Вт}$ отрицательна.

Следовательно, эта мощность подводится во вторую катушку из первой через магнитное поле. Активная мощность, отдаваемая первой катушкой во вторую $P_{M1} = -P_{M2} = 500 \text{ Вт}$. В результате получаем:

$$P_1 = P_{R1} + P_{M1} = 1000 + 500 = 1500 \text{ Вт},$$

$$P_2 = P_{R2} + P_{M2} = 1250 - 500 = 750 \text{ Вт}.$$

Задача №29



Дано:

$$u(t) = 40 + 80 \sin 10^3 t + 40 \sin(2 \cdot 10^3 t + 45^\circ)$$

$$L = 10 \text{ мГн}, C = 50 \text{ мкФ}, R = 20 \text{ Ом}.$$

Найти действующее значение тока, активную, реактивную и полную мощность.

Решение

$$1. \text{ На постоянном токе: } I_0 = \frac{U_0}{R} = \frac{40}{20} = 2 \text{ А}.$$

$$2. \text{ На первой гармонике } \omega = 10^3 \text{ 1/с}:$$

$$X_{L(1)} = \omega L = 10^3 \cdot 10^{-2} = 10 \text{ Ом},$$

$$X_{C(1)} = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{10^3 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 20 \text{ Ом}.$$

$$\underline{Z}_{ab(1)} = \frac{j10(-j20)}{j10 - j20} = \frac{200}{-j10} = j20 \text{ Ом}.$$

$$\underline{Z}_{ex(1)} = R + j\underline{Z}_{ab(1)} = 20 + j20 \text{ Ом}.$$

$$\underline{I}_{m(1)} = \frac{80}{20\sqrt{2}e^{j45^\circ}} = \frac{4}{\sqrt{2}}e^{-j45^\circ} \text{ А}.$$

Мгновенное значение первой гармоники тока:

$$i_{(1)}(t) = \frac{4}{\sqrt{2}} \sin(10^3 t - 45^\circ) \text{ А.}$$

3. Расчет на второй гармонике $2\omega = 2 \cdot 10^3 \text{ 1/c}$:

$$X_{L(2)} = 2\omega L = 2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-2} = 20 \text{ Ом},$$

$$X_{C(2)} = \frac{1}{2\omega C} = \frac{1}{2 \cdot 10^3 \cdot 50 \cdot 10^{-6}} = 10 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{ab(2)} = \frac{j20(-j10)}{j20 - j10} = \frac{200}{j10} = -j20 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{ex(2)} = R + j\underline{Z}_{ab(2)} = 20 - j20 \text{ Ом},$$

$$\underline{I}_{m(2)} = \frac{40e^{j45^\circ}}{20\sqrt{2}e^{-j45^\circ}} = \frac{2}{\sqrt{2}} e^{j90^\circ} \text{ А.}$$

Мгновенное значение второй гармоники тока:

$$i_{(2)}(t) = \frac{2}{\sqrt{2}} \sin(2 \cdot 10^3 t + 90^\circ) \text{ А.}$$

4. Полный ток:

$$i(t) = I_0 + i_{(1)}(t) + i_{(2)}(t) = 2 + \frac{4}{\sqrt{2}} \sin(10^3 t - 45^\circ) + \frac{2}{\sqrt{2}} \sin(2 \cdot 10^3 t + 90^\circ) \text{ А.}$$

5. Действующее значение тока:

$$I_{\text{д}} = \sqrt{I_0^2 + \frac{I_{m(1)}^2}{2} + \frac{I_{m(2)}^2}{2}} = \sqrt{2^2 + \frac{16}{2 \cdot 2} + \frac{4}{2 \cdot 2}} = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3 \text{ А.}$$

Действующее значение напряжения:

$$U_{\text{д}} = \sqrt{U_0^2 + U_{(1)}^2 + U_{(2)}^2} = \sqrt{40^2 + \frac{80^2}{2} + \frac{40^2}{2}} = 74,8 \text{ В.}$$

6. Активная мощность источников:

$$P = P_0 + P_1 + P_2 = U_0 I_0 + U_1 I_1 \cos \varphi_1 + U_2 I_2 \cos \varphi_2 =$$

$$= 40 \cdot 2 + \frac{80}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \cos(-45^\circ) + \frac{40}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \cos(45^\circ - 90^\circ) =$$

180 Вт.

Активная мощность в резисторах:

$$P_R = I_0^2 R + \frac{I_m(1)^2}{2} R + \frac{I_m(2)^2}{2} R = I_d^2 R = 20 \cdot 9 = 180 \text{ Вт}.$$

7. Реактивная мощность:

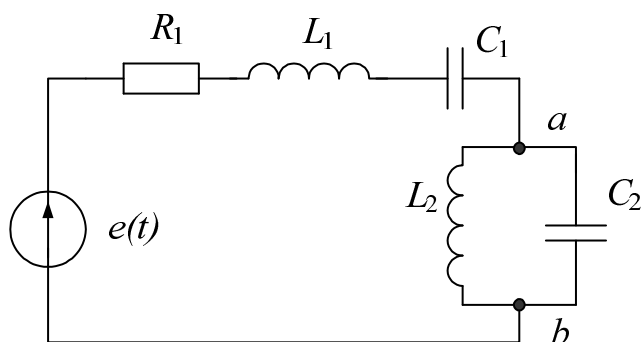
$$Q = U_1 I_1 \sin \varphi_1 + U_2 I_2 \sin \varphi_2 =$$

$$= \frac{80}{\sqrt{2}} \cdot \frac{4}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \sin(-45^\circ) + \frac{40}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \sin(-45^\circ) = -80 - 20 = -100 \text{ Вар}$$

8. Полная мощность: $S = U_d \cdot I_d = 74,8 \cdot 3 = 224,5 \text{ ВА}$.

$$\sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{180^2 + 100^2} = 205 \neq S.$$

Задача №30



Дано: $e(t) = 20 + 28 \sin 10^4 t - 14 \sin 2 \cdot 10^3 t$ В,

$L_1 = 1 \text{ мГн}, L_2 = 0,5 \text{ мГн}, C_1 = 5 \text{ мкФ}, R_1 = 10 \text{ Ом}$.

Найти активную мощность, выделяемую в цепи.

Решение

1. Так как мощность $P = I_d^2 R$ будем искать действующее значение тока.

2. Расчет на постоянном токе: $I_0 = 0$.

3. Расчет на первой гармонике $\omega = 10^4 \text{ 1/с}$:

$$X_{L1(1)} = \omega L_1 = 10^4 \cdot 10^{-3} = 10 \text{ Ом},$$

$$X_{L2(1)} = \omega L_2 = 10^4 \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} = 5 \text{ Ом};$$

$$X_{C1(1)} = \frac{1}{\omega C_1} = \frac{1}{10^4 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = 20 \text{ Ом},$$

$$X_{C2(1)} = \frac{1}{\omega C_2} = \frac{1}{10^4 \cdot 10 \cdot 10^{-6}} = 10 \text{ Ом}.$$

$$\underline{Z}_{ab(1)} = \frac{j5(-j10)}{j5 - j10} = +j10 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{\text{вх}(1)} = 10 + j10 - j20 + j10 = 10 \text{ Ом}.$$

$$I_{m(1)} = \frac{28}{10} = 2,8 \text{ А}, \quad I_{\text{д}(1)} = \frac{2,8}{\sqrt{2}} = 2 \text{ А}.$$

4. Расчет на второй гармонике $2\omega = 2 \cdot 10^4 \text{ 1/с}$:

$$X_{L1(2)} = 2\omega L_1 = 20 \text{ Ом}, \quad X_{L2(2)} = 2\omega L_2 = 10 \text{ Ом},$$

$$X_{C1(2)} = \frac{1}{2\omega C_1} = 10 \text{ Ом}, \quad X_{C2(2)} = \frac{1}{2\omega C_2} = 5 \text{ Ом}.$$

$$\underline{Z}_{ab(2)} = \frac{-j5(+j10)}{-j5 + j10} = -j10 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{\text{вх}(2)} = 10 + j20 - j10 - j10 = 10 \text{ Ом}.$$

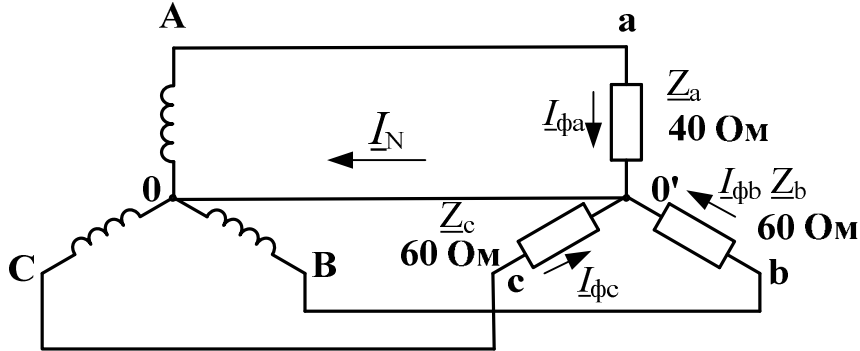
$$I_{m(2)} = \frac{14}{10} = 1,4 \text{ А}, \quad I_{\text{д}(2)} = \frac{1,4}{\sqrt{2}} = 1 \text{ А}.$$

5. Действующий ток: $I_{\text{д}} = \sqrt{I_0^2 + I_{(1)}^2 + I_{(2)}^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} \text{ А}.$

6. Активная мощность в цепи: $P = I_{\text{д}}^2 R = 8 \cdot 10 = 80 \text{ Вт}.$

ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

Задача №31



Дано: $E_{\phi} = 120 \text{ В}$, $R_a = 40 \text{ Ом}$, $R_b = R_c = 60 \text{ Ом}$.

Построить векторную диаграмму токов и найти ток нейтрали.

Решение.

1. Находим фазные токи:

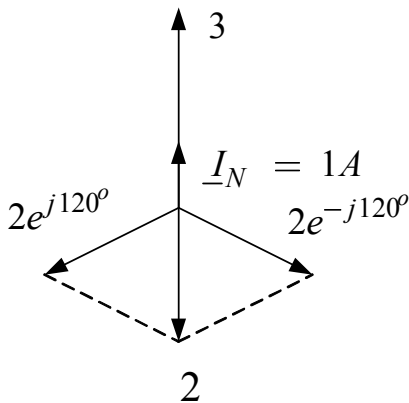
$$\underline{I}_{\phi a} = \frac{\underline{E}_{\phi a}}{R_a} = \frac{120e^{j0^\circ}}{40} = 3e^{j0^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_{\phi b} = \frac{\underline{E}_{\phi b}}{R_b} = \frac{120e^{-j120^\circ}}{60} = 2e^{-j120^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_{\phi c} = \frac{\underline{E}_{\phi c}}{R_b} = \frac{120e^{j120^\circ}}{60} = 2e^{j120^\circ} \text{ А}.$$

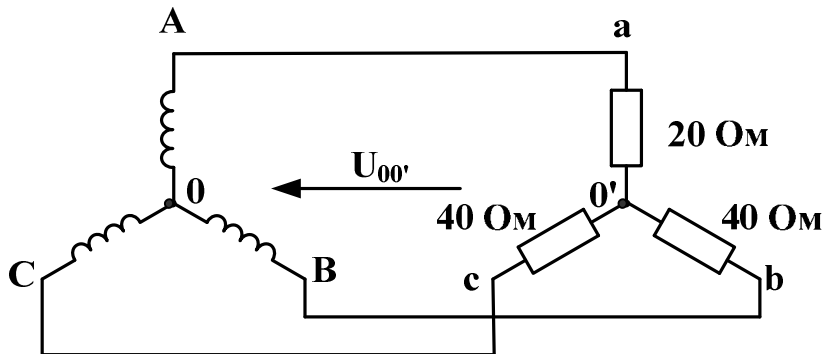
Ток нейтрали:

$$\begin{aligned} \underline{I}_N &= \underline{I}_{\phi a} + \underline{I}_{\phi b} + \underline{I}_{\phi c} = 3 + 2e^{-j120^\circ} + 2e^{j120^\circ} = \\ &= 3 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) + j2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\left(-\frac{1}{2}\right) + j2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3 - 1 - 1 = 1 \text{ А} \end{aligned}$$



Строим векторную диаграмму.

Задача №32



Дано: $E_{\phi} = 120 \text{ В}$, $R_a = 20 \text{ Ом}$, $R_b = R_c = 40 \text{ Ом}$.

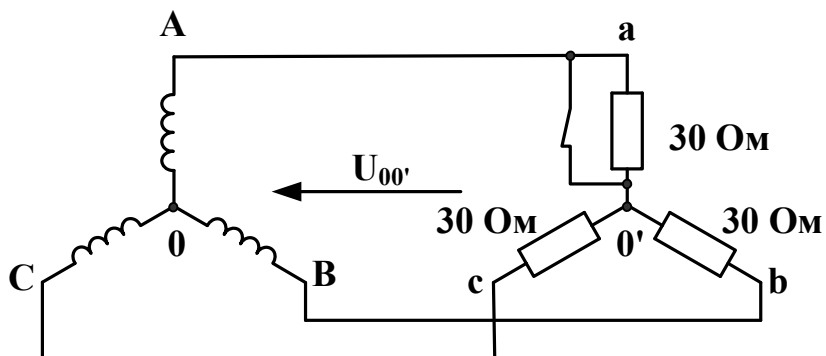
Найти напряжение смещения нейтрали $U_{00'}$.

Решение.

По методу двух узлов:

$$\begin{aligned}
 \underline{U}_{00'} &= \frac{\underline{E}_{\phi a} G_a + \underline{E}_{\phi b} G_b + \underline{E}_{\phi c} G_c}{G_a + G_b + G_c} = \\
 &= \frac{120 \cdot \frac{1}{20} + 120e^{-j120^\circ} \cdot \frac{1}{40} + 120e^{j120^\circ} \cdot \frac{1}{40}}{\frac{1}{20} + \frac{1}{40} + \frac{1}{40}} = \\
 &= \frac{6 + 3 \left(-\frac{1}{2} - j \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 3 \left(-\frac{1}{2} + j \frac{\sqrt{3}}{2} \right)}{\frac{1}{10}} = \frac{6 - 1,5 - 1,5}{\frac{1}{10}} = 30 \text{ В}.
 \end{aligned}$$

Задача №33

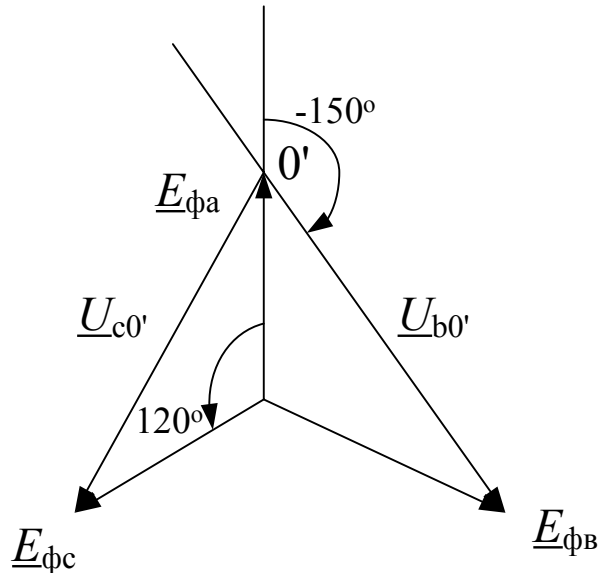


Дано: $E_{\phi} = 127 \text{ В}$, $R_a = R_b = R_c = 40 \text{ Ом}$.

Произошло замыкание фазы А. Построить векторную диаграмму напряжений и найти фазные токи.

Решение

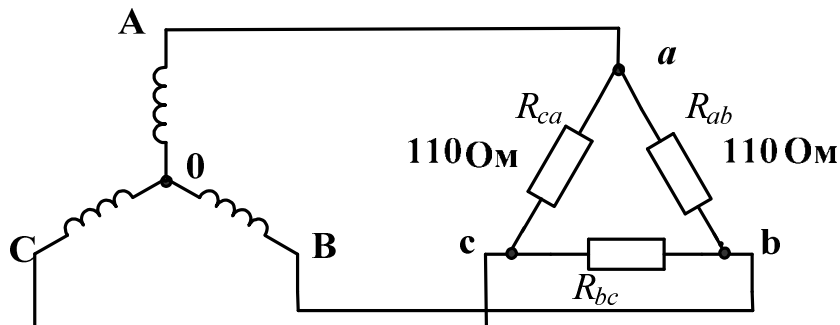
Узел 0' соединен с фазой $\underline{E}_{\phi a}$.



$$\underline{I}_{\phi b} = \frac{\underline{U}_{b0'}}{R} = \frac{\underline{E}_{\phi a} \sqrt{3} e^{-j150^\circ}}{40} = \frac{220 e^{-j150^\circ}}{40} = 5,5 e^{-j150^\circ} \text{ A.}$$

$$\underline{I}_{\phi c} = \frac{\underline{U}_{c0'}}{R} = \frac{\underline{E}_{\phi a} \sqrt{3} e^{j150^\circ}}{40} = \frac{220 e^{j150^\circ}}{40} = 5,5 e^{j150^\circ} \text{ A.}$$

Задача №34



Дано: $E_{\phi} = 127 \text{ В}, R_{ab} = R_{bc} = R_{ca} = 110 \text{ Ом}.$

Найти линейные токи.

Решение.

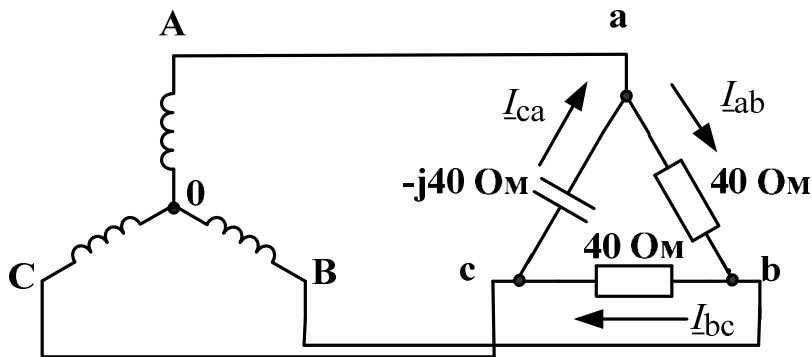
Нагрузка включена треугольником. Находим действующие линейные напряжения:

$$U_l = U_{ab} = U_{bc} = U_{ca} = \sqrt{3}E_\phi = \sqrt{3} \cdot 127 = 220 \text{ В}.$$

$$\text{Фазные токи: } I_{ab} = \frac{U_{ab}}{R_{ab}} = \frac{220}{110} = 2 \text{ А} = I_{bc} = I_{ca}.$$

$$\text{Линейные токи: } I_l = \sqrt{3}I_\phi = 2\sqrt{3} \text{ А}.$$

Задача №35



Дано: $E_\phi = 127 \text{ В}$. Построить векторную диаграмму токов и напряжений. Найти активную и реактивную мощность в цепи.

Решение.

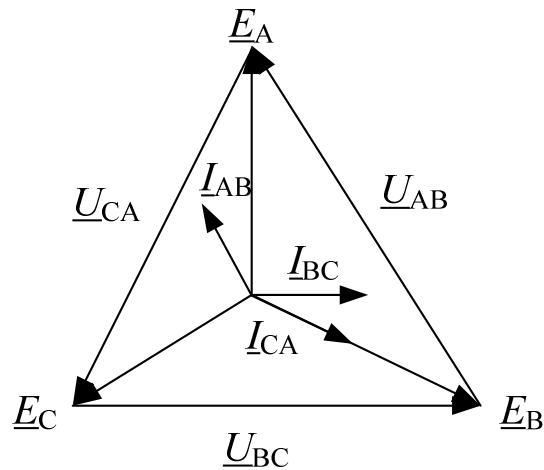
1. Фазные нагрузки подключены к линейным напряжениям. Найдем фазные токи:

$$\underline{I}_{ab} = \frac{U_{ab}}{40} = \frac{\underline{E}_a - \underline{E}_b}{40} = \frac{127\sqrt{3}e^{j30^\circ}}{40} = 5,5 e^{j30^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_{bc} = \frac{U_{bc}}{40} = \frac{220e^{-j90^\circ}}{40} = 5,5 e^{-j90^\circ} \text{ А},$$

$$\underline{I}_{ca} = \frac{U_{ca}}{40} = \frac{220e^{j150^\circ}}{-j40} = 5,5 e^{j240^\circ} \text{ А}.$$

2. Строим векторную диаграмму токов и напряжений:



3. Активная мощность выделяется в резисторах:

$$P = I_{ab}^2 R + I_{bc}^2 R = 2 \cdot 5,5^2 \cdot 40 = 2420 \text{ Вт}.$$

Реактивная мощность в емкости:

$$Q = I_{ca}^2 \cdot X_C = 5,5^2 \cdot 40 = 1210 \text{ Вар}.$$

ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

Задача №36

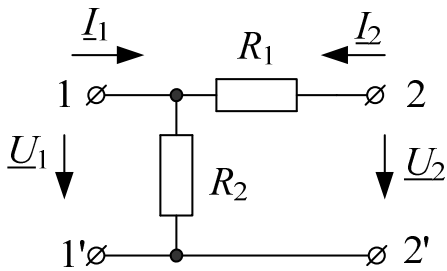


Рис.7.26

Пользуясь уравнениями четырехполюсника, найти: Y , Z и A - параметры Γ -образной схемы (рис.7.26), если $R_1=2\text{ Ом}$, $R_2=2\text{ Ом}$.

Решение

1. Запишем уравнения четырехполюсника в системе Y -параметров

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{Y}_{11}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{12}\underline{U}_2 \\ \underline{I}_2 = \underline{Y}_{21}\underline{U}_1 + \underline{Y}_{22}\underline{U}_2 \end{cases}.$$

В режиме короткого замыкания выходных зажимов ($\underline{U}_2 = 0$) определим \underline{Y}_{11} и \underline{Y}_{21} :

$$\underline{Y}_{11} = \left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_1} \right)_{\underline{U}_2=0} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_1 \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}} = 1 \text{ См},$$

$$\underline{Y}_{21} = \left(\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_1} \right)_{\underline{U}_2=0} = - \left(\frac{\frac{\underline{U}_1}{R_1}}{\underline{U}_1} \right) = - \frac{1}{R_1} = -0,5 \text{ См}.$$

В режиме короткого замыкания входных зажимов ($\underline{U}_1 = 0$) определим \underline{Y}_{12} и \underline{Y}_{22} :

$$\underline{Y}_{12} = \left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2} \right)_{\underline{U}_1=0} = - \frac{\frac{\underline{U}_2}{R_1}}{\underline{U}_2} = - \frac{1}{R_1} = -0,5 \text{ См} = \underline{Y}_{21},$$

$$\underline{Y}_{22} = \left(\frac{\underline{I}_2}{\underline{U}_2} \right)_{\underline{U}_1=0} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_2} = \frac{1}{R_1} = 0,5 \text{ См}.$$

1. Запишем уравнения четырехполюсника в системе \underline{Z} - параметров.

Токи и напряжения соответствуют схеме (рис.7.26).

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{Z}_{11}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{U}_2 = \underline{Z}_{21}\underline{I}_1 + \underline{Z}_{22}\underline{I}_2 \end{cases}.$$

В режиме холостого хода на выходных зажимах ($\underline{I}_2 = 0$) определим \underline{Z}_{11} и \underline{Z}_{21} :

$$\underline{Z}_{11} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_1} \right)_{\underline{I}_2=0} = \frac{\underline{U}_1}{\left(\frac{\underline{U}_1}{R_2} \right)} = R_2 = 2 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{21} = \left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_1} \right)_{\underline{I}_2=0} = \frac{\underline{I}_1 R_2}{\underline{I}_1} = R_2 = 2 \text{ Ом}.$$

В режиме холостого хода на входных зажимах ($\underline{I}_1=0$) определим \underline{Z}_{11} и \underline{Z}_{22} :

$$\underline{Z}_{12} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2} \right)_{\underline{I}_1=0} = \frac{\underline{I}_2 \cdot R_2}{\underline{I}_2} = R_2 = 2 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{22} = \left(\frac{\underline{U}_2}{\underline{I}_2} \right)_{\underline{I}_1=0} = \frac{\underline{I}_2 (R_1 + R_2)}{\underline{I}_2} = (R_1 + R_2) = 4 \text{ Ом}.$$

Используя связь между \underline{Z} и \underline{Y} параметрами, проверим правильность расчета:

$$\underline{Z}_{11} = \frac{\underline{Y}_{22}}{|\underline{Y}|} = \frac{0,5}{\underline{Y}_{11}\underline{Y}_{22} - \underline{Y}_{21}\underline{Y}_{12}} = \frac{0,5}{0,25} = 2 \text{ Ом}.$$

1. Запишем уравнения четырехполюсника в системе \underline{A} -параметров. Токи и напряжения показаны на рис.7.27.

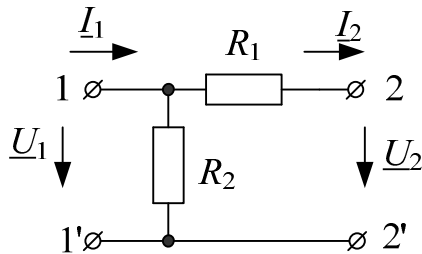


Рис.7.27

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2 \\ \underline{I}_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2 \end{cases}.$$

В режиме холостого хода на выходных зажимах ($\underline{I}_2 = 0$) определим \underline{A}_{11} и \underline{A}_{21} :

$$\underline{A}_{11} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \right)_{\underline{I}_2=0} = 1;$$

$$\underline{A}_{21} = \left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2} \right)_{\underline{I}_2=0} = \frac{1}{R_2} = 0,5 \text{ См}$$

В режиме короткого замыкания выходных зажимов ($\underline{U}_2 = 0$) определим \underline{A}_{12} и \underline{A}_{22} :

$$\underline{A}_{12} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2} \right)_{\underline{U}_2=0} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2} = 2 \text{ Ом},$$

$$\underline{A}_{22} = \left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} \right)_{\underline{U}_2=0} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2 \cdot \frac{R_2}{R_1 + R_2}} = 2.$$

Вычислим определитель A - параметров:

$$|A| = \underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = 1 \cdot 2 - 0,5 \cdot 2 = 1.$$

Задача №37

В схеме (рис.7.27) заданы: $\underline{U}_2 = 10\text{В}$, $\underline{I}_2 = -2\text{А}$. Определить \underline{U}_1 и \underline{I}_1 .

Решение

Подставим в систему уравнений четырехполосника найденные в примере 7.1 A - параметры и заданные \underline{U}_2 , \underline{I}_2 . Получим:

$$\begin{cases} \underline{U}_1 = \underline{A}_{11}\underline{U}_2 + \underline{A}_{12}\underline{I}_2 = 1 \cdot 10 - 2 \cdot 2 = 6\text{В} \\ \underline{I}_1 = \underline{A}_{21}\underline{U}_2 + \underline{A}_{22}\underline{I}_2 = 0,5 \cdot 10 - 2 \cdot 2 = 1\text{А} \end{cases}$$

Задача №38

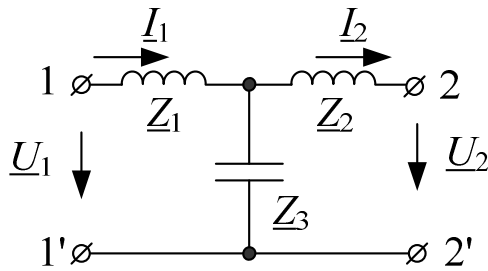


Рис.7.28

В четырехполюснике (рис.7.28) заданы комплексные сопротивления:

$$\underline{Z}_1=4j \text{ Ом}, \underline{Z}_2=+j3 \text{ Ом}, \underline{Z}_3= -j6 \text{ Ом}.$$

Рассчитать A - параметры двумя способами: 1) непосредственно по уравнениям; 2) через сопротивления холостого хода и короткого замыкания.

Решение

1. Непосредственный расчет по уравнениям четырехполюсника.

В режиме холостого хода на выходных зажимах ($I_2 = 0$) определяем:

$$\underline{A}_{11} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} \right)_{I_2=0} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_1 \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3}} = \frac{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_3} = \frac{-2j}{-6j} = \frac{1}{3},$$

$$\underline{A}_{21} = \left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{U}_2} \right)_{I_2=0} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_1 \cdot \underline{Z}_3} = \frac{1}{\underline{Z}_3} = \frac{1}{-6j} = \frac{1}{6} j \text{ См}.$$

В режиме короткого замыкания на выходных зажимах ($\underline{U}_2 = 0$) находим:

$$\underline{A}_{22} = \left(\frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} \right)_{\underline{U}_2=0} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_1 \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}} = \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_3} = \frac{-6j + 3j}{-6j} = 0,5,$$

$$\underline{A}_{12} = \left(\frac{\underline{U}_1}{\underline{I}_2} \right)_{\underline{U}_2=0} = \frac{\underline{U}_1}{2\underline{I}_1} = \frac{\underline{U}_1}{2 \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}}} = \frac{4j + \frac{3j(-6j)}{-3j}}{2} = 5j \text{ Ом}.$$

Выполним проверку:

$$\underline{A}_{11}\underline{A}_{22} - \underline{A}_{12}\underline{A}_{21} = \frac{1}{3} \cdot 0,5 - 5j \cdot \frac{1}{6}j = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1.$$

2. Расчет А- параметров через параметры холостого хода и короткого замыкания.

Вычисляем сопротивления холостого хода и короткого замыкания:

$$\underline{Z}_{1X} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_3 = 4j - 6j = -2j \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{1K} = \underline{Z}_1 + \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 4j + \frac{3j(-6j)}{3j - 6j} = 10j \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{2X} = \underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 = 3j - 6j = -3j \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{2K} = \underline{Z}_2 + \frac{\underline{Z}_1 \cdot \underline{Z}_3}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_3} = 3j + \frac{4j(-6j)}{4j - 6j} = 3j + 12j = 15j \text{ Ом}.$$

Находим А- параметры по формулам (7.32)-(7.33):

$$\underline{A}_{11} = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1X}}{\underline{Z}_{2X} - \underline{Z}_{2K}}} = \sqrt{\frac{-2j}{-3j - 15j}} = \sqrt{\frac{-2j}{-18j}} = \frac{1}{3},$$

$$\underline{A}_{12} = \underline{A}_{11} \cdot \underline{Z}_{2K} = \frac{1}{3} \cdot 15j = 5j \text{ Ом},$$

$$\underline{A}_{21} = \frac{\underline{A}_{11}}{\underline{Z}_{1X}} = \frac{1}{3(-2j)} = j \frac{1}{6} \text{ См},$$

$$\underline{A}_{22} = \underline{A}_{11} \frac{\underline{Z}_{2X}}{\underline{Z}_{1X}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(-3j)}{(-2j)} = \frac{1}{2}.$$

Задача №39

Рассчитать элементы Т-образной и П-образной схем замещения четырехполюсника с А- параметрами:

$$\underline{A}_{11} = \frac{1}{3}; \underline{A}_{12} = 5j \text{ Ом}; \underline{A}_{21} = \frac{1}{6}j \text{ См}; \underline{A}_{22} = \frac{1}{2}.$$

Построить эти схемы замещения.

Решение

1. Рассчитываем элементы Т - образной схемы замещения по формулам (7.35) - (7.37):

$$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{A}_{11} - 1}{\underline{A}_{21}} = \frac{\frac{1}{3} - 1}{\frac{1}{6}j} = 4j \text{ Ом}, \quad \underline{Z}_2 = \frac{\underline{A}_{22} - 1}{\underline{A}_{21}} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{6}j} = 3j \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_3 = \frac{1}{\underline{A}_{21}} = \frac{1}{\frac{1}{6}j} = -6j \text{ Ом}.$$

Мы видим, что сопротивления Т – образной схемы замещения совпадают с заданными в исходной схеме четырехполюсника (рис.7.28).

2. Рассчитываем элементы П- образной схемы замещения по формулам (7.38).

$$\underline{Z}_a = \underline{A}_{12} = 5j \text{ Ом}, \quad \underline{Z}_b = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{22} - 1} = \frac{5j}{0,5 - 1} = -10j \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_c = \frac{\underline{A}_{12}}{\underline{A}_{11} - 1} = \frac{5j}{\frac{1}{3} - 1} = -\frac{15}{2}j = -7,5j \text{ Ом}$$

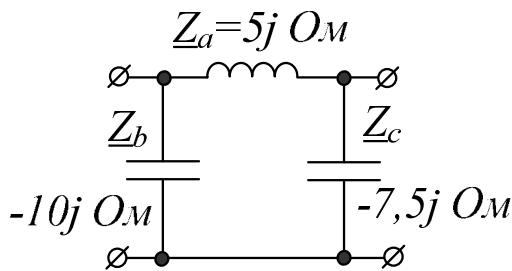
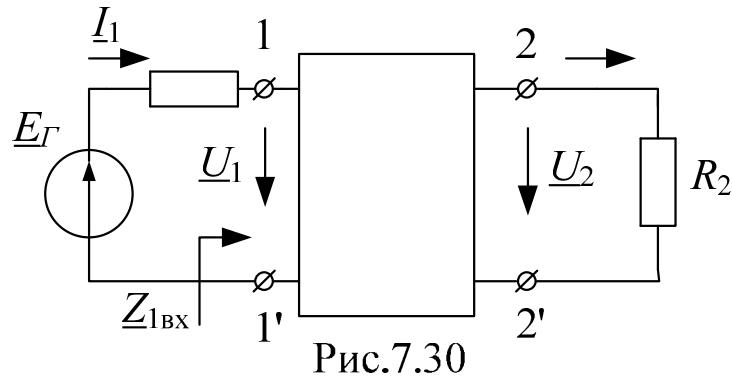


Рис.7.29

П- образная схеме замещения показана на рис.7.29. В ней использована одна индуктивность и две емкости. На низких частотах, когда индуктивности имеют большие номиналы и размеры, это будет пре-

имуществом П – образной схемы в сравнении с Т – образной.

Задача №40



Четырехполюсник (рис.7.30) подключен к генератору гармонического напряжения с действующим значением $E_G = 10\text{ В}$, внутренним сопротивлением $Z_G = 4 - 4j\text{ Ом}$ и нагружен на сопротивление $R_2 = 3\text{ Ом}$. На частоте генератора четырехполюсник имеет А- параметры:

$$\underline{A}_{11} = \frac{1}{3}; \underline{A}_{12} = 5j, \text{ Ом}; \underline{A}_{21} = \frac{1}{6}j, \text{ Ом}; \underline{A}_{22} = \frac{1}{2}.$$

Найти напряжения и токи на входе и выходе четырехполюсника.

Решение

1. Находим входное сопротивление четырехполюсника:

$$\underline{Z}_{1\text{вх}} = \frac{\underline{A}_{11}R_2 + \underline{A}_{12}}{\underline{A}_{21}R_2 + \underline{A}_{22}} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 3 + 5j}{\frac{1}{6}j \cdot 3 + 0,5} = \frac{1 + 5j}{0,5(1 + j)} = 6 + 4j\text{ Ом}.$$

2. Вычислим ток I_1 и напряжение U_1 :

$$I_1 = \frac{E_G}{\underline{Z}_{1\text{вх}} + Z_G} = \frac{10}{6 + 4j + 4 - 4j} = 1\text{ А},$$

$$U_1 = I_1 \underline{Z}_{1\text{вх}} = 6 + 4j\text{ В}.$$

3. Определим \underline{U}_2 и \underline{I}_2 , пользуясь B - параметрами. При этом учтем, что в схеме с B -параметрами направления токов меняются на противоположные. Поэтому в расчетных формулах надо взять токи со знаками минус.

$$\underline{U}_2 = A_{22}\underline{U}_1 + A_{12}(-\underline{I}_1) = 0,5(6 + 4j) - 1 \cdot 5j = 3 - 3j \text{ В}$$

$$-\underline{I}_2 = A_{22}\underline{U}_1 + A_{11}(-\underline{I}_1) = \frac{1}{6}j(6 + 4j) - \frac{1}{3} \cdot 1 = j - 1 \text{ А}$$

Ответ: $\underline{I}_2 = 1 - j \text{ А}$.

Задача №41

Найти характеристические параметры четырехполюсника, заданного в примере 7.3, считая известными A -параметры:

$$A_{11} = \frac{1}{3}; A_{12} = 5j \text{ Ом}; A_{21} = \frac{1}{6}j \text{ См}; A_{22} = 0,5 .$$

Решение

Вычисляем характеристические параметры, используя A - параметры четырехполюсника:

$$\underline{Z}_{1C} = \sqrt{\frac{A_{11} \cdot A_{12}}{A_{21} \cdot A_{22}}} = \sqrt{\frac{1 \cdot 5j}{3 \cdot \frac{1}{6}j \cdot \frac{1}{2}}} = \sqrt{20} \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{2C} = \sqrt{\frac{A_{22} \cdot A_{12}}{A_{21} \cdot A_{11}}} = \sqrt{\frac{1 \cdot 5j}{2 \cdot \frac{1}{6}j \cdot \frac{1}{3}}} = \sqrt{45} \text{ Ом},$$

$$\begin{aligned} \ell^g &= \sqrt{A_{11} \cdot A_{22}} + \sqrt{A_{21} \cdot A_{12}} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} + \sqrt{5j \cdot \frac{1}{6}j} = \sqrt{\frac{1}{6}} + \sqrt{-\frac{5}{6}} = 0,41 + j0,915 = 1 \cdot e^{j66^\circ} = e^a \cdot e^{jb}. \end{aligned}$$

Ответ:

$$\underline{Z}_{1C} = \sqrt{20} \text{ Ом}, \quad \underline{Z}_{2C} = \sqrt{45} \text{ Ом}, \quad a = 0, \quad b = 66^\circ = 1,14 \text{ рад}.$$

Задача №42

Четырехполюсник (рис.7.31) нагружен на согласованное сопротивление и имеет характеристические параметры $\underline{Z}_{1C}=10$ Ом, $\underline{Z}_{2C}=40$ Ом, $a=0$, $b=45^\circ$. Входное напряжение $U_1=100$ В. Найти \underline{U}_2 , \underline{I}_1 , \underline{I}_2 .

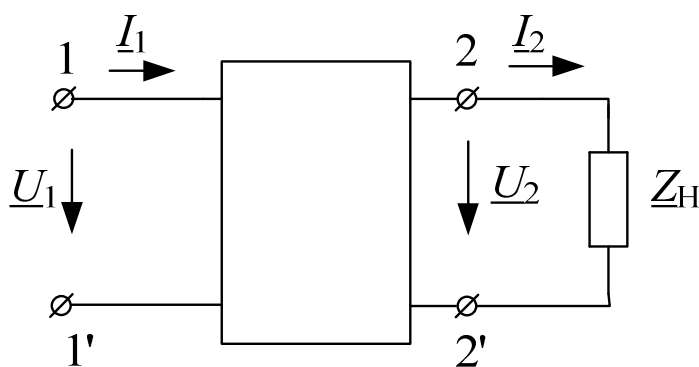


Рис.7.31

Р е ш е н и е

1. Так как нагрузка четырехполюсника согласованная, его входное сопротивление

$$\underline{Z}_{1вх} = \underline{Z}_{1C} = 10 \text{ Ом}.$$

2. Находим ток $\underline{I}_1 = \frac{\underline{U}_1}{\underline{Z}_{1вх}} = 10 \text{ А}.$

3. В согласованном четырехполюснике справедлива формула:

$$\underline{U}_1 = \sqrt{\frac{\underline{Z}_{1C}}{\underline{Z}_{2C}}} \underline{U}_2 e^g.$$

Определяем из этой формулы:

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{U}_1}{\sqrt{\frac{\underline{Z}_{1C}}{\underline{Z}_{2C}}} e^g} = \frac{100}{\sqrt{\frac{10}{40}} e^{j45^\circ}} = 200 e^{-j45^\circ} \text{ В}.$$

4. Находим ток:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_H} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{Z}_{2C}} = 5e^{-j45^\circ} \text{ A.}$$

Ток I_2 можно также определить по формуле:

$$\underline{I}_2 = \frac{\underline{I}_1}{\sqrt{\frac{\underline{Z}_{2C}}{\underline{Z}_{1C}}} e^{g}} = 5e^{-j45^\circ} \text{ A.}$$

ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ

Классический метод

Примеры расчета переходных процессов классическим методом

Задача №43

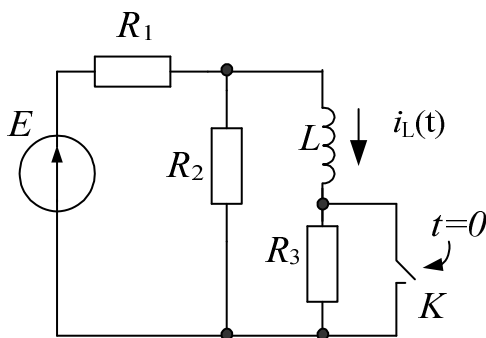


Рис. 8.23

Для цепи рис.8.23 заданы $E=6\text{В}$, $R_1 = R_2 = R_3 = 2 \text{ Ом}$, $L = 2 \text{ Гн}$. Найти ток $i_L(t)$ и напряжение $u_L(t)$ после коммутации.

Решение

1. Рассчитаем докоммутационный режим:

$$i_L(0_-) = \frac{E}{R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}} \cdot \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 1 \text{ A} = i_L(0_+).$$

$i_L(0_+) = 1\text{A}$ – независимое начальное условие.

2. Принуждённый режим:

$$i_{Lnp} = \frac{E}{R_1} = 3\text{A}$$

3. Составляем характеристическое уравнение и определяем его корни:

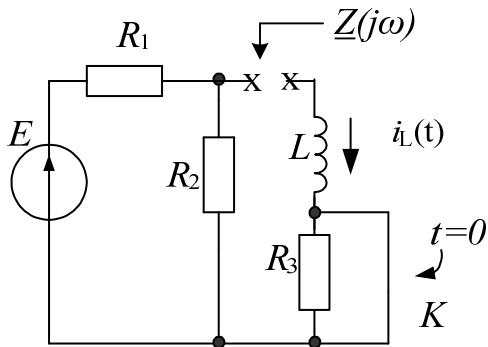


Рис. 8.23

$$\underline{Z}(j\omega) = j\omega L + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

$$pL + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 0; \quad pL + 1 = 0, \quad p_1 = -0,5 \text{ c}^{-1}$$

4. Свободная составляющая тока:

$$i_{Lcв}(t) = A e^{p_1 t}; \quad A = i_{Lcв}(0_+) = i_L(0_+) - i_{Lnp}(0_+) = 1 - 3 = -2 \text{ A};$$

$$i_{Lcв}(t) = -2 e^{-0,5t} \text{ A}.$$

5. Полный ток

$$i_L(t) = i_{Lnp}(t) + i_{Lcв}(t) = 3 - 2 e^{-0,5t} \text{ A}$$

6. Найдём $u_L(t)$:

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = 2 e^{-0,5t} \text{ B}.$$

Графики полного тока и напряжения показаны на рис. 8.24.

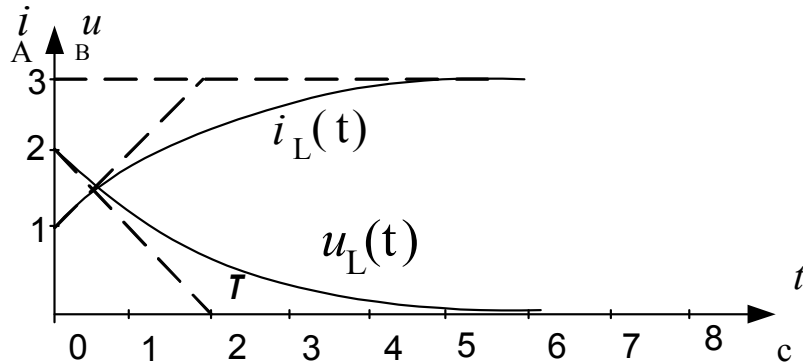


Рис. 8.24

Задача №44

Цепь, показанная на рис.8.25, имеет следующие параметры:
 $E = 100\text{В}$, $R_1 = R_2 = R_3 = 200\text{ кОм}$, $C = 1\text{ мкФ}$.

Найти $u_C(t)$ после коммутации.

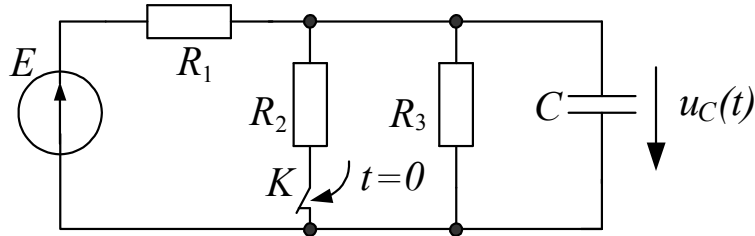


Рис.8.25

Решение

1. Расчет режима до коммутации

Параллельное соединение R_2 и R_3 равно 100 кОм .

Имеем делитель напряжения из R_1 и $R_2 \parallel R_3$.

$$u_C(0_-) = E \frac{R_2 \parallel R_3}{R_1 + R_2 \parallel R_3} = 100 \cdot \frac{100 \cdot 10^3}{300 \cdot 10^3} = 33\text{ В} = u_C(0_+)$$

2. Принужденный режим.

$$u_{Cnp} = E \frac{R_3}{R_1 + R_3} = 50\text{ В}.$$

3. Характеристическое уравнение

$$\frac{1}{pC} + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} = 0;$$

$$p_1 = -\frac{1}{\frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} C} = -\frac{1}{100 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6}} = -10 \text{ 1/с}.$$

4. Свободная составляющая напряжения на емкости:

$$u_{Cсв}(t) = B e^{-10t} = [u_C(0_+) - u_{Cnp}] e^{-10t} = [33 - 50] e^{-10t} = -17 e^{-10t} \text{ В}.$$

5. Полный переходной процесс:

$$u_C(t) = u_{Cnp}(t) + u_{Cсв}(t) = 50 - 17e^{-10t} \text{ В.}$$

Задача №45

В цепи рис.8.26 найти $u(t)$ после коммутации.

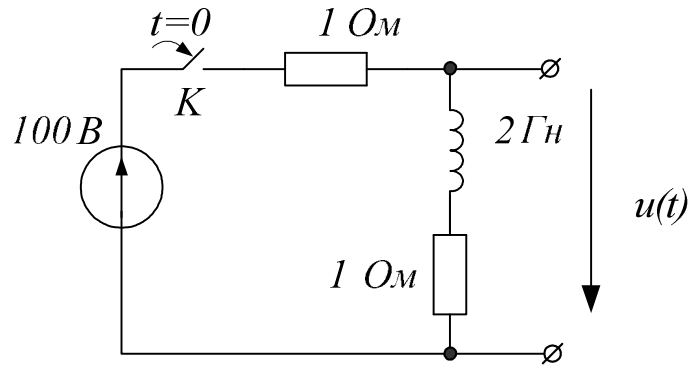


Рис.8.26

Решение

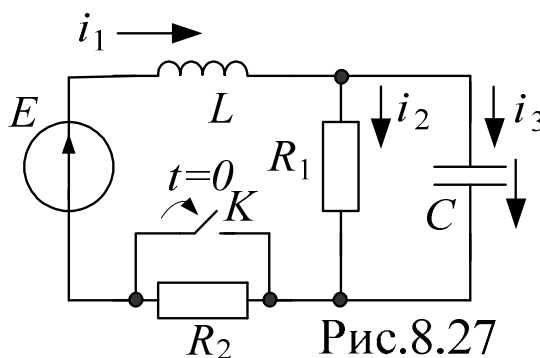
1. До коммутации $i_L(0_-) = 0$.
2. Принужденный режим $i_{Lnp} = 50 \text{ А}$.
3. Характеристическое уравнение: $pL + 2 = 0$, $p_1 = -1 \text{ 1/с}$.
4. Свободный ток: $i_{Lсв}(t) = [i_L(0_+) - i_{Lnp}]e^{-t} = -50e^{-t} \text{ А}$.
5. Полный ток: $i_L(t) = i_{Lnp} + i_{Lсв}(t) = 50 - 50e^{-t} \text{ А}$.
6. Напряжение на выходе:

$$\begin{aligned} u(t) &= u_R(t) + u_L(t) = R(50 - 50e^{-t}) + L \frac{di_L}{dt} = \\ &= 50 - 50e^{-t} - 2[-1] \cdot 50e^{-t} = 50 + 50e^{-t} \text{ В.} \end{aligned}$$

Ответ: $u(t) = 50 + 50e^{-t} \text{ В}$.

Задача №46

Заданы параметры цепи рис.8.27:
 $L = \frac{4}{3} \text{ Гн}, C = \frac{1}{16} \text{ Ф}, R_1 = R_2 = 2 \text{ Ом}, E = 12 \text{ В}.$
 Определить напряжение $u_C(t)$ после коммутации.

**Решение**

1. Расчет режима до коммутации:

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = 6 \text{ В}, \quad i_L(0_-) = i_L(0_+) = 3 \text{ А}.$$

2. Принужденный режим:

$$u_{Cnp} = 12 \text{ В}, \quad i_{Lnp} = 6 \text{ А}.$$

3. Характеристическое уравнение:

$$\underline{Z}(j\omega) = j\omega L + \frac{R\left(\frac{1}{j\omega C}\right)}{R + \frac{1}{j\omega C}} = 0;$$

Заменяем $j\omega$ на p :

$$Z(p) = pL + \frac{R\left(\frac{1}{pC}\right)}{R + \frac{1}{pC}} = pL + \frac{R}{RCp + 1} = 0.$$

Получим уравнение:

$$p^2 RLC + pL + R = 0,$$

$$p^2 \cdot 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{16} + p \cdot \frac{4}{3} + 2 = 0, \quad p^2 + 8p + 12 = 0.$$

Корни: $p_1 = -2 \frac{1}{c}$, $p_2 = -6 \frac{1}{c}$.

Свободное напряжение: $u_{Cсв}(t) = A_1 e^{-2t} + A_2 e^{-6t}$.

4. Расчет постоянных интегрирования:

$$u_{Cсв}(0_+) = A_1 + A_2 = u_C(0_+) - u_{Cnp}(0_+) = 6 - 12 = -6 \text{ В} \quad (1).$$

$$\frac{du_{Cсв}}{dt} \Big|_{t=0_+} = p_1 A_1 + p_2 A_2 = \frac{i_{Cсв}(0_+)}{C}.$$

$$i_{Cсв}(0_+) = i_C(0_+) - i_{Cnp}(0_+) = i_C(0_+).$$

Расчет $i_C(0_+)$ в послекоммутационной схеме ($t = 0_+$) (рис.8.28).

В узле a напряжение равно $U_C(0_+) = 6 \text{ В}$.

Ток $i_2(0_+) = \frac{U_C(0_+)}{2 \text{ Ом}} = 3 \text{ А}$. По первому закону Кирхгофа получим $i_C(0_+) = 0$.

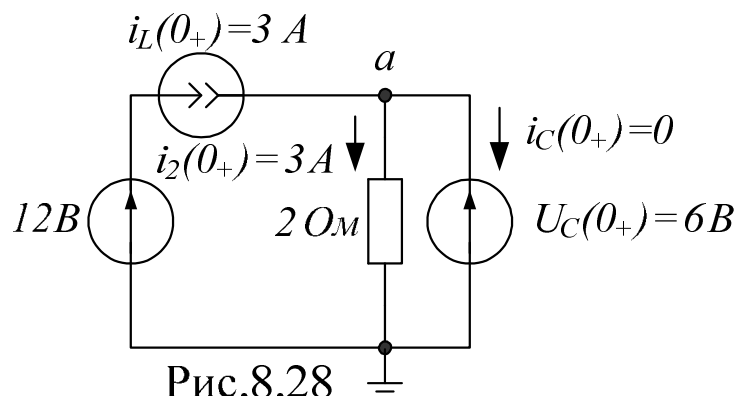


Рис.8.28

Получим систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} A_1 + A_2 = -6 \\ -2A_1 - 6A_2 = 0 \end{cases}$$

Решение системы: $A_1 = -9B$, $A_2 = 3$.

Ответ: $u_C(t) = 12 - 9e^{-2t} + 3e^{-6t}$.

ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД

Примеры расчета переходных процессов операторным методом

Задача №47

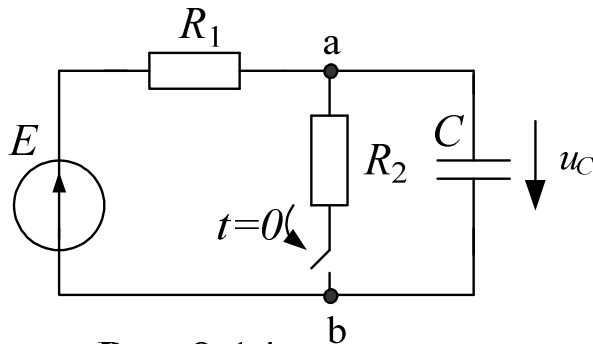


Рис.9.14

В цепи (рис.9.14) заданы параметры: $E = 100$ В, $R_1 = R_2 = 100$ кОм, $C = 2$ мкФ.

Найти $u_C(t)$ операторным методом.

Решение.

1. Находим независимое начальное условие $u_C(0_+) = 100$ В.
2. Составляем операторную схему замещения (рис.9.15):

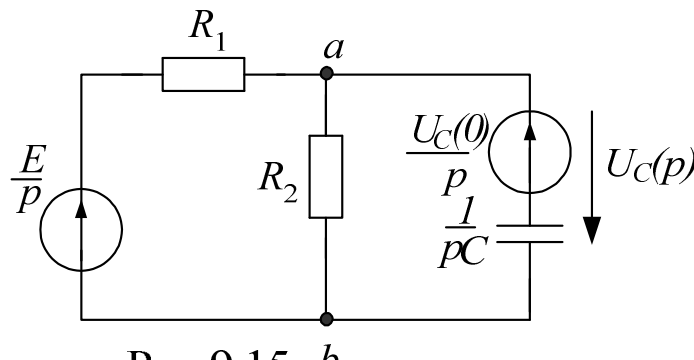


Рис.9.15

3. По схеме замещения методом двух узлов находим изображение $U_C(p)$:

$$U_C(p) = U_{ab}(p) = \frac{\frac{E}{p} \cdot \frac{1}{R_1} + \frac{E}{p} \cdot pC}{\frac{2}{R} + pC} = \frac{E(1 + pCR)}{p(2 + pCR)} = \frac{E(1 + p \cdot 0,2)}{p(2 + p \cdot 0,2)} = \frac{A(p)}{B(p)}$$

4. Находим оригинал $U_C(t) = U_{ab}(t)$ по теореме разложения.

Корни знаменателя находим из уравнения:

$$B(p) = p(2 + pCR) = 0, \text{ откуда:}$$

$$p_1 = 0, p_2 = -\frac{2}{RC} = -\frac{2}{0,2} = -10 \text{ с}^{-1}.$$

Вычисляем:

$$B'(p) = 2 + 2p \cdot 0,2, A(p_1) = E, A(p_2) = -E,$$

$$B'(p_1) = 2, B'(p_2) = -2$$

$$U_C(t) = U_{ab}(t) = \frac{A(p_1)}{B'(p)_{p=p_1}} e^{p_1 t} + \frac{A(p_2)}{B'(p)_{p=p_2}} e^{p_2 t} =$$

$$= 50 + 50e^{-10t} \text{ В}$$

Задача №48

В цепи (рис.9.16) с параметрами $L = 0,1$ Гн, $R_1 = R_2 = 100$ Ом действует источником гармонической ЭДС $e(t) = 141 \sin 10^3 t$ В. В момент $t = 0$ ключ k размыкается. Найти ток после коммутации операторным методом, используя отделение свободного режима от принужденного.

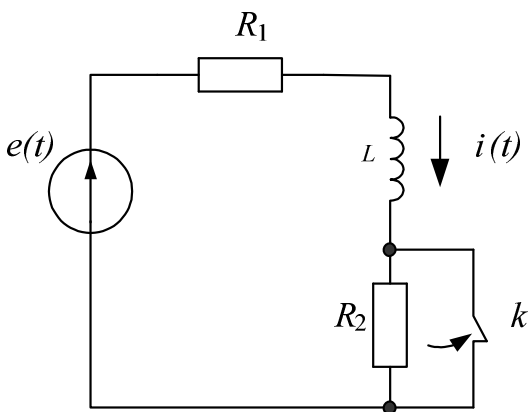


Рис.9.16

Решение

1. Расчет режима до коммутации:

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{E}_m}{R_1 + j\omega L} = \frac{141}{100 + j100} = 1e^{-j45^\circ} \text{ А,}$$

$$i(t) = 1 \sin(10^3 t - 45^\circ); \quad i(0_-) = i(0_+) = \sin(-45^\circ) = -0,707 \text{ А.}$$

2. Рассчитаем принужденный режим.

После коммутации активное сопротивление цепи станет равным 200 Ом:

$$\dot{I}_{mnp} = \frac{\dot{E}_m}{200 + j100} = \frac{141}{100\sqrt{5}} e^{-j26^\circ 30'} \text{ А,}$$

$$i_{np}(t) = 0,63 \sin(10^3 t - 26^\circ 30') \text{ А.}$$

Находим принужденный ток в момент $t = 0_+$:

$$i_{np}(0_+) = 0,63 \sin(-26^\circ 30') = -0,281 \text{ А.}$$

3. Находим независимые начальные условия для свободной составляющей тока в индуктивности:

$$\begin{aligned} i_{L_{cb}}(0_+) &= i_{cb}(0_+) = i(0_+) - i_{np}(0_+) = \\ &= -0,707 + 0,281 = -0,426 \text{ А} \end{aligned}$$

4. Составляем операторную схему замещения для свободных составляющих (рис.9.16). Находим операторный свободный ток:

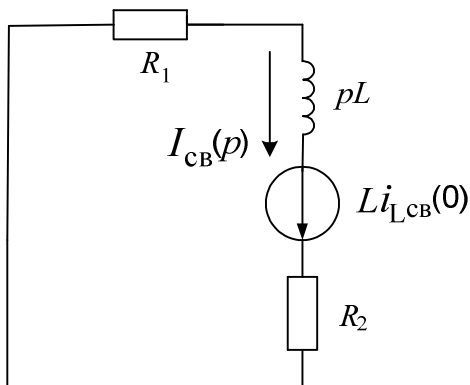


Рис.9.16

$$I_{cb}(p) = \frac{Li_{cb}(0)}{R_1 + R_2 + pL} = \frac{-0,426 \cdot 0,1}{200 + 0,1p}.$$

По теореме разложения находим оригинал свободного тока:

$$i_{cb}(t) = -0,426 e^{-2000t} \text{ А.}$$

5. Находим полный ток:

$$\begin{aligned} i(t) &= i_{np}(t) + i_{cb}(t) = \\ &= 0,63 \sin(10^3 t - 26^\circ 30') - 0,426 e^{-2000t} \text{ А} \end{aligned}$$

Задача №49

Заданы параметры цепи рис.8.27:
 $L = \frac{4}{3} \text{ Гн}, C = \frac{1}{16} \text{ Ф}, R_1 = R_2 = 2 \text{ Ом}, E = 12 \text{ В}.$ Определить напряжение $u_C(t)$ после коммутации.

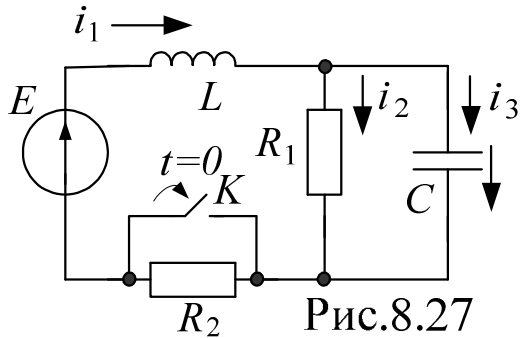


Рис.8.27

Решить задачу из примера 8.12 (рис.8.27) операторным методом расчета.

1. Расчет режима до коммутации:

$$u_C(0_-) = u_C(0_+) = 6 \text{ В}, \quad i_L(0_-) = i_L(0_+) = 3 \text{ А}.$$

2. Составляем операторную схему замещения цепи (рис.9.17):

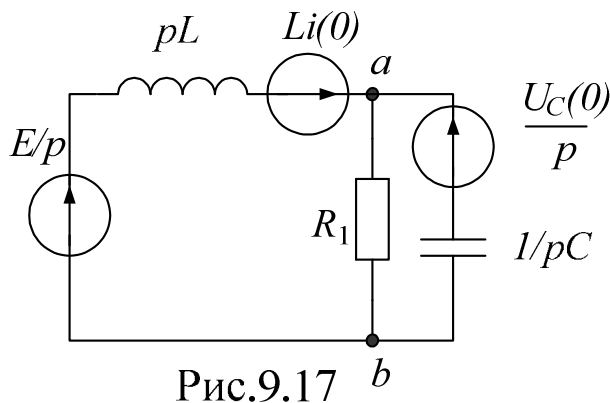


Рис.9.17

3. По методу двух узлов находим $U_{ab}(p)$:

$$U_{ab}(p) = \frac{\frac{E}{p} + Li(0)}{pL} + \frac{u_C(0)}{p \cdot \frac{1}{pC}} =$$

$$= \frac{\frac{12}{p} + \frac{4}{3} \cdot 3}{\frac{4}{3}p} + 6 \cdot \frac{1}{16} = \frac{6p^2 + 48p + 144}{p(p^2 + 8p + 12)} = \frac{A(p)}{B(p)}.$$

4. Находим оригинал напряжения по теореме разложения.

Для этого:

Находим корни знаменателя:

$$B(p) = 0, p_1 = 0, p_2 = -2 \frac{1}{c}, p_3 = -6 \frac{1}{c}.$$

Находим производную знаменателя:

$$B'(p) = 3p^2 + 16p + 12.$$

Вычисляем:

$$\frac{A(p_1)}{B'(p_1)} = \frac{144}{12} = 12B.$$

$$\frac{A(p_2)}{B'(p_2)} = \frac{6 \cdot (-2)^2 + 48 \cdot (-2) + 144}{3 \cdot (-2)^2 + 16 \cdot (-2) + 12} = -9B.$$

$$\frac{A(p_3)}{B'(p_3)} = \frac{6 \cdot (-6)^2 + 48 \cdot (-6) + 144}{3 \cdot (-6)^2 + 16 \cdot (-6) + 12} = 3B.$$

Получим ответ:

$$u_C(t) = \frac{A(p_1)}{B'(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{A(p_2)}{B'(p_2)} e^{p_2 t} + \frac{A(p_3)}{B'(p_3)} e^{p_3 t} =$$

$$= 12 - 9e^{-2t} + 3e^{-6t}.$$

Ответ совпадает с расчетом классическим методом.

Задача №50

Заданы параметры цепи рис.10.19: $R_1 = R_2 = 500$ кОм, $C = 1$ мкФ. такую цепь называют пропорционально-интегрирующий фильтр.

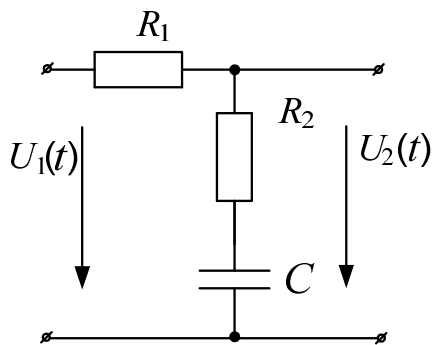


Рис.10.19

Найти передаточную функцию по напряжению $K(p)$, переходную характеристику $h(t)$, переходную входную проводимость $g(t)$, импульсную характеристику $h_\delta(t)$, импульсную входную проводимость $g_\delta(t)$.

Решение

1. Передаточная функция цепи:

$$K(p) = \frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{U_1(p)}{Z(p)} \cdot \frac{R_2 + \frac{1}{pC}}{U_1(p)} =$$

$$= \frac{R_2 + \frac{1}{pC}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{pC}} = 0,5 \frac{p+2}{p+1}.$$

2. Переходная характеристика $h(t)$.

а) Определение классическим методом:

Считаем $u_1(t) = I(t)$. Тогда, рассчитаем цепь первого порядка, получим:

$$h(t) = 1 - 0,5e^{-t}.$$

б) Определение операторным методом:

$$h(t) \stackrel{\bullet}{=} \frac{K(p)}{p} = 0,5 \frac{p+2}{p(p+1)} \stackrel{\bullet}{=} 1 - 0,5e^{-t}.$$

3. Переходная проводимость:

$$g(t) = \frac{1}{pZ(p)} = 0,5 \frac{1}{p(R_1 + R_2 + \frac{1}{pC})} = \frac{10^{-6}}{p+1} \stackrel{\bullet}{=} g(t) = 10^{-6} e^{-t} \text{ См.}$$

4. Импульсная характеристика:

$$\begin{aligned} h_{\delta}(t) \stackrel{\bullet}{=} K(p) &= 0,5 \frac{p+2}{p+1} = 0,5 \left(\frac{p+1}{p+1} + \frac{1}{p+1} \right) = \\ &= 0,5 + \frac{0,5}{p+1} \stackrel{\bullet}{=} 0,5\delta(t) + 0,5e^{-t} c^{-1}. \end{aligned}$$

Проверка

$$h_{\delta}(t) = h(0)\delta(t) + h'(t) = 0,5\delta(t) + 0,5e^{-t} c^{-1}.$$

5. Импульсная проводимость:

$$g_{\delta}(t) \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{Z(p)} = \frac{10^{-6} p}{p+1} = 10^{-6} \left(1 - \frac{1}{p+1} \right).$$

$$g_{\delta}(t) = 10^{-6} \delta(t) - 10^{-6} e^{-t} \text{ См/с}$$

Задача №51

На заданную цепь (рис.10.19) воздействует импульс напряжения $u_1(t) = Ue^{-\alpha t}$ длительности t_1 (рис.10.20). Параметры импульса $U = 100 \text{ В}$, $\alpha = 2 \text{ с}^{-1}$, $t_1 = 1 \text{ с}$.

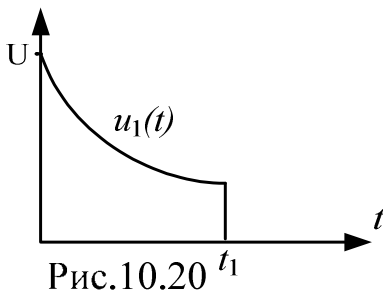


Рис.10.20

Определить напряжение $u_2(t)$ при помощи интегралов Дюамеля первого и

второго вида.

У к а з а н и е :

Следует обратить внимание на разбиение временной области на интервалы интегрирования, правильную расстановку пределов в интегралах, особенности вычисления интегралов, содержащих импульсную функцию.

1. Применение интеграла Дюамеля первого вида

На интервале $0 \leq t < t_1$:

$$u_2(t) = u_1(0)h(t) + \int_0^t u_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau.$$

Находим:

$$u_1(0) = 100B; u_1(t) = 100e^{-2t} B;$$

$$h(t) = 1 - 0,5e^{-t};$$

$$h(t-\tau) = 1 - 0,5e^{-(t-\tau)}, u_1'(\tau) = -\alpha Ue^{-\alpha\tau} = -200e^{-2\tau} B.$$

Вычисляем интеграл:

$$\begin{aligned} u_2(t) &= 100(1 - 0,5e^{-t}) + \int_0^t (-200e^{-2\tau})(1 - 0,5e^{-(t-\tau)})d\tau = \\ &= 100 - 50e^{-t} - \int_0^t 200e^{-2\tau}d\tau + 100e^{-t} \int_0^t e^{-\tau}d\tau = 50e^{-t} B \end{aligned}$$

На интервале $t_1 < t < \infty$:

$$\begin{aligned} u_2(t) &= u_1(0)h(t) + \int_0^{t_1} u_1'(\tau)h(t-\tau)d\tau - Ue^{-\alpha t_1}h(t-t_1) = \\ &= 100 - 50e^{-t} - 200 \int_0^{t_1} e^{-2\tau}(1 - 0,5e^{-t+\tau})d\tau - 100e^{-2t_1}(1 - 0,5e^{-(t-t_1)}) = \\ &= 50e^{-t}(1 - e^{-t_1})B \end{aligned}$$

2. Применение интеграла Дюамеля второго вида.

На интервале $0 \leq t < t_1$:

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \int_0^t u_1(\tau) h_{\delta}(t-\tau) d\tau = \int_0^t 100e^{-2\tau} (0,5\delta(t-\tau) + 0,5e^{-(t-\tau)}) d\tau = \\ &= \int_0^t 50e^{-2\tau} \delta(t-\tau) d\tau + \int_0^t 50e^{-t} e^{-\tau} d\tau = 50e^{-2t} + 50e^{-t} - 50e^{-2t} = 50e^{-t} \end{aligned}$$

Пояснение:

На интервале интегрирования по τ ($0 \div t$) при $\tau = t$ действует фильтрующее свойство δ -функции. Поэтому

$$\int_0^t 50e^{-2\tau} \delta(t-\tau) d\tau = 50e^{-2t}.$$

На интервале $t_1 < t < \infty$:

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \int_0^{t_1} u_1(\tau) h_{\delta}(t-\tau) d\tau = \int_0^{t_1} 50e^{-2\tau} \delta(t-\tau) d\tau + \int_0^{t_1} 50e^{-2\tau} e^{-t} e^{\tau} d\tau = \\ &= 50e^{-t} - 50e^{-t_1} e^{-t} = 50e^{-t} (1 - e^{-t_1}) \end{aligned}$$

Пояснение:

Так как $t_1 < t$ при интегрировании по τ ($0 \div t_1$) условие $\tau = t$ не выполняется, $\delta(t-\tau)$ под интегралом будет равна нулю. Поэтому:

$$\int_0^{t_1} 50e^{-2\tau} \delta(t-\tau) d\tau = 0.$$

Результаты, полученные с использованием первого и второго интеграла, Дюамеля совпадают.

На рис.10.21 показаны графики входного воздействия (сплошная линия) и реакции на выходе (пунктирная линия).

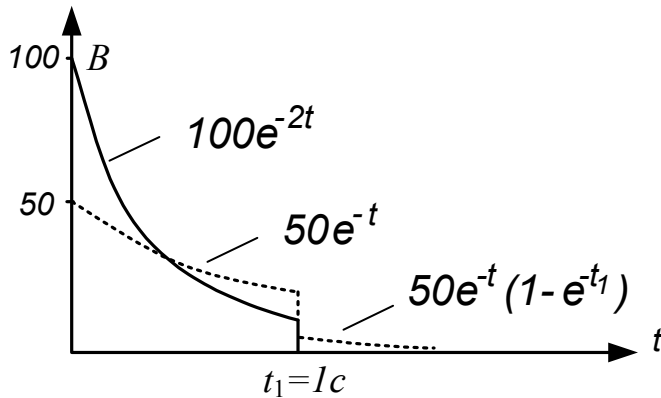


Рис.10.21

Задача №52

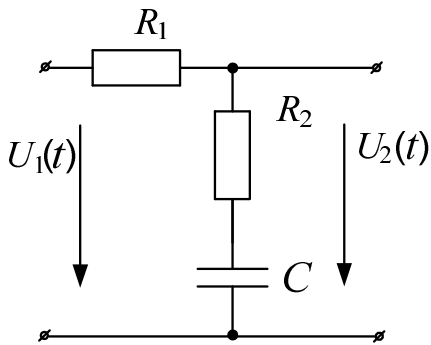


Рис.10.19

На цепь (рис.10.19) на интервале времени $t \geq 0$ воздействует импульс напряжения $u_1(t) = 1 - e^{-4t}$ В.

Операторным методом найти выходное напряжение.

Решение

1. Находим изображение входного сигнала:

$$u_1(t) = 1 - e^{-4t} \stackrel{\bullet}{=} \frac{4}{\bullet p(p+4)} = U_1(p).$$

2. Находим передаточную функцию цепи (см. пример 10.6):

$$K(p) = 0,5 \frac{p+2}{p+1}.$$

3. Находим изображение выходного сигнала:

$$U_2(p) = K(p) \cdot U(p) = 0,5 \frac{(p+2)}{(p+1)} \frac{4}{p(p+4)} = \frac{2(p+2)}{p(p+1)(p+4)}.$$

4. По теореме разложения находим оригинал выходного напряжения:

$$u_2(t) = 1 - \frac{1}{3}e^{-4t} - \frac{2}{3}e^{-t} B.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. – М.: Гардарики, 2006. – 701 с.
2. Алехин В.А. Моделирование электрических цепей и электронных схем в среде «TINA-8». – М: МИРЭА, 2010 г., № 0986.
3. Алехин В.А. Линейные электрические цепи. Компьютерное моделирование в среде «TINA-8». – М: МИРЭА, 2010 г., № 1083.
4. TINA. Design Suite. The Complete Electronics Lab for Windows. Quick Start manual. - <http://www.designsoftware.com/>
5. TINA PRO ADVANCED TOPICS. - <http://www.tina.com/>
6. TINA PCB Design manuals. - <http://www.designsoftware.com/>